Stochastik

Startseite

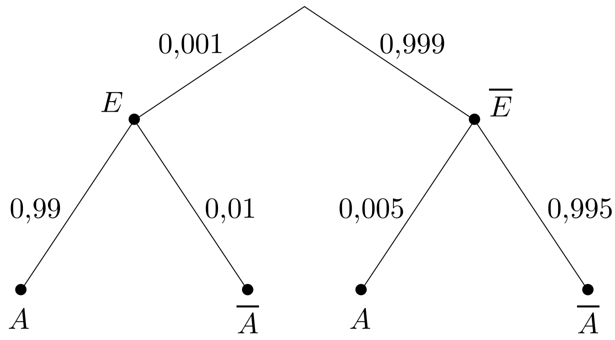
# ↑ Bedingte Wahrscheinlichkeit

In einem Laden ist eine Alarmanlage eingebaut. Bei Einbruch gibt sie mit 99 %-iger Wahrscheinlichkeit Alarm. Wenn in einer bestimmten Nacht kein Einbruch stattfindet, gibt sie falschen Alarm mit Wahrscheinlichkeit 0,005 (Eine Maus berührt die Anlage oder ähnliches). Die Einbruchswahrscheinlichkeit für eine Nacht sei 0,001. Die Anlage hat gerade Alarm gegeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass gerade ein Einbruch stattfindet?

Wir stellen den zugehörigen Baum auf:

Es bedeuten:

| | |
|---|---|
| $E$ | Einbruch |
| $\overline{E}$ | kein Einbruch |
| $A$ | Alarm |
| $\overline{A}$ | kein Alarm |




Die Menge aller Elementarereignisse beinhaltet alle Pfade.

$\Omega = \{(E,\overline{A});\ (E,A);\ (\overline{E},A);\ (\overline{E},\overline{A})\}$

Da wir aber davon ausgehen, dass ein Alarm vorliegt, sind nur die Pfade $(E,A)$ und $(\overline{E},A)$ zu berücksichtigen. Um die Wahrscheinlichkeit für einen Einbruch zu bestimmen, falls Alarm vorliegt, müssen wir uns fragen, wie groß bei $n$-maliger Wiederholung des Versuchs die Anzahl des Pfads $(E,A)$ im Verhältnis zur Summe der Anzahlen der Pfade $(E,A)$ und $(\overline{E},A)$ ist.

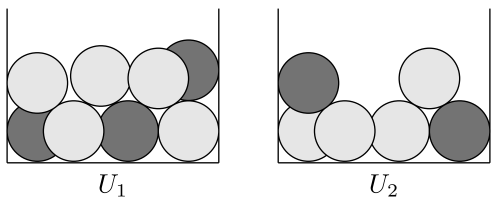
Die Pfade $(E,A)$ und $(\overline{E},A)$ werden mit der Häufigkeit $0{,}001 \cdot 0{,}99n + 0{,}999 \cdot 0{,}005n$ eingeschlagen, der Pfad $(E,A)$ nur $0{,}001 \cdot 0{,}99n$ mal.

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich $\quad P = \dfrac{0{,}001 \cdot 0{,}99}{0{,}001 \cdot 0{,}99 + 0{,}999 \cdot 0{,}005} = 0{,}1654$ ($n$ gekürzt)

Diese Wahrscheinlichkeit heißt *bedingte Wahrscheinlichkeit von E unter der Bedingung A, wir schreiben hierfür:* $P(E \mid A)$.

1. Ein Angler pflegt sonntagsmorgens einen von drei Seen $A$, $B$ und $C$ zufällig auszuwählen, um eine Stunde zu angeln. Die Wahrscheinlichkeit, dass er etwas fängt, beträgt bei $A$ 2/3, bei $B$ 3/4 und bei $C$ 4/5. In der Nähe des Sees $B$ ist eine Gastwirtschaft mit einer attraktiven Wirtin. Darum sieht es die Ehefrau des Anglers nicht gern, wenn er in diesem See angelt. Eines Sonntagsmorgen ruft der Angler seine Frau an und berichtet, dass er etwas gefangen hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in $B$ geangelt hat?

2. Eine der Urnen $U_1$, $U_2$ wird ausgelost und aus der gewählten Urne wird eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen? Angenommen, eine gezogene Kugel ist schwarz. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie aus $U_1$?




3. Angenommen, es gibt einen sehr zuverlässigen Test zur Krebsdiagnose. Dieser Test ist mit 96 %-Sicherheit positiv, falls eine Krebserkrankung vorliegt; falls keine vorliegt, ist der Test mit 94 %-Sicherheit negativ. Ich unterziehe mich dem Test und der Test ist positiv. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich Krebs habe (1/145 aller Personen meines Alters haben Krebs)?

# ↑ Bedingte Wahrscheinlichkeit

Medizinische Tests sind grundsätzlich mit zwei Fehlern behaftet:

1. Erkrankte werden als gesund,
2. Gesunde als krank eingestuft.

Der 1. Fehler wird üblicherweise (nicht nur von Test-Entwicklern) in der Angabe versteckt, dass der Test z. B. mit 80 %-iger Sicherheit die Krankheit bei Erkrankten erkennt. Bei Gesunden versagt der Test z. B. mit 2 %-iger Wahrscheinlichkeit, d. h. 2 % der Gesunden werden vom Test irrtümlich als krank eingestuft.

Von besonderer Bedeutung ist nun die Frage:

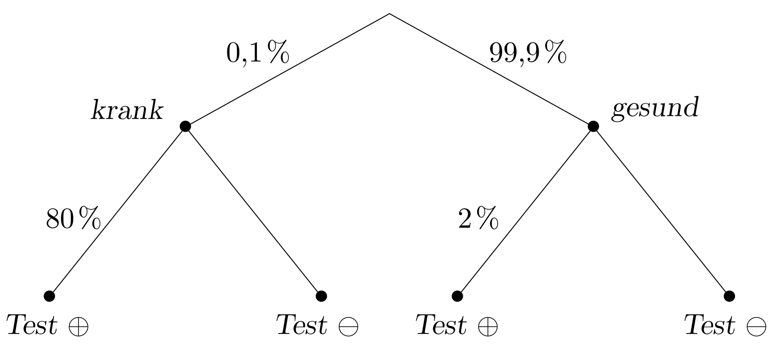
Angenommen, eine Person wird getestet und das Ergebnis ist positiv (das ist eine etwas gewöhnungsbedürftige Sprechweise, dass der Test auf eine Krankheit hinweist, wenn z. B. ein Virus entdeckt wurde). Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die getestete Person nun tatsächlich erkrankt?

Um diese Frage beantworten zu können, ist es erforderlich zu wissen, wie groß der Anteil der Erkrankten in der Bevölkerung ist. Nehmen wir daher an, es seien 0,1 %, die erkrankt sind.

Um uns die Situation vor Augen zu führen, betrachten wir statt relativer Häufigkeiten konkrete Anzahlen und gehen daher von einer Bevölkerungszahl von 100 000 aus. Die absoluten Häufigkeiten können übersichtlich in eine Vier-Felder-Tafel eingetragen werden.

| | *krank* | *gesund* | |
|---|---|---|---|
| *Test* ⊕ | 80 | 1998 | 2078 |
| *Test* ⊖ | 20 | 97 902 | 97 922 |
| | 100 | 99 900 | 100 000 |

Der Anteil der Erkrankten unter den Test-Positiven beträgt lediglich: $\frac{80}{2078} = 3{,}8\,\%$.




Mit dem Pfaddiagramm ergibt sich: $P(krank \mid \oplus) = \dfrac{0{,}1\,\% \cdot 80\,\%}{0{,}1\,\% \cdot 80\,\% \; + \; 99{,}9\,\% \cdot 2\,\%} = 3{,}8\,\%$

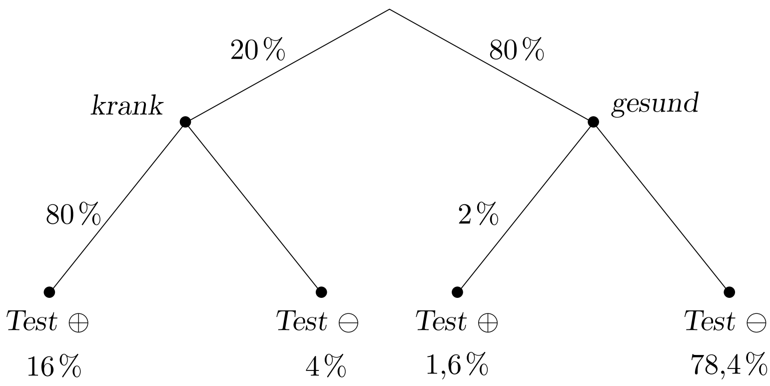
# ↑ Bedingte Wahrscheinlichkeit

Nehmen wir an, dass die zu testende Person einer Risikogruppe angehört (z. B. wegen ungesunder Ernährung, Alter über 50), in der die Wahrscheinlichkeit zu erkranken 20 % (15 %, 10 %, 5 %, 1 %) beträgt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die getestete Person nun tatsächlich erkrankt, falls das Testergebnis positiv ist?

Für eine Gruppengröße von 500 ergibt dies:

| | *krank* | *gesund* | |
|---|---|---|---|
| *Test* ⊕ | 80 | 8 | 88 |
| *Test* ⊖ | 20 | 392 | 412 |
| | 100 | 400 | 500 |

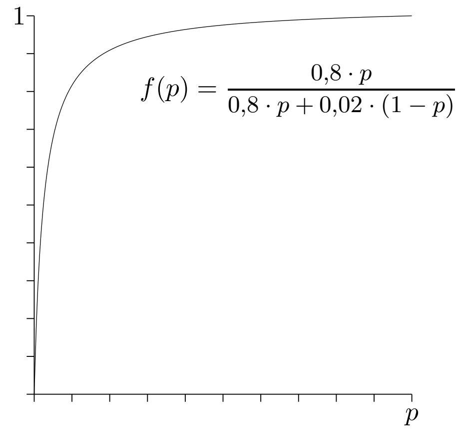
Der Anteil der Erkrankten unter den Test-Positiven erhöht sich auf: $\frac{80}{88} = 90{,}9\,\%$.




Mit dem Pfaddiagramm erhalten wir:

$$P(krank \mid \oplus) = \frac{20\,\% \cdot 80\,\%}{20\,\% \cdot 80\,\% \; + \; 80\,\% \cdot 2\,\%} = 90{,}9\,\%$$

Interpretiere die Grafik:

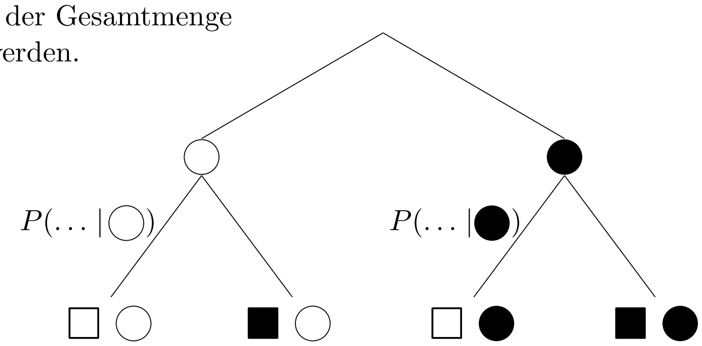


# ↑ Baumdiagramm  Umkehrung

Bei 2 Merkmalen mit jeweils 2 Ausprägungen gibt es 4 Kombinationsmöglichkeiten für die absoluten bzw. relativen Häufigkeiten.

| | ○ | ● | *Summe* |
|---|---|---|---|
| □ | □ ○ | □ ● | |
| ■ | ■ ○ | ■ ● | |
| *Summe* | | | *Gesamtsumme* |

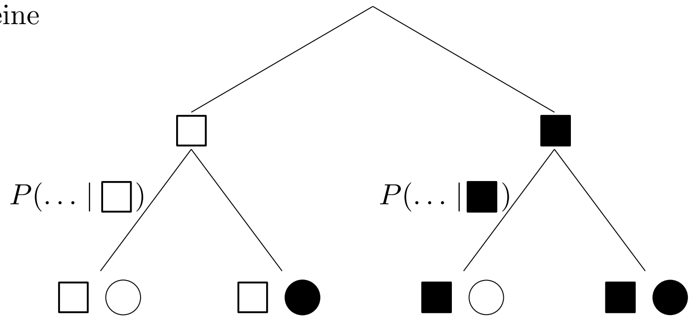
Mit einer Vier-Felder-Tafel können Anteile an der Gesamtmenge auf Anteile an einer Teilmenge umgerechnet werden.




Vorgegebene Anteile an einer bestimmten Ausprägungsmenge wie z. B. $P(\ldots \mid ○)$ können direkt in ein Baumdiagramm übernommen werden.

| | ○ | ● | *Summe* |
|---|---|---|---|
| □ | □ ○ | □ ● | |
| ■ | ■ ○ | ■ ● | |
| *Summe* | | | *Gesamtsumme* |

Bei der bedingten Wahrscheinlichkeit wird der Bezug zur Ausprägungsmenge gewechselt. Es erfolgt eine sogenannte Umkehrung des Baumdiagramms.



Ein Gymnasium hat einen 60 %igen Jungenanteil.
Unter den Schülerinnen rauchen 15 %, insgesamt rauchen von den Schülern und Schülerinnen 10 %.

a) Wie groß ist der Anteil rauchender Mädchen an der Schule?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine beliebig herausgegriffene

   i) rauchende Person weiblich,

   ii) rauchende Person männlich,

   iii) männliche Person ein Raucher?

a) 6 %

b) i) 60 %

   ii) 40 %

   iii) 6,7 %

In der Bundesrepublik wurden in den Jahren um 2000 jährlich etwa 480000 Rinder geschlachtet. Jährlich gab es 500 BSE-Fälle. Alle geschlachteten Rinder werden mit einem Schnelltest untersucht. Dieser Schnelltest identifiziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % die erkrankten Rinder korrekt, er gibt aber auch in 3 % der Fälle gesunde Rinder als BSE-erkrankt aus.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rind, das positiv getestet wurde, auch wirklich krank ist.

b) Sei nun der Anteil $p$ der an BSE erkrankten Rinder variabel.
Stellen Sie die Wahrscheinlichkeit $f(p)$, dass ein Rind, das positiv getestet wurde, auch wirklich krank ist, grafisch dar.

c) Ermitteln Sie $p^*$ für $f(p^*) = 0{,}4$ und erläutern Sie dies im Sachzusammenhang.

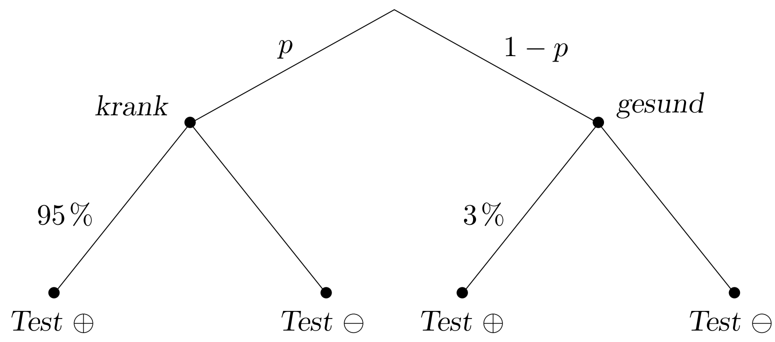
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 10000 Rindern mit einem BSE-Anteil von $\frac{1}{960}$ höchstens 12 und mindestens 8 Krankheitsfälle vorliegen?

Ermitteln Sie (das größte) $k$, so dass gilt: $P(X \leq k) \leq 90\,\%$

In der Bundesrepublik wurden in den Jahren um 2000 jährlich etwa 480000 Rinder geschlachtet. Jährlich gab es 500 BSE-Fälle. Alle geschlachteten Rinder werden mit einem Schnelltest untersucht. Dieser Schnelltest identifiziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % die erkrankten Rinder korrekt, er gibt aber auch in 3 % der Fälle gesunde Rinder als BSE-erkrankt aus.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rind, das positiv getestet wurde, auch wirklich krank ist.

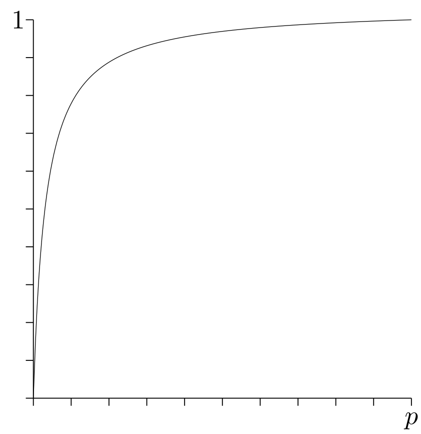
$$p = \frac{500}{480000} = \frac{1}{960}$$




$$P(krank \mid \oplus) = 3{,}2\,\%$$

b) Sei nun der Anteil $p$ der an BSE erkrankten Rinder variabel.
Stellen Sie die Wahrscheinlichkeit $f(p)$, dass ein Rind, das positiv getestet wurde, auch wirklich krank ist, grafisch dar.

$$f(p) = \frac{0{,}95 \cdot p}{0{,}95 \cdot p + 0{,}03 \cdot (1-p)}$$




c) Ermitteln Sie $p^*$ für $f(p^*) = 0{,}4$ und erläutern Sie dies im Sachzusammenhang. $p^* = 2{,}1\,\%$

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 10000 Rindern mit einem BSE-Anteil von $\frac{1}{960}$ höchstens 12 und mindestens 8 Krankheitsfälle vorliegen?

Binomialverteilung: $P(8 \le X \le 12) = 56{,}6\,\%$

Normalverteilung mit Stetigkeitskorrektur: $P(7{,}5 \le X \le 12{,}5) = 55{,}8\,\%$

Normalverteilung: $P(8 \le X \le 12) = 46{,}1\,\%$

Ermitteln Sie (das größte) $k$, so dass gilt: $P(X \le k) \le 90\,\%$ $k = 14(,5)$

1. 16% der 6,63 Millionen Eintragungen im Verkehrssünder-Register in Flensburg haben den Grund Fahren unter Alkohol. 92% der Personen, die beim Fahren unter Alkohol ertappt wurden, waren Männer. Bei den übrigen Eintragungen beträgt der Anteil der Männer 80%.
   Wie groß ist der Anteil der Frauen unter den Verkehrssündern?

2. Bei einem Einstellungstermin für den Polizeidienst waren 40% der Bewerber Frauen, von denen 90% die Aufnahmeprüfung bestanden. Drei Viertel derjenigen, die scheiterten, waren männlich. Welcher Anteil der männlichen Teilnehmer hat die Aufnahmeprüfung bestanden (aus Abiturprüfung Bayern LK 2003)?

3. Auf dem Gebiet der Gemeinde Windstätt soll ein Windpark zur Stromerzeugung errichtet werden. Die Gegner des Projekts befürchten eine Beeinträchtigung des Fremdenverkehrs und sammeln Unterschriften für ein Bürgerbegehren.
   Um den Ausgang des beantragten Bürgerentscheids zu prognostizieren, führte das Windstätter Tagblatt eine Umfrage unter 1200 wahlberechtigten Bürgern durch. Dabei sprachen sich 504 gegen das Projekt aus, während die übrigen 696 für die Errichtung des Windparks waren.
   Beim schließlich durchgeführten Bürgerentscheid lag die Wahlbeteiligung bei 35%. Es stimmten 51% gegen das Windparkprojekt, ungültige Stimmen gab es nicht. Wenn man davon ausgeht, dass die Umfrage die Mehrheitsverhältnisse in Windstätt exakt wiedergibt, kann dieses Ergebnis durch einen unterschiedlichen Mobilisierungsgrad der Gegner und Befürworter erklärt werden.
   Welcher Prozentsatz der Gegner und welcher Prozentsatz der Befürworter ist demnach zur Abstimmung gegangen (aus Abiturprüfung Bayern LK 2004)?

*Lösungen:*

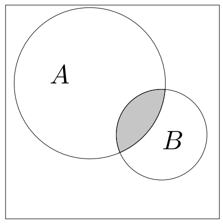
1. 18,1%
2. 80,0%
3. 42,5% der Gegner,
   29,6% der Befürworter gingen zur Abstimmung.

# ↑ Bedingte Wahrscheinlichkeit

Nach Laplace 1812, jedoch schon um 1700 von Jakob Bernoulli entdeckt, gilt:

$$P(A) = \frac{\textit{Anzahl der Möglichkeiten, die } A \textit{ festlegen}}{\textit{Anzahl aller Möglichkeiten}}$$

Bei geometrischen Wahrscheinlichkeiten tritt an Stelle von *Anzahl der Möglichkeiten* ein *Flächeninhalt*.




$A \cap B$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A$ ändert sich (möglicherweise), falls wir voraussetzen können, dass das Ereignis $B$ eingetreten ist:

$$P(A\,|\,B) = \frac{\textit{Anzahl der Möglichkeiten, die zu } A \textit{ und } B \textit{ gehören}}{\textit{Anzahl der Möglichkeiten, die } B \textit{ festlegen}}$$

Umgeformt:

$$P(A\,|\,B) = \frac{\dfrac{\textit{Anzahl der Möglichkeiten, die zu } A \textit{ und } B \textit{ gehören}}{\textit{Anzahl aller Möglichkeiten}}}{\dfrac{\textit{Anzahl der Möglichkeiten, die } B \textit{ festlegen}}{\textit{Anzahl aller Möglichkeiten}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Die Ereignisse $A$ und $B$ sind voneinander unabhängig, falls gilt:

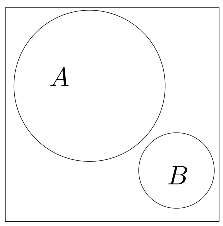
$$P(A\,|\,B) = P(A)$$

Dann folgt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

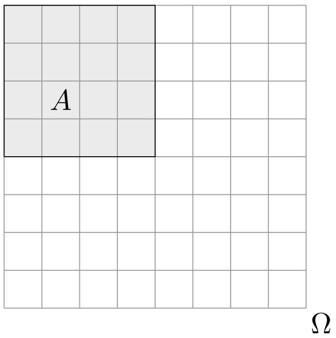
Nur im Falle disjunkter (nicht überlappender) Ereignisse

gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



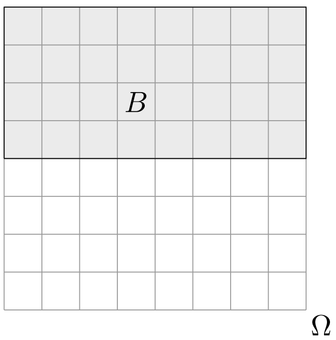

$A \cap B = \emptyset$

# ↑ Bedingte Wahrscheinlichkeit

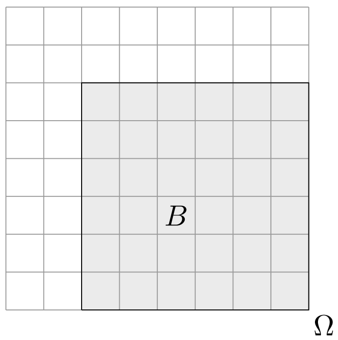



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit von $A$, falls bekannt ist, dass $B$ eingetreten ist?

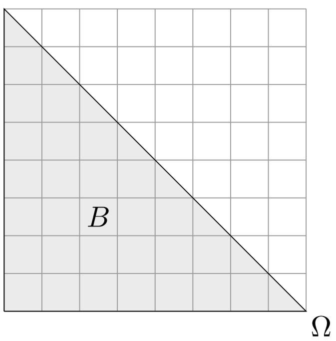
a)



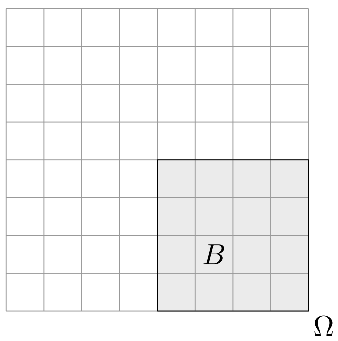

b)



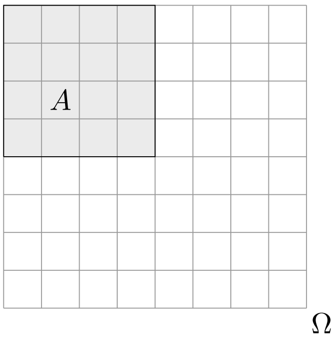

c)




d)



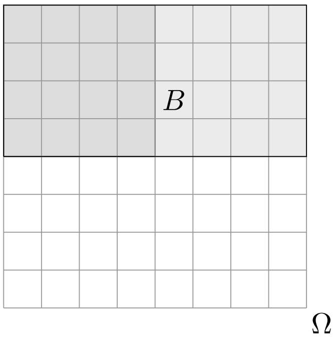
# ↑ Bedingte Wahrscheinlichkeit




$P(A) = \frac{1}{4}$

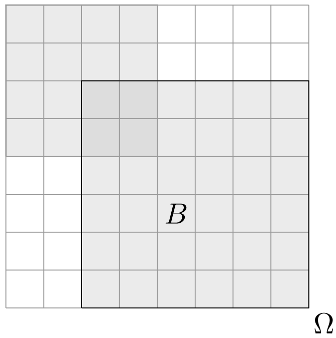
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit von $A$, falls bekannt ist, dass $B$ eingetreten ist?

a)



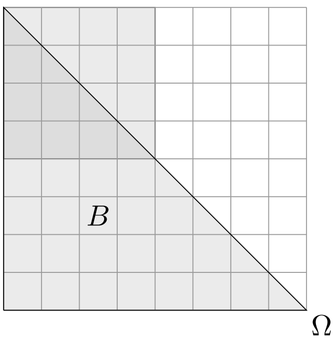

$P(A\,|\,B) = \frac{1}{2}$

b)



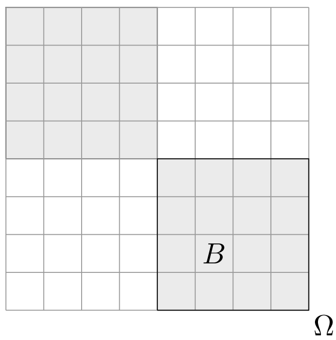

$P(A\,|\,B) = \frac{1}{9}$

c)




$P(A\,|\,B) = \frac{1}{4}$

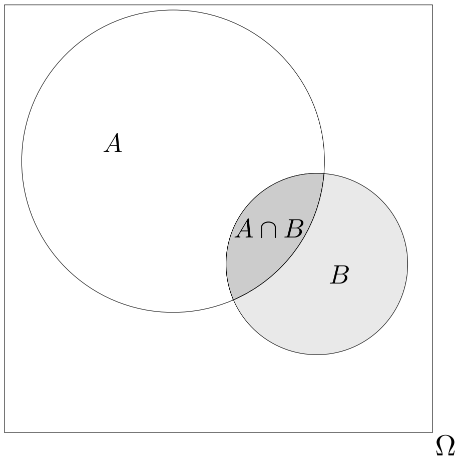
d)




$P(A\,|\,B) = 0$

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

# ↑ Bedingte Wahrscheinlichkeit

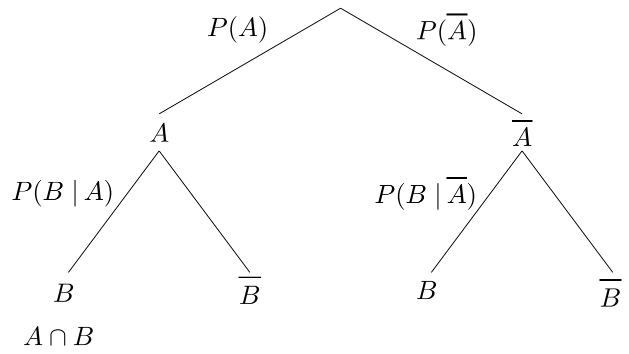



$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad = P_B(A) = P_B(A \cap B)$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A\,|\,B)$ kann als Neueinschätzung der Wahrscheinlichkeit von $A$ interpretiert werden, wenn die Information vorliegt, dass das Ereignis $B$ bereits eingetreten ist. Dann ist von $A$ nur noch derjenige Teil zu berücksichtigen, der sich in $B$ abspielt, also $A \cap B$, und dieser Teil ist in Bezug zu $B$ zu bringen. Das bewirkt, dass $P_B(B) = 1$ ist.

In der Grafik ist $P(A\,|\,B)$ der Anteil der dunkelgrau gefärbten Fläche an der Fläche von $B$.

# ↑ Bedingte Wahrscheinlichkeit




$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

wird auf das Pfaddiagramm angewandt: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})}$

# ↑ Schubladenschrank

In einem Schrank mit 9 Schubladen liegt mit 70 %iger Wahrscheinlichkeit eine Kugel. Ich öffne die ersten 8 Schubladen und sie sind leer. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel in der 9. Schublade liegt?

# ↑ Schubladenschrank

In einem Schrank mit 9 Schubladen liegt mit 70 %iger Wahrscheinlichkeit eine Kugel. Ich öffne die ersten 8 Schubladen und sie sind leer. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel in der 9. Schublade liegt?

Wir richten unseren Blick auf die elementaren 18 Ereignisse:
Schublade $n$ enthält die Kugel, Schublade $n$ ist leer, $n = 1, \dots, 9$, und ihre Wahrscheinlichkeiten:

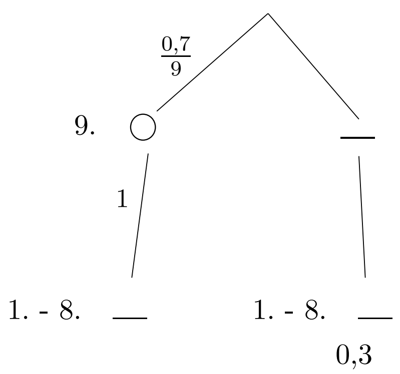
| | $P = \frac{0{,}7}{9}$ | $\frac{0{,}3}{9}$ | |
|---|---|---|---|
| 1. | ○ | — | |
| 2. | ○ | — | |
| 3. | ○ | — | |
| 4. | ○ | — | |
| 5. | ○ | — | $A$ |
| 6. | ○ | — | |
| 7. | ○ | — | |
| 8. | ○ | — | |
| 9. | ○ | — | |

Mit dem Wissen über die leeren Schubladen kann die Menge $\Omega$ der elementaren Ereignisse verkleinert werden, wir betrachten also die Teilmenge $A$ des Wahrscheinlichkeitsraumes.

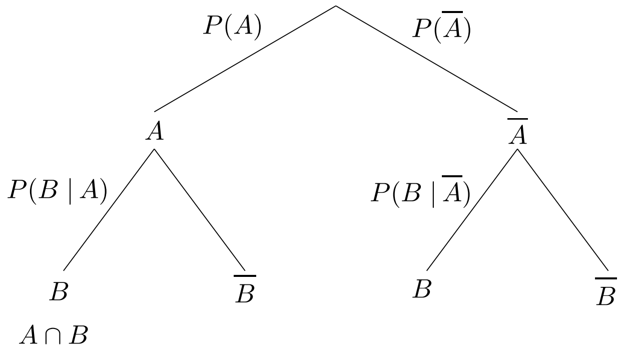
Es gilt nun $P(A) = 1$ und für jedes Ereignis $B$: $\quad P(B \mid A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$

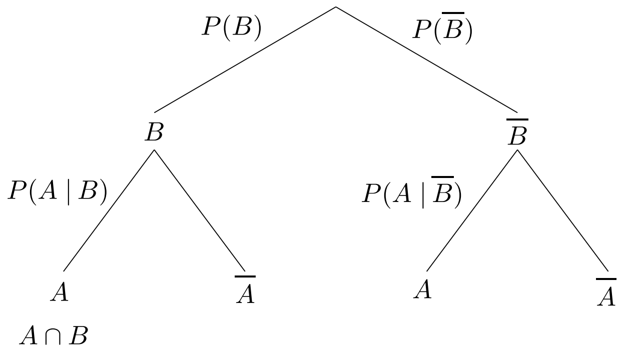
In unserem Fall daher: $\quad P = \dfrac{\frac{0{,}7}{9}}{0{,}3 + \frac{0{,}7}{9}} = 20{,}6\,\%$

Dieses Ergebnis entnehmen wir auch mit der gewohnten Rechnung für bedingte Wahrscheinlichkeiten dem reduzierten Baumdiagramm:



# ↑ Bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$




Der zweistufige Prozess wird auch durch das umgekehrte Baumdiagramm dargestellt.

Es gilt:

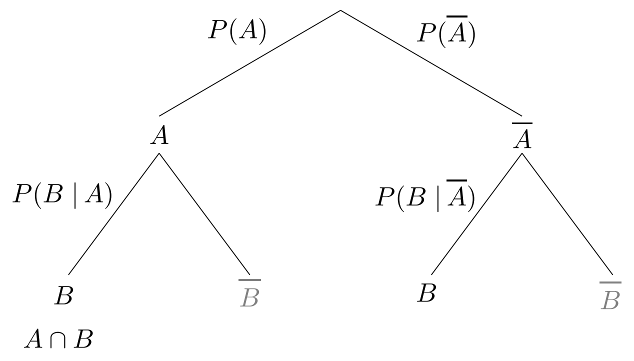
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= ? \\ P(A \cap B) &= ? \\ P(B) &= ? \end{aligned}$$

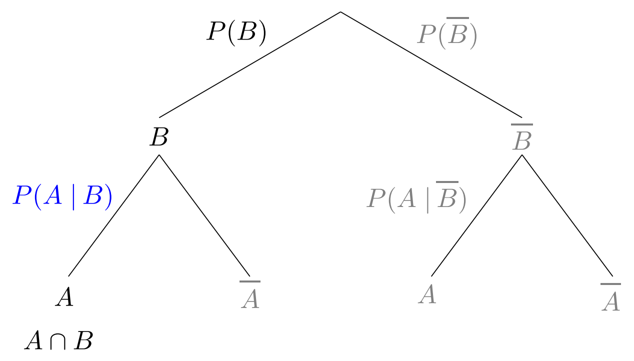
Daraus folgt:

$$P(A \mid B) = ?$$

Die in dieser Formel benötigten Wahrscheinlichkeiten sind alle im 1. Diagramm enthalten.

# ↑ Bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$




Der zweistufige Prozess wird auch durch das umgekehrte Baumdiagramm dargestellt.

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A \mid B) && \text{2. Diagramm}\\
P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B \mid A) && \text{1. Diagramm}\\
P(B) &= P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A}) && \text{1. Diagramm}
\end{aligned}
$$

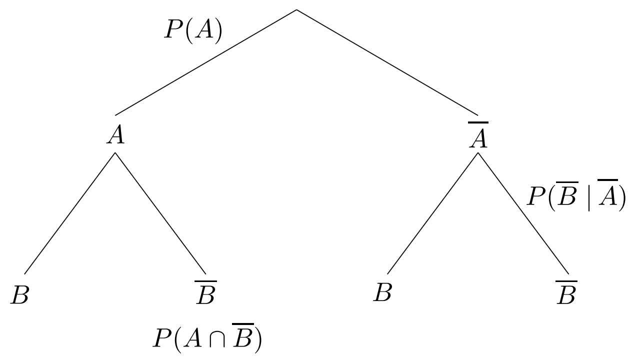
Daraus folgt:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})}$$

Die in dieser Formel benötigten Wahrscheinlichkeiten sind alle im 1. Diagramm enthalten.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten sind stets die Wahrscheinlichkeiten der 2. Stufe des Baumdiagramms, bzw. dessen Umkehrung.

# ↑ Aufgabe




Gegeben $P(A)$

$P(A \cap \overline{B})$

$P(\overline{B} \mid \overline{A})$

Gesucht $P(A \cap B)$

$P(A \mid B)$

Erläutere die Vorgehensweise.

Wie wird die Aufgabe mit der Vier-Felder-Tafel gelöst?

| | $B$ | $\overline{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | | | |
| $\overline{A}$ | | | |
| | | | |

Beachte:

$$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} \quad \Longrightarrow \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B} \mid \overline{A}) \cdot P(\overline{A})$$

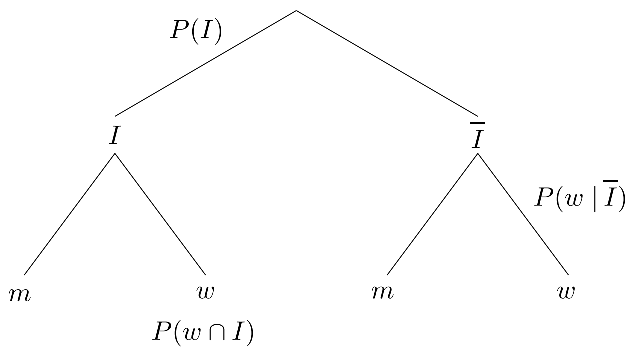
Aus einer Studie (2015) geht hervor, dass in Deutschland 25 % der Jugendlichen (I-Nutzer) das Internet überwiegend zur Informationsbeschaffung nutzen.
Der Anteil der weiblichen I-Nutzer unter den Jugendlichen beträgt 15,3 %.
Unter den Jugendlichen, die das Internet überwiegend zu anderen Zwecken nutzen, beträgt der Anteil der weiblichen Jugendlichen 47,3 %.
Ermitteln Sie den Anteil

- der männlichen I-Nutzer unter den Jugendlichen,
- der I-Nutzer unter den männlichen Jugendlichen.

↑

Aus einer Studie (2015) geht hervor, dass in Deutschland 25 % der Jugendlichen (I-Nutzer) das Internet überwiegend zur Informationsbeschaffung nutzen.
Der Anteil der weiblichen I-Nutzer unter den Jugendlichen beträgt 15,3 %.
Unter den Jugendlichen, die das Internet überwiegend zu anderen Zwecken nutzen, beträgt der Anteil der weiblichen Jugendlichen 47,3 %.
Ermitteln Sie den Anteil

- der männlichen I-Nutzer unter den Jugendlichen,
- der I-Nutzer unter den männlichen Jugendlichen.




$P(I \cap m) = 9{,}7\,\%$

$P(I \mid m) = 19{,}7\,\%$

| | $m$ | $w$ | |
|---|---|---|---|
| $I$ | 9,7 % | | 25 % |
| $\overline{I}$ | | 35,5 % | |
| | | | |

$P(w \mid \overline{I}) = 47{,}3\,\%$ (siehe Aufgabe)

$$P(w \mid \overline{I}) = \frac{P(\overline{I} \cap w)}{P(\overline{I})} \quad \Longrightarrow \quad P(\overline{I} \cap w) = P(w \mid \overline{I}) \cdot P(\overline{I}) = 35{,}5\,\%$$

Gegebene bedingte Wahrscheinlichkeiten sind für die Vier-Felder-Tafel in dieser Weise umzurechnen.

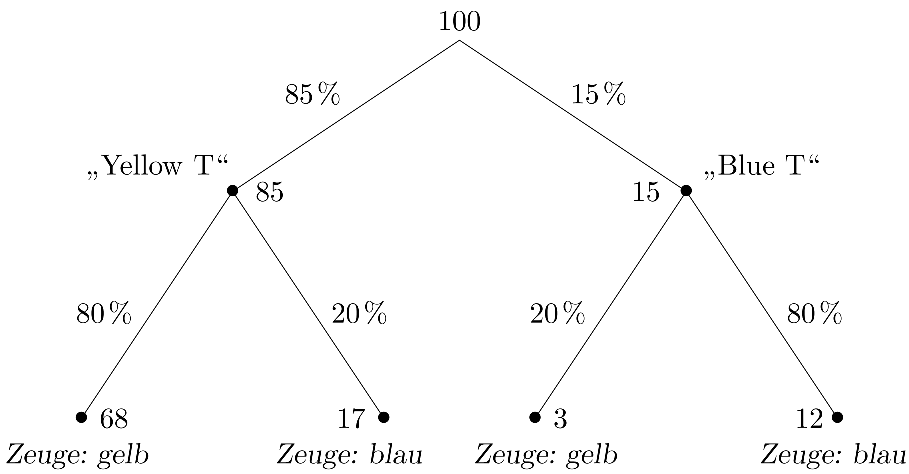
# ↑ Gelbe und blaue Taxen

In einer Stadt existieren zwei konkurrierende Taxi-Unternehmen. Die Taxen des ersten Unternehmens „Yellow T“ sind gelb, die des zweiten Unternehmens „Blue T“ dagegen blau.

Ein Taxi verursacht einen Verkehrsunfall, der Fahrer begeht Fahrerflucht.
Ein Zeuge - der Einzige - gibt an, in der Dämmerung ein blaues Taxi erkannt zu haben.
Eine bewusste Falschaussage kann ausgeschlossen werden.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fahrer dem Unternehmen „Blue T“ angehört?

Um diese zu ermitteln, führen die Kriminalbeamten mit dem Zeugen einen Test durch.
Es werden ihm Farbbeispiele vorgeführt, an die er sich später erinnern soll.
Dem Zeugen gelingt es, 80 % der Farbbeispiele richtig zuzuordnen.
Lässt sich daraus nun der Schluss ziehen, dass auch die Beschreibung des Unfallwagens mit 80 %iger Sicherheit korrekt ist?

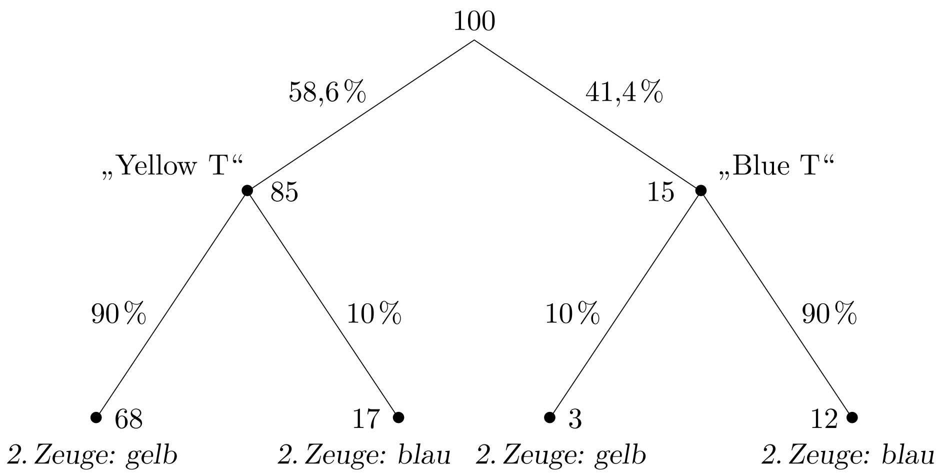
Der Marktanteil von „Yellow T“ liegt bei 85 %, den restlichen Marktanteil hält „Blue T“.
Ist diese Information für die Fragestellung relevant?




An den absoluten Zahlen ist zu erkennen, welche Bedeutung die Zeugenaussage hat.
17mal wäre die Zeugenaussage *blau* falsch, 12mal zutreffend.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Unfalltaxi tatsächlich blau gewesen ist, beträgt
$P($„Blue T“$\,|\,$*Zeuge: blau*$\,) = 41{,}4\,\%$. Ohne die Zeugenaussage wären es $15\,\%$.
Gelänge dem Zeugen eine $90\,\%$ige korrekte Farbzuordnung, wäre die Wahrscheinlichkeit $61{,}4\,\%$.

Den Berechnungen liegt die Annahme zugrunde, dass das Fahrverhalten aller Fahrer (*gelb*, *blau*) ähnlich ist, der Marktanteil also Auskunft über die Wahrscheinlichkeit gibt, an einem Unfall beteiligt zu sein.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Unfalltaxi tatsächlich blau gewesen ist, wenn dies auch ein weiterer Zeuge mit $90\,\%$iger korrekter Farbzuordnung aussagt?



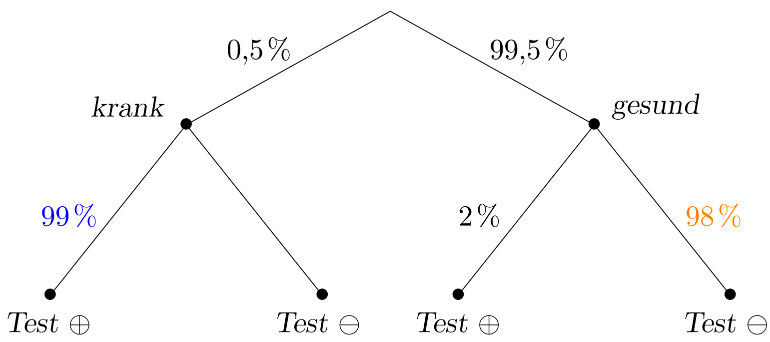

$P($„Blue T“ | *auch 2. Zeuge: blau* $) = 86{,}4\,\%$.

Das Ergebnis hängt natürlich nicht von der Reihenfolge der Zeugenaussagen ab.

Weisen mehrere medizinische Tests auf eine Krankheit hin, wird man entsprechend vorgehen, um die Situation zu bewerten.

Eine Krankheit komme bei etwa 0,5 % der Bevölkerung vor. Ein Test zur Auffindung der Krankheit führt bei 99 % der Kranken zu einer Reaktion (Sensitivität des Tests), bei 98 % der Gesunden zu keiner Reaktion ( Spezifität). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, bei der die Reaktion eintritt, die Krankheit tatsächlich hat?

Eine Krankheit komme bei etwa 0,5 % der Bevölkerung vor. Ein Test zur Auffindung der Krankheit führt bei 99 % der Kranken zu einer Reaktion (Sensitivität des Tests), bei 98 % der Gesunden zu keiner Reaktion ( Spezifität). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, bei der die Reaktion eintritt, die Krankheit tatsächlich hat?




Mit dem Pfaddiagramm ergibt sich: $P(krank \mid \oplus) = \dfrac{0{,}5\,\% \cdot 99\,\%}{0{,}5\,\% \cdot 99\,\% \; + \; 99{,}5\,\% \cdot 2\,\%} = 19{,}9\,\%$

Der Test wird wiederholt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person, bei der die Reaktion

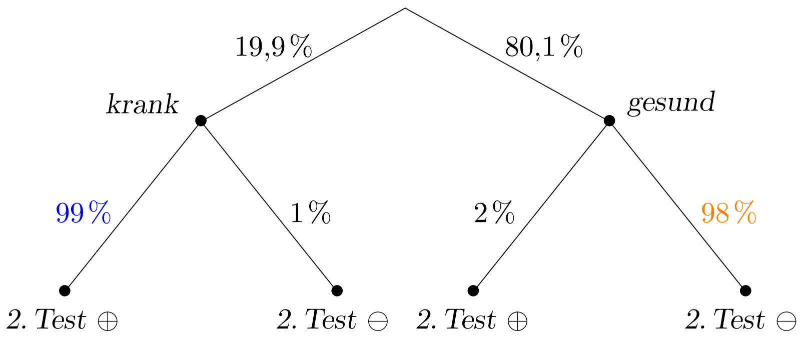
a) erneut
b) nur beim 1. Test

eintritt, in Wirklichkeit krank ist?

Der Test wird wiederholt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person, bei der die Reaktion

a) erneut
b) nur beim 1. Test

eintritt, in Wirklichkeit krank ist?




a) $P(krank \mid auch\ 2.\ Test \oplus) = \dfrac{19{,}9\,\% \cdot 99\,\%}{19{,}9\,\% \cdot 99\,\% \;+\; 80{,}1\,\% \cdot 2\,\%} = 92{,}5\,\%$

b) $P(krank \mid nur\ im\ 1.\ Test \oplus) = \dfrac{19{,}9\,\% \cdot 1\,\%}{19{,}9\,\% \cdot 1\,\% \;+\; 80{,}1\,\% \cdot 98\,\%} = 0{,}3\,\%$

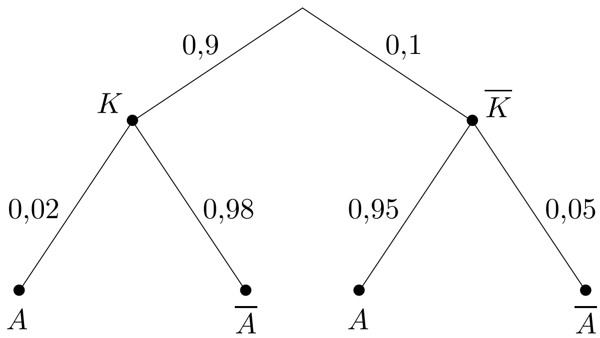
Alternative Bearbeitung siehe: Tischtennisbälle

Eine Firma sortiert Nüsse und verarbeitet sie weiter. Dabei wird zwischen Nüssen mit verwertbaren Kernen und Nüssen ohne verwertbare Kerne unterschieden. Die nicht ausgesonderten Nüsse werden im Folgenden kurz als „brauchbare“ Nüsse bezeichnet.
Gehen Sie bei den Berechnungen davon aus, dass 10 % der angelieferten Nüsse ohne verwertbare Kerne sind. Eine Maschine sondert mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}95$ Nüsse ohne verwertbare Kerne aus. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $q = 0{,}02$ werden jedoch auch Nüsse mit verwertbaren Kernen ausgesondert. Zeichnen Sie ein zugehöriges Baumdiagramm.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse:

- $E_1$: Eine Nuss hat einen verwertbaren Kern und wird nicht ausgesondert.
- $E_2$: Eine „brauchbare“, also nicht ausgesonderte Nuss enthält einen verwertbaren Kern.

Eine Firma sortiert Nüsse und verarbeitet sie weiter. Dabei wird zwischen Nüssen mit verwertbaren Kernen und Nüssen ohne verwertbare Kerne unterschieden. Die nicht ausgesonderten Nüsse werden im Folgenden kurz als „brauchbare“ Nüsse bezeichnet.
Gehen Sie bei den Berechnungen davon aus, dass 10 % der angelieferten Nüsse ohne verwertbare Kerne sind. Eine Maschine sondert mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}95$ Nüsse ohne verwertbare Kerne aus. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $q = 0{,}02$ werden jedoch auch Nüsse mit verwertbaren Kernen ausgesondert. Zeichnen Sie ein zugehöriges Baumdiagramm.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse:

- $E_1$: Eine Nuss hat einen verwertbaren Kern und wird nicht ausgesondert.
- $E_2$: Eine „brauchbare“, also nicht ausgesonderte Nuss enthält einen verwertbaren Kern.




$K$ mit verwertbarem Kern

$A$ ausgesondert

$P(E_1) = P(K \cap \overline{A}) = 0{,}882$

$P(E_2) = P(K \mid \overline{A}) = 0{,}994$

Mit $P(E_1)$ ist $P(K \cap \overline{A})$ gemeint und nicht $P(\overline{A} \mid K)$.
Die Fragestellung ist dem Abitur Ni eA 2012 entnommen.

# ↑ Tischtennisbälle Ni 2022 gA

Ein Unternehmen stellt Tischtennisbälle her. 98 % der hergestellten Bälle weichen nur unwesentlich von der Kugelform ab; diese werden im Weiteren als „rund“ bezeichnet, die übrigen als „unrund“.
Nach der Herstellung durchlaufen die Bälle eine Sortieranlage. Dabei wird ein unrunder Ball mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % aussortiert. Allerdings werden auch 5 % der runden Bälle aussortiert. Angenommen, die nicht aussortierten Bälle würden die gleiche Sortieranlage ein zweites Mal durchlaufen.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein nach zweimaligem Durchlaufen der Anlage zufällig ausgewählter Ball unrund ist und nicht aussortiert wird.

b) Berechnen Sie den Anteil der unrunden Bälle unter denjenigen, die dann nach zweimaligem Durchlaufen der Anlage nicht aussortiert würden.

c) (falls die Binomialverteilung thematisiert wurde)
Es wird eine Stichprobe von 200 Bällen untersucht.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Stichprobe

- nur runde Bälle enthält,
- mindestens 190 runde Bälle enthält,
- genau einen oder genau zwei unrunde Bälle enthält.

Ein Unternehmen stellt Tischtennisbälle her. 98 % der hergestellten Bälle weichen nur unwesentlich von der Kugelform ab; diese werden im Weiteren als „rund“ bezeichnet, die übrigen als „unrund“.
Nach der Herstellung durchlaufen die Bälle eine Sortieranlage. Dabei wird ein unrunder Ball mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % aussortiert. Allerdings werden auch 5 % der runden Bälle aussortiert. Angenommen, die nicht aussortierten Bälle würden die gleiche Sortieranlage ein zweites Mal durchlaufen.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein nach zweimaligem Durchlaufen der Anlage zufällig ausgewählter Ball unrund ist und nicht aussortiert wird.

$0{,}02 \cdot 0{,}1^2$

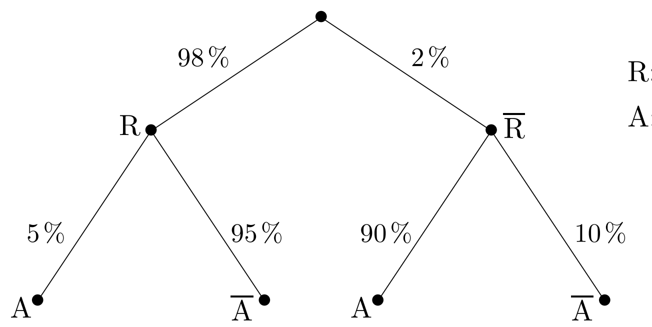
Der Ball ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,02 unrund und wird beim zweimaligen Durchlaufen der Anlage mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}1^2$ aussortiert.

b) Berechnen Sie den Anteil der unrunden Bälle unter denjenigen, die dann nach zweimaligem Durchlaufen der Anlage nicht aussortiert würden.

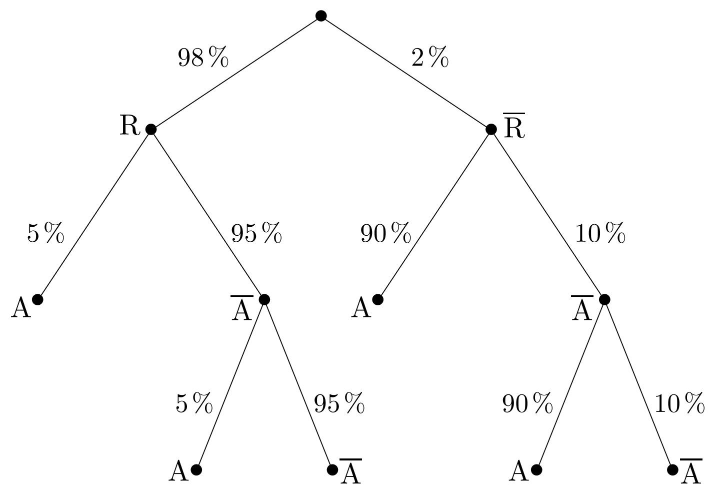
$$\text{Anteil: } \frac{0{,}02 \cdot 0{,}1^2}{0{,}98 \cdot 0{,}95^2 + 0{,}02 \cdot 0{,}1^2} \approx 0{,}00023$$

c) (falls die Binomialverteilung thematisiert wurde)
Es wird eine Stichprobe von 200 Bällen untersucht.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Stichprobe

- nur runde Bälle enthält, $n = 200,\ p = 0{,}98,\ P(X = 200) \approx 0{,}018$
- mindestens 190 runde Bälle enthält, $P(X \geq 190) = 1 - P(X \leq 189) \approx 0{,}997$
- genau einen oder genau zwei unrunde Bälle enthält. $P(198 \leq X \leq 199) \approx 0{,}218$




R: „Ein Ball ist rund.“
A: „Ein Ball wird aussortiert.“



↑

Siehe auch: Bedingte Wahrscheinlichkeit, Aufgaben Sek I
Wiederholung
Stochastik
Startseite