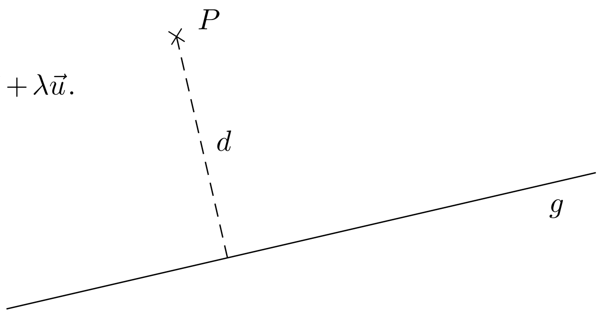
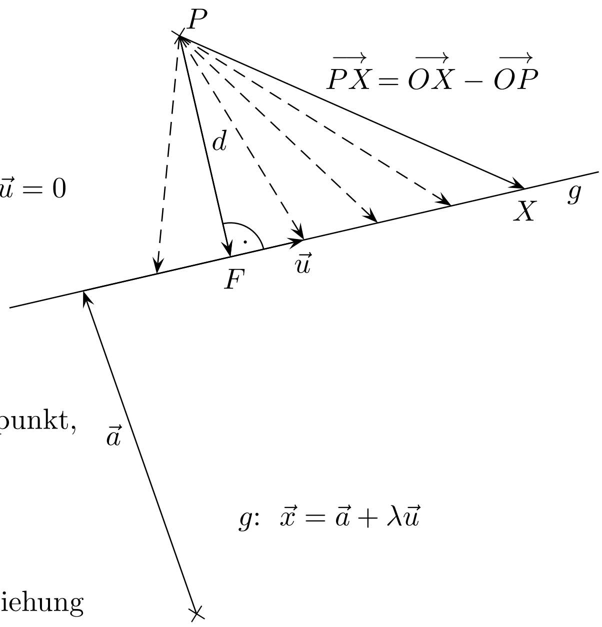
Abstand Punkt/Gerade

1. Gegeben sind der Punkt P und die Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$.
   Gesucht ist der Abstand d von P zu g.





2. Für ein λ gilt: $\underbrace{\vec{a} + \lambda\vec{u}}_{\overrightarrow{OX}} - \overrightarrow{OP} \perp \vec{u}$, d.h.
   $$(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{u} = 0$$

   Hieraus lässt sich λ berechnen, allgemein:
   $$\lambda = \frac{(\overrightarrow{OP} - \vec{a}\,) \cdot \vec{u}}{\vec{u}^{\,2}}$$

   λ eingesetzt in die Geradengleichung ergibt den Fußpunkt, genauer $\overrightarrow{OF}$ und schließlich gilt: $d = |\,\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP}\,|$.

   Empfehlung:
   In Klausuren sollte von der (sich zu merkenden) Beziehung
   $$(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{u} = 0$$
   ausgegangen werden, um zunächst λ zu bestimmen.

   Um den Abstand mit dem GTR zu ermitteln, kann das Minimum der Funktion
   $$d(\lambda) = |\,\vec{a} + \lambda\vec{u} - \overrightarrow{OP}\,|$$
   bestimmt werden.
   Empfehlenswert ist, die Vektoren $\vec{a}$ und $\overrightarrow{OP}$ zusammenzufassen.
   Der Betrag wird wie üblich mit einer Wurzel aus einer Quadratsumme gebildet.

3. Berechne den Fußpunkt und den Abstand:

   a) $P(0\,|\,0\,|\,20)$ $\qquad g$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -30 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

   b) $P(5\,|\,5\,|\,10)$ $\qquad g$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Abstand Punkt/Gerade

Berechne den Fußpunkt und den Abstand:

a) $P(0\,|\,0\,|\,20)$ $\qquad g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -30 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

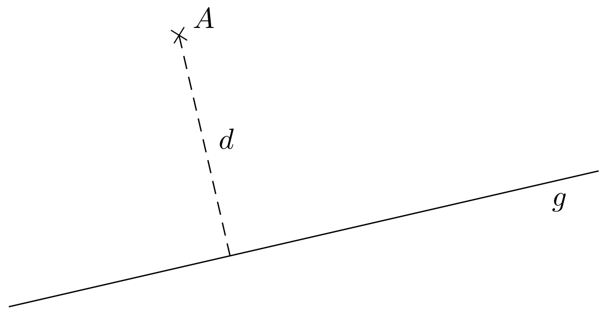
b) $P(5\,|\,5\,|\,10)$ $\qquad g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösungen:

a) $F(3\,|\,9\,|\,0)$, $\quad \lambda = \frac{9}{10}$, $\quad d = 7\sqrt{10}$

b) $F(14\,|\,5\,|\,-8)$, $\quad \lambda = -8$, $\quad d = 9\sqrt{5}$

Abstand Punkt/Gerade Laufender Punkt



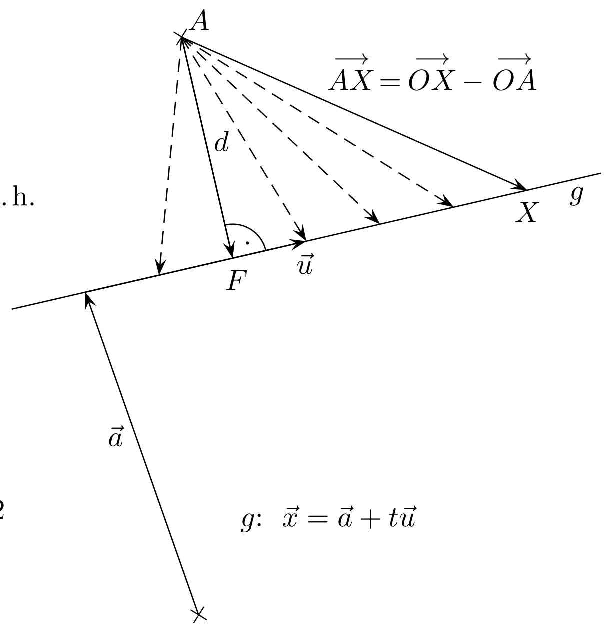
Gegeben sind der Punkt $A(-1\,|\,3\,|\,6)$ und die Gerade

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Gesucht ist der Abstand d von A zu g.

Die Berechnung ist recht einprägsam, wenn die Geradengleichung als laufender Punkt geschrieben wird:

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{zusammengefasst:} \qquad \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2+t \\ -1+4t \\ 2+2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$



Für das t, das zum Fußpunkt F gehört, gilt: $\overrightarrow{AX} \perp \vec{u}$, d. h.

$$\overrightarrow{AX} \cdot \vec{u} = 0$$

$(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}) \cdot \vec{u} = 0$ führt zu

$$(3+t) + (-4+4t) \cdot 4 + (-4+2t) \cdot 2 = 0 \ \text{ mit } \ t = 1.$$

$t = 1$ in die Geradengleichung eingesetzt ergibt

den Fußpunkt $F(3\,|\,3\,|\,4)$, $d = |\,\overrightarrow{AF}\,| = 2\sqrt{5} = 4{,}472$

Berechne den Fußpunkt und den Abstand:

a) $A(10\,|\,5\,|\,7)$ $\qquad g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $A(2\,|\,-2\,|\,4)$ $\qquad g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Abstand Punkt/Gerade

Berechne den Fußpunkt und den Abstand:

a) $A(10 \,|\, 5 \,|\, 7)$ $\qquad g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $A(2 \,|\, {-2} \,|\, 4)$ $\qquad g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösungen:

a) $F(6 \,|\, 3 \,|\, 1)$, $\quad t = 2$, $\quad d = \sqrt{56} = 7{,}483$

b) $F(2 \,|\, -1 \,|\, 2)$, $\quad t = 0$, $\quad d = \sqrt{5} = 2{,}236$

Abstand Punkt/Gerade LK

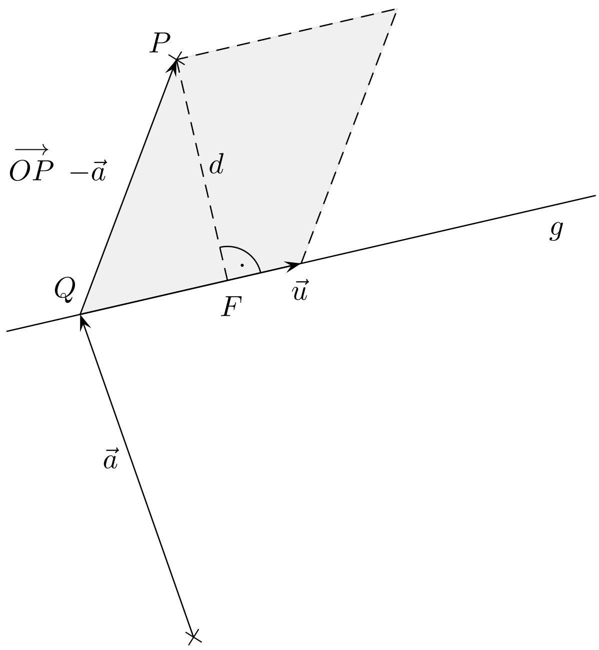
1. Begründe:

$$d \cdot |\,\vec{u}\,| = |\,(\overrightarrow{OP} - \vec{a}\,) \times \vec{u}\,|$$

$$d = \frac{|\,(\overrightarrow{OP} - \vec{a}\,) \times \vec{u}\,|}{|\,\vec{u}\,|}$$

$$d = |\,(\overrightarrow{OP} - \vec{a}\,) \times \vec{u}^{\circ}\,|$$

$$d = |\,\overrightarrow{QP} \times \vec{u}^{\circ}\,|$$



2. Begründe:

$$\begin{aligned} \lambda\vec{u} + \vec{d} &= \overrightarrow{OP} - \vec{a} \qquad \mid \cdot\ \vec{u} \\ &\dots \\ \lambda &= \frac{(\overrightarrow{OP} - \vec{a}\,) \cdot \vec{u}}{\vec{u}^{\,2}} \\ \lambda &= \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \vec{u}}{\vec{u}^{\,2}} \end{aligned}$$

3. Berechne den Fußpunkt und den Abstand:

a) $P(5\,|\,1\,|\,-2)$ $\qquad g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $P(8\,|\,0\,|\,0)$ $\qquad g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösungen:

3. a) $F(4\,|\,2\,|\,-4),\quad \lambda = 2,\quad d = \sqrt{6}$

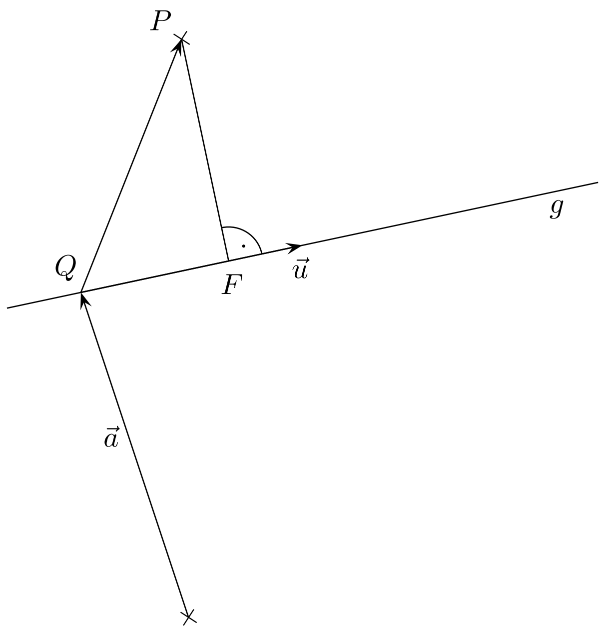
b) $F(3\,|\,-5\,|\,2),\quad \lambda = -2,\quad d = \sqrt{54}$

Zum Lotfußpunkt F

Gegeben sind der Punkt P und die Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$.

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \vec{u}}{\vec{u}^2}$$

führt zum Lotfußpunkt F.

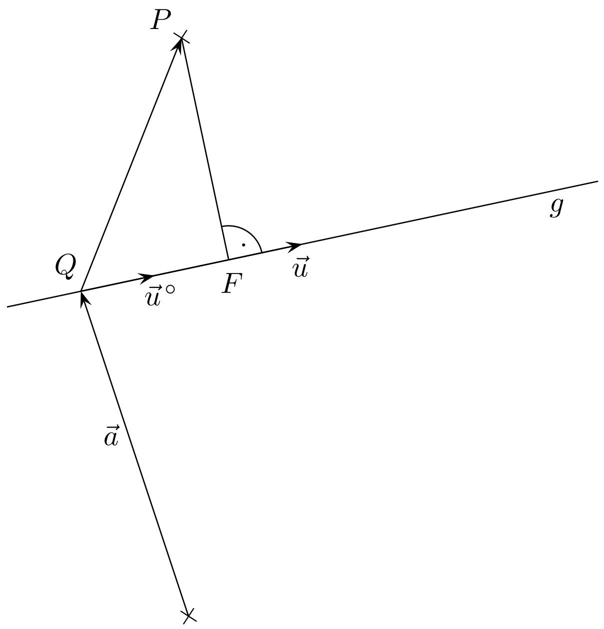


$$\overrightarrow{OF} = \vec{a} + \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \vec{u}}{\vec{u}^2}\, \vec{u}$$

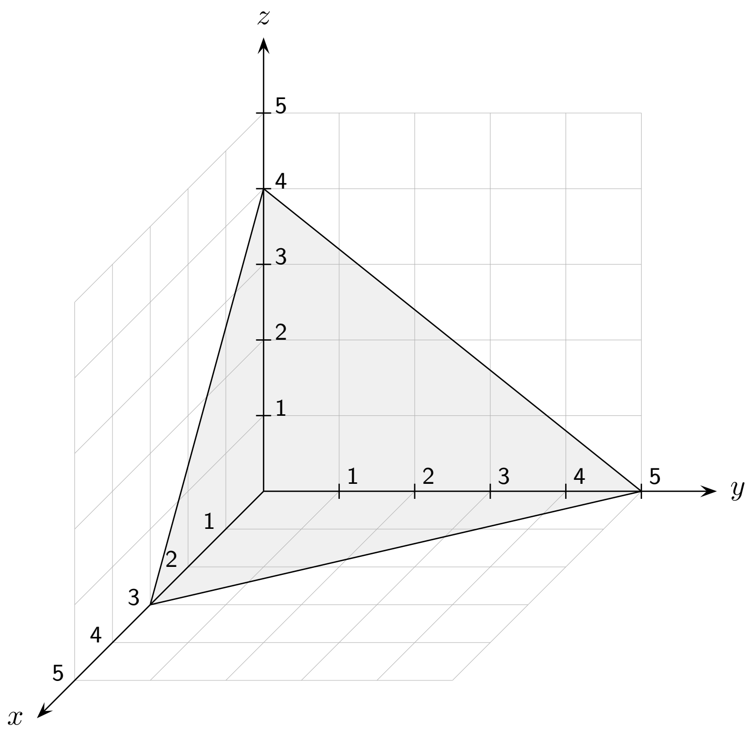
Dies kann mit wenigen Umformungen verifiziert werden.
Hierdurch wird auch der λ-Term verständlich.

$$\overrightarrow{OF} = \vec{a} + \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \vec{u}}{|\,\vec{u}\,| \cdot |\,\vec{u}\,|}\, \vec{u}$$

$$\overrightarrow{OF} = \vec{a} + \underbrace{(\overrightarrow{QP} \cdot \vec{u}^\circ)}_{|\overrightarrow{QF}| \cdot 1 \text{ (siehe Skalarprodukt)}}\, \vec{u}^\circ$$



Achsenabschnittsform der Ebene



$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{4} = 1$$

Die Gleichung der Ebene mit den Achsenabschnitten a, b und c lautet:

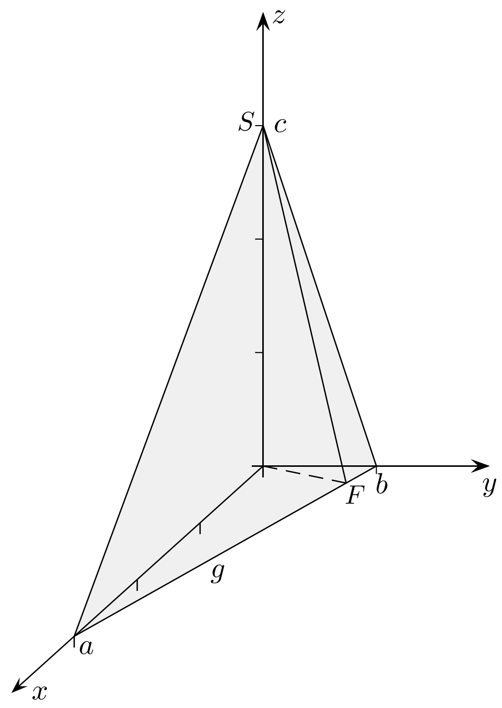
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

oder

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 1 = 0$$

Dies kann unmittelbar mit einer Betrachtung der Achsen-Schnittpunkte bestätigt werden. Für die Schnittstelle x_0 der Ebene mit der x-Achse gilt z. B. $y = 0$ und $z = 0$, also $x_0 = a$.

Alternativ kann mit den Achsen-Schnittpunkten die Koordinatenform $bcx + acy + abz - abc = 0$ ermittelt werden.
Diese dividiert durch abc ergibt die Achsenabschnittsform.



Aufg.
Eine (punktförmige) Kugel rollt eine schräge Ebene E von S herab. Wo trifft die Kugel in der xy-Ebene auf?

Die Kugel rollt auf einer Linie SF,
die senkrecht zur Spurgeraden g von E verläuft. Für den Fußpunkt F gilt $\overrightarrow{SF} \perp g$

$$\iff \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\implies \lambda = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

$$\implies \overrightarrow{OF} = \frac{ab}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da λ nicht von c abhängt, ist auch $\overrightarrow{OF} \perp g$.

Für weitere Fragestellungen siehe Abituraufgaben GK Bayern 2001.

Ergänzung (der Gradient ist kein verpflichtender Inhalt)

Die Ebene schließt mit der xy-Ebene den Winkel

$$\alpha = \arctan \frac{c}{|\overrightarrow{OF}|} = \arctan \frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$

ein.

Für $z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$ gilt dann:

$$\alpha = \arctan \frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{ab} = \arctan \left| \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \right| .$$

Wir erhalten: Die Steigung der Geraden des stärksten Anstiegs ist der Betrag des Gradienten.