

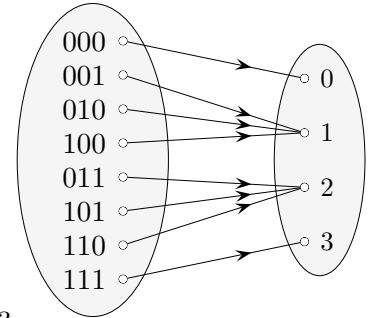
Erwartungswert

Bei einem Glücksspiel wird (häufig) jedem Elementarereignis ein Reingewinn zugeordnet.

Eine Funktion, die jedem Elementarereignis eine Zahl zuordnet, heißt *Zufallsvariable*. Sie wird mit einem großen Buchstaben wie X, Y, Z bezeichnet.

Betrachten wir hierzu ein einfaches Beispiel:

Eine Münze mit den Seiten 0 und 1 wird 3mal geworfen. Die Anzahl der Einsen sei mein Gewinn. Die Menge der Elementarereignisse besteht aus 8 Elementen: $\Omega = \{000, 001, \dots, 111\}$. Sei X die Anzahl der Einsen für ein Elementarereignis, z.B. $X(011) = 2$, $X(010) = 1$, $X(000) = 0$. Mein Gewinn X ist eine Funktion auf Ω . Das Diagramm veranschaulicht die Funktion.



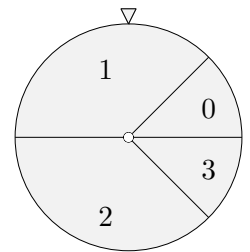
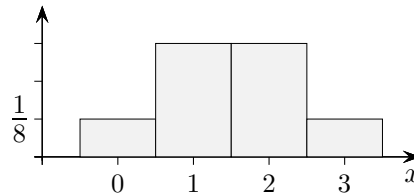
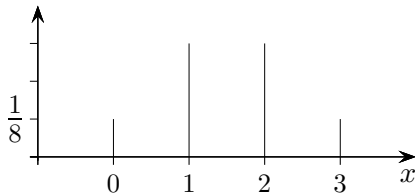
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mein Gewinn 0 (1, 2, 3) beträgt?

Da die Elementarereignisse alle die Wahrscheinlichkeit $1/8$ haben, kann die Tabelle leicht aufgestellt werden:

Gewinn	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Diese Tabelle heißt *Verteilung* der Zufallsvariablen X .

Die Verteilung einer Zufallsvariablen ist die Liste ihrer Werte mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, sie kann durch ein Streckendiagramm, ein Histogramm oder ein Glücksrad veranschaulicht werden.



Mit welchem Durchschnittsgewinn ist nun je Versuchswiederholung zu rechnen?

Dieser wichtige Wert heißt *Erwartungswert der Zufallsvariablen X*.

Nehmen wir an, es werden n Spiele gespielt. Nach der Häufigkeitsdeutung der Wahrscheinlichkeit wird der Gewinn 0 etwa $\frac{1}{8} \cdot n$, der Gewinn 1 etwa $\frac{3}{8} \cdot n$ eintreten.

Der Gesamtgewinn ist ungefähr $\frac{1}{8} \cdot n \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot n \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot n \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot n \cdot 3$

und daher ist der Durchschnittsgewinn pro Spiel: $\frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3$

Nimmt eine Zufallsvariable X die Werte x_1, x_2, \dots, x_n mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n an, so ist der Erwartungswert: $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$.

Zwei Würfel werden geworfen. X sei die geworfene Augensumme. Geben Sie die Verteilung der Zufallsvariablen X an, zeichnen Sie ein Streckendiagramm und berechnen Sie den Erwartungswert.

Erwartungswert

Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilung:

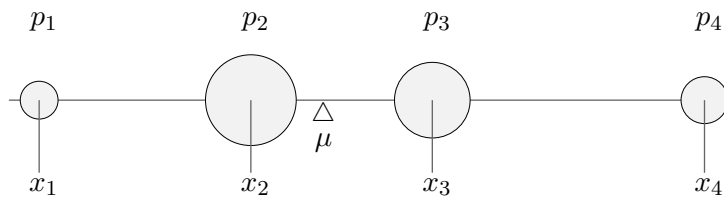
x_1	x_2	x_3	x_4
p_1	p_2	p_3	p_4

Die Verteilung kann immer als Massenverteilung gedeutet werden.

Die Gesamtmasse 1 wird auf die Punkte x_i verteilt. Dabei wird dem Punkt x_i die Masse p_i zugewiesen.

Der Schwerpunkt μ charakterisiert die Massenverteilung.

Nach dem Hebelgesetz müssen die links- und rechtsdrehenden Momente gleich sein.



$$(\mu - x_1)p_1 + (\mu - x_2)p_2 = (x_3 - \mu)p_3 + (x_4 - \mu)p_4$$

Durch Auflösen nach μ und unter Berücksichtigung von $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ folgt:

$$\mu = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$$

Zeitschriftenverkauf

Ein Zeitschriftenladen bezieht pro Woche 3 Exemplare einer wenig verlangten Fahrradzeitschrift. Pro Exemplar bezahlt der Besitzer 1,30 € und verkauft es für 2,70 €. Unverkaufte Fahrradzeitschriften entsorgt er, sobald er die neuen Exemplare erhält. Aus Erfahrung weiß er:

Nachfragen pro Woche	0	1	2	3	mehr als 3
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

Lohnt sich der Verkauf der Fahrradzeitschrift auf lange Sicht?

Ein Zeitschriftenladen bezieht pro Woche 3 Exemplare einer wenig verlangten Fahrradzeitschrift. Pro Exemplar bezahlt der Besitzer 1,30 € und verkauft es für 2,70 €. Unverkaufte Fahrradzeitschriften entsorgt er, sobald er die neuen Exemplare erhält. Aus Erfahrung weiß er:

Nachfragen pro Woche	0	1	2	3	mehr als 3
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

Lohnt sich der Verkauf der Fahrradzeitschrift auf lange Sicht?

Nachfragen pro Woche	0	1	2	3	mehr als 3
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1
Gewinn/Verlust in €	-3,90	-1,20	1,50	4,20	4,20

z. B. für eine Nachfrage: $-3 \cdot 1,30 \text{ €} + 1 \cdot 2,70 \text{ €} = -1,20 \text{ €}$

Der Erwartungswert für den Gewinn des Händlers beträgt: 0,15 €

Fahrzeiten

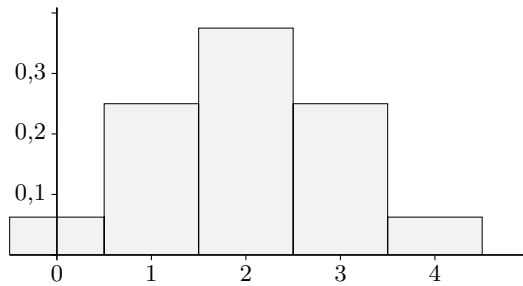
Herr A trifft auf seinem Weg zur Arbeit auf 4 unabhängig voneinander geschaltete Ampeln. Die Rot- und Grünphasen dauern jeweils 2,4 Minuten, die Gelbphase bleibt unberücksichtigt. Wenn er stets auf eine grüne Ampel trifft, benötigt er 15 Minuten zur Arbeit. Ermittle die Wahrscheinlichkeiten der durchschnittlichen Fahrzeiten, falls Herr A entweder auf 1, 2, 3 oder 4 rote Ampeln trifft. Welche Fahrzeit benötigt er im Schnitt?

Variation

Die Rotphase dauert 4 Minuten, die Grünphase 2 Minuten.

Fahrzeiten

Herr A trifft auf seinem Weg zur Arbeit auf 4 unabhängig voneinander geschaltete Ampeln. Die Rot- und Grünphasen dauern jeweils 2,4 Minuten, die Gelbphase bleibt unberücksichtigt. Wenn er stets auf eine grüne Ampel trifft, benötigt er 15 Minuten zur Arbeit. Ermittle die Wahrscheinlichkeiten der durchschnittlichen Fahrzeiten, falls Herr A entweder auf 1, 2, 3 oder 4 rote Ampeln trifft. Welche Fahrzeit benötigt er im Schnitt?



$$k \rightarrow P(X = k) = \text{binompdf}(n, p, k)$$

$$n = 4 \text{ (Ampeln)}$$

$$p = \frac{1}{2}$$

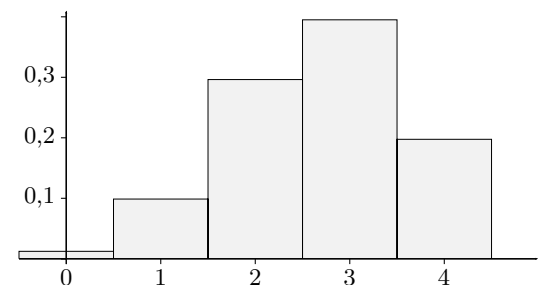
k (Anz. Ampeln)	P	Wartezeit (min)	Fahrzeit (min)
0	0,0625	0	15
1	0,2500	1,2	16,2
2	0,3750	2,4	17,4
3	0,2500	3,6	18,6
4	0,0625	4,8	19,8

durchschnittliche Fahrzeit: $0,25 \cdot 1,2 + 0,375 \cdot 2,4 + 0,25 \cdot 3,6 + 0,0625 \cdot 4,8 + 15 = 2,4 + 15 = 17,4 \text{ (min)}$
 $(= 4 \cdot 1/2 \cdot 1,2 + 15)$

Variation

Die Rotphase dauert 4 Minuten, die Grünphase 2 Minuten.

k	P	Wartezeit (min)	Fahrzeit (min)
0	0,0123	0	15
1	0,0988	2	17
2	0,2963	4	19
3	0,3951	6	21
4	0,1975	8	23



Mit der Wahrscheinlichkeit $p = 2/3$ ist eine Ampel rot.

durchschnittliche Fahrzeit: $0,0988 \cdot 2 + 0,2963 \cdot 4 + 0,3951 \cdot 6 + 0,1975 \cdot 8 + 15 = 5,33 + 15 = 20,3 \text{ (min)}$
 $(= 4 \cdot 2/3 \cdot 2 + 15)$

Eine Firma stellt Energiesparlampen her. Die Herstellungskosten für eine Lampe betragen 2,50 €. Sie wird für 5,20 € an den Einzelhandel verkauft. Erfahrungsgemäß sind 8,5 % der Lampen defekt. Defekte Lampen werden vom Einzelhandel stets entdeckt. Sie werden von der Firma zurückgenommen und der Kaufpreis wird erstattet. Für jede zurückgenommene Lampe entstehen der Firma zusätzliche Kosten in Höhe von 1,40 €.

- a) Wie hoch ist der durchschnittliche Gewinn pro Lampe für die Firma?
- b) Um den Gewinn zu steigern, will die Firma vor der Auslieferung der Lampen ein Testverfahren durchführen. Dabei werden alle intakten und 90 % aller defekten Lampen als solche erkannt. Die als defekt erkannten Lampen werden dann ohne weitere Kosten entsorgt.
Wie teuer darf der Test einer Lampe sein, damit sich das Testverfahren für die Firma lohnt?

Eine Firma stellt Energiesparlampen her. Die Herstellungskosten für eine Lampe betragen 2,50 €. Sie wird für 5,20 € an den Einzelhandel verkauft. Erfahrungsgemäß sind 8,5 % der Lampen defekt. Defekte Lampen werden vom Einzelhandel stets entdeckt. Sie werden von der Firma zurückgenommen und der Kaufpreis wird erstattet. Für jede zurückgenommene Lampe entstehen der Firma zusätzliche Kosten in Höhe von 1,40 €.

- a) Wie hoch ist der durchschnittliche Gewinn pro Lampe für die Firma?

$$D1 = (1 - 0,085) \cdot (5,2 - 2,5) - 0,085 \cdot (1,4 + 2,5) = 2,139 \text{ [€]}$$

- b) Um den Gewinn zu steigern, will die Firma vor der Auslieferung der Lampen ein Testverfahren durchführen. Dabei werden alle intakten und 90 % aller defekten Lampen als solche erkannt. Die als defekt erkannten Lampen werden dann ohne weitere Kosten entsorgt.

Wie teuer darf der Test einer Lampe sein, damit sich das Testverfahren für die Firma lohnt?

durchschnittlicher Gewinn mit kostenlosem Testverfahren

$$D2 = (1 - 0,085) \cdot (5,2 - 2,5) - (0,9 \cdot 0,085) \cdot 2,5 - 0,1 \cdot 0,085 \cdot (1,4 + 2,5) \approx 2,246 \text{ [€]}$$

$$D2 - D1 \approx 0,11 \text{ [€]}$$

Der Test einer Lampe muss weniger als 0,11 € kosten, damit sich die Einführung des Testverfahrens lohnt.

Bei einer Losbude wird damit geworben, dass jedes Los gewinnt. Die Lose und die zugehörigen Sachpreise können drei Kategorien zugeordnet werden, die mit „Donau“, „Main“ und „Lech“ bezeichnet werden. Im Lostopf befinden sich viermal so viele Lose der Kategorie „Main“ wie Lose der Kategorie „Donau“. Ein Los kostet 1 Euro. Die Inhaberin der Losbude bezahlt im Einkauf für einen Sachpreis in der Kategorie „Donau“ 8 Euro, in der Kategorie „Main“ 2 Euro und in der Kategorie „Lech“ 20 Cent. Ermitteln Sie, wie groß der Anteil der Lose der Kategorie „Donau“ sein muss, wenn die Inhaberin im Mittel einen Gewinn von 35 Cent pro Los erzielen will.

Abitur Bayern 2019

Bei einer Losbude wird damit geworben, dass jedes Los gewinnt. Die Lose und die zugehörigen Sachpreise können drei Kategorien zugeordnet werden, die mit „Donau“, „Main“ und „Lech“ bezeichnet werden. Im Lostopf befinden sich viermal so viele Lose der Kategorie „Main“ wie Lose der Kategorie „Donau“. Ein Los kostet 1 Euro. Die Inhaberin der Losbude bezahlt im Einkauf für einen Sachpreis in der Kategorie „Donau“ 8 Euro, in der Kategorie „Main“ 2 Euro und in der Kategorie „Lech“ 20 Cent. Ermitteln Sie, wie groß der Anteil der Lose der Kategorie „Donau“ sein muss, wenn die Inhaberin im Mittel einen Gewinn von 35 Cent pro Los erzielen will.

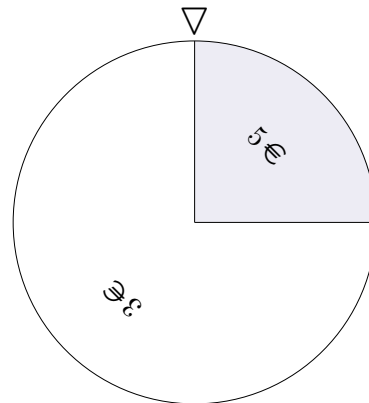
Abitur Bayern 2019

$$p \cdot (-7) + 4p \cdot (-1) + (1 - 5p) \cdot 0,8 = 0,35 \implies p = 0,03 \quad (\text{„Donau“})$$

alternativ

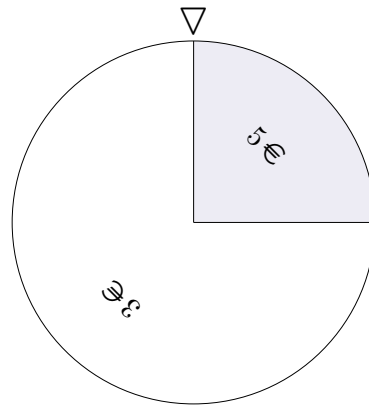
$$p \cdot 8 + 4p \cdot 2 + (1 - 5p) \cdot 0,2 = 0,65 \implies p = 0,03$$

Gewinn/Einsatz



- a) Der auszuzahlende Gewinn pro Sektor beträgt 5€ bzw. 3€.
Wie hoch ist bei diesem Glücksrad der durchschnittliche Gewinn G pro Spiel?
- b) Der Einsatz beträgt nun 4€.
Was müsste statt 5€ auf dem Glücksrad stehen, damit das Spiel fair ist?

Gewinn/Einsatz



- a) Der auszuzahlende Gewinn pro Sektor beträgt 5 € bzw. 3 €. Wie hoch ist bei diesem Glücksrad der durchschnittliche Gewinn G pro Spiel?

Gewinn	5 €	3 €
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$$G = \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{7}{2} = 3,50 \text{ (€)}$$

- b) Der Einsatz beträgt nun 4 €. Was müsste statt 5 € auf dem Glücksrad stehen, damit das Spiel fair ist?

Merke:

Immer wenn ein Einsatz zu berücksichtigen ist, sind die „Gewinne“ in Auszahlungen umzubenennen.

Von den Auszahlungen ist jeweils der Einsatz zu subtrahieren.

Gewinn	$A - 4 \text{ €}$	$3 - 4 \text{ €}$
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$$\frac{1}{4} \cdot (A - 4) + \frac{3}{4} \cdot (3 - 4) = 0, \quad A = 7,00 \text{ (€)}$$

Probe:

Gewinn	3 €	-1 €
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$$\frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{3}{4} \cdot (-1) = 0 \text{ (€)}$$