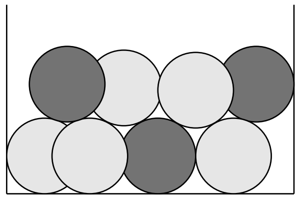
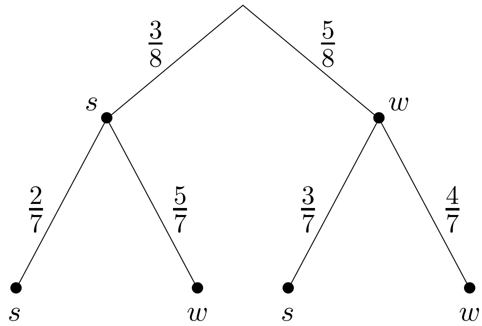
Stochastik

Startseite

↑ Pfadwahrscheinlichkeiten

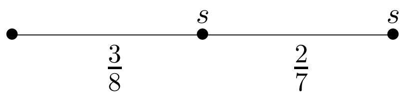


Zwei Kugeln werden nacheinander ohne Zurücklegen gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die zweite Kugel schwarz?



Die Menge aller Elementarereignisse ist
$\Omega = \{(s,s);\ (s,w);\ (w,s);\ (w,w)\}$
Jedem Elementarereignis entspricht ein Pfad durch den Baum.

Wie berechnet sich die Wahrscheinlichkeit eines Pfades?
Betrachten wir hierzu zum Beispiel den Pfad



Bei der Definition der Pfadwahrscheinlichkeit lassen wir uns von der Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit leiten. Nehmen wir dazu an, dass der zweistufige Versuch n-mal wiederholt wird. Welcher Anteil der Wiederholungen wird diesen Pfad einschlagen?
$\frac{3}{8}$ der Wiederholungen werden den Zweig s einschlagen und $\frac{2}{7}$ der $\frac{3}{8} \cdot n$ Fälle werden von s nach s gehen.
Deshalb wird der Anteil $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{8} \cdot n$ der n Wiederholungen entlang des Pfades "s, s" ablaufen.

Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.

$P(\text{“zweite Kugel ist schwarz“}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{8}$

1. In einem dunklen Gang sind in einem Schubfach 4 schwarze, 6 rote und 2 weiße Socken. Zwei Socken werden zufällig gegriffen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide die gleiche Farbe haben?

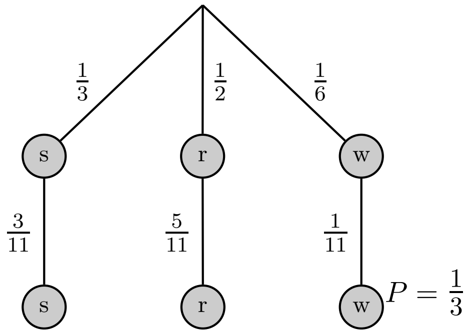
2. Eine Münze wird solange geworfen, bis zum 1. Mal "1" erscheint, höchstens aber 5mal.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt beim 4. Wurf "1"?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt spätestens beim 3. Wurf "1"?

3. Unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Setzen auf "Rouge" gleich $\frac{1}{2}$ ist, schwören viele Roulettspieler auf folgendes System: Man setzt einen gewissen Betrag. Gewinnt man, hört man auf und erhält als Gewinn den doppelten Einsatz. Verliert man, so verdoppelt man den Einsatz und spielt weiter. Ein Spieler beginnt mit 10 € Einsatz; er könnte bis zu 6 Spiele mitmachen. Berechnen Sie seinen zu erwartenden Reingewinn.

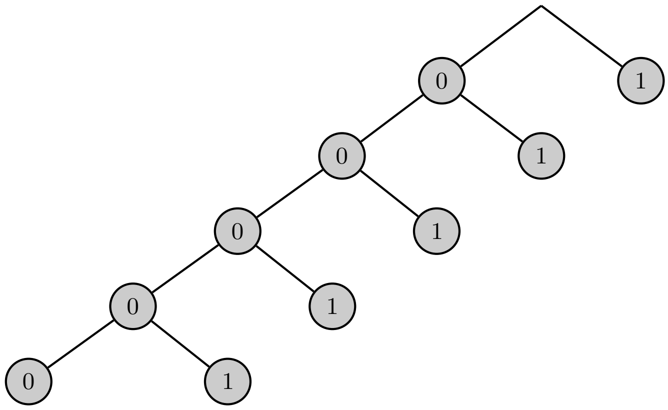
4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim 10-maligen Würfeln
   a) nie eine Sechs,
   b) genau eine Sechs,
   c) genau 2 Sechsen,
   d) mindestens 2 Sechsen zu werfen?

↑ Pfadwahrscheinlichkeiten Hinweise

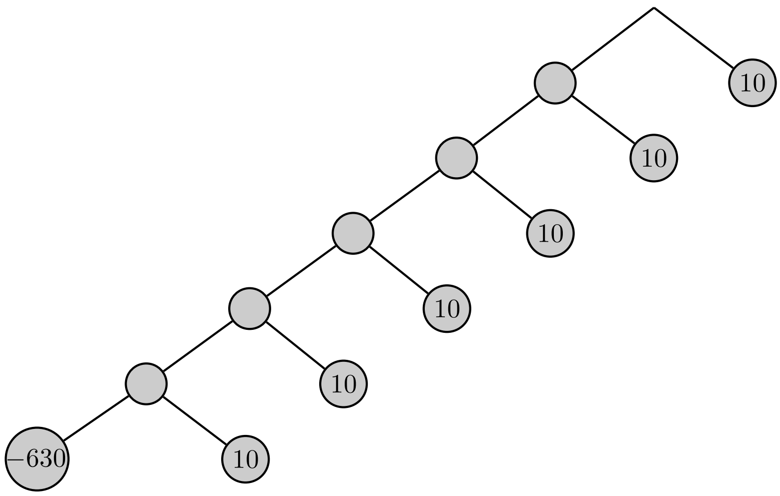
1. In einem dunklen Gang sind in einem Schubfach 4 schwarze, 6 rote und 2 weiße Socken. Zwei Socken werden zufällig gegriffen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide die gleiche Farbe haben?



2. Eine Münze wird solange geworfen, bis zum 1. Mal "1" erscheint, höchstens aber 5mal.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt beim 4. Wurf "1"? $\frac{1}{16}$
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt spätestens beim 3. Wurf "1"? $\frac{7}{8}$



3. Unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Setzen auf "Rouge" gleich $\frac{1}{2}$ ist, schwören viele Roulettspieler auf folgendes System: Man setzt einen gewissen Betrag. Gewinnt man, hört man auf und erhält als Gewinn den doppelten Einsatz. Verliert man, so verdoppelt man den Einsatz und spielt weiter. Ein Spieler beginnt mit 10 € Einsatz; er könnte bis zu 6 Spiele mitmachen. Berechnen Sie seinen zu erwartenden Reingewinn.



↑

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim 10-maligen Würfeln
   a) nie eine Sechs, 0,162
   b) genau eine Sechs, 0,323
   c) genau 2 Sechsen, 0,291
   d) mindestens 2 Sechsen zu werfen? 0,515

↑

↑ Placebo-Aufgabe

In einer Klinik bekommt ein Patient zwei Tabletten, die zufällig einer Schachtel entnommen werden, in der acht Beruhigungstabletten und zwei Placebos sind. Wir betrachten die Ereignisse:

A: "Beide Tabletten sind echt."

B: "Genau eine der Tabletten ist ein Placebo."

a) Ermittle die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$.

b) Formuliere das Ereignis $C = \overline{A} \cap \overline{B}$ in Worten und ermittle die Wahrscheinlichkeit $P(C)$.

↑ Placebo-Aufgabe

In einer Klinik bekommt ein Patient zwei Tabletten, die zufällig einer Schachtel entnommen werden, in der acht Beruhigungstabletten und zwei Placebos sind. Wir betrachten die Ereignisse:

A: “Beide Tabletten sind echt.“

B: “Genau eine der Tabletten ist ein Placebo.“

a) Ermittle die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$.

$$P(A) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = 0{,}622$$

$$P(B) = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} = 0{,}356$$

b) Formuliere das Ereignis $C = \overline{A} \cap \overline{B}$ in Worten und ermittle die Wahrscheinlichkeit $P(C)$.

C: “Beide Tabletten sind Placebos.“

$$P(C) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = 0{,}022$$

↑ Berliner Sportler

Laut Statistischem Jahrbuch waren im Jahr 2014 von 3.421.829 Einwohnern der Stadt Berlin 531.253 als Mitglied in einem Sportverein organisiert. Diese werden im Folgenden kurz „Sportler“ genannt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person Sportler ist. Geben Sie diese Wahrscheinlichkeit auch in Prozent an.

Bei Telefonumfragen werden zufällig ausgewählte Personen nach ihrer Vereinsmitgliedschaft befragt. Rechnen Sie bei den folgenden Aufgaben mit einer Wahrscheinlichkeit von 16 % dafür, dass eine zufällig befragte Person Sportler ist.

b) Ermitteln Sie folgende Wahrscheinlichkeiten, z. B. unter Verwendung eines Baumdiagramms:
E_1: Von drei befragten Personen ist erst die dritte ein Sportler.
E_2: Unter den ersten drei befragten Personen ist genau ein Sportler.

c) Formulieren Sie das Gegenereignis zum Ereignis E „Unter den ersten vier befragten Personen sind höchstens drei Sportler“.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von E mit Hilfe des Gegenereignisses.

d) Es werden viele Telefonumfragen mit stets 500 Personen durchgeführt.
Geben Sie an, welche Anzahl von Sportlern bei solchen Umfragen durchschnittlich zu erwarten ist.

Unter den 61.023 Einwohnern der Altersgruppe 19 - 21 Jahre gab es im Jahr 2014 insgesamt 12.048 Sportler. In dieser Altersgruppe gab es 30.806 Mädchen, davon waren 3.401 in einem Sportverein organisiert.

e) Stellen Sie diese Daten in einer Vierfeldertafel dar und vervollständigen Sie diese.
Nennen Sie ggf. die Bedeutung von Abkürzungen, die Sie verwenden.

f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
A: eine zufällig ausgewählte Person dieser Altersgruppe männlich und Sportler ist
B: ein zufällig ausgewählter Sportler männlich ist.

g) Untersuchen Sie unter Verwendung der gegebenen Daten, ob es einen stochastischen Zusammenhang zwischen der Mitgliedschaft in einem Sportverein und der Zugehörigkeit zu einer Altersgruppe gibt.

↑ Berliner Sportler

Laut Statistischem Jahrbuch waren im Jahr 2014 von 3.421.829 Einwohnern der Stadt Berlin 531.253 als Mitglied in einem Sportverein organisiert. Diese werden im Folgenden kurz „Sportler“ genannt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person Sportler ist. Geben Sie diese Wahrscheinlichkeit auch in Prozent an. 15,5 %

Bei Telefonumfragen werden zufällig ausgewählte Personen nach ihrer Vereinsmitgliedschaft befragt. Rechnen Sie bei den folgenden Aufgaben mit einer Wahrscheinlichkeit von 16 % dafür, dass eine zufällig befragte Person Sportler ist.

b) Ermitteln Sie folgende Wahrscheinlichkeiten, z. B. unter Verwendung eines Baumdiagramms:
E_1: Von drei befragten Personen ist erst die dritte ein Sportler. $0{,}16 \cdot 0{,}84^2 = 0{,}113$
E_2: Unter den ersten drei befragten Personen ist genau ein Sportler. $3 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}84^2 = 0{,}339$

c) Formulieren Sie das Gegenereignis zum Ereignis E „Unter den ersten vier befragten Personen sind höchstens drei Sportler“. $\overline{E}$: Unter den ersten vier befragten Personen sind genau 4 Sportler.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von E mit Hilfe des Gegenereignisses. $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 0{,}9993$

d) Es werden viele Telefonumfragen mit stets 500 Personen durchgeführt. $E(X) = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}16 = 80$
Geben Sie an, welche Anzahl von Sportlern bei solchen Umfragen durchschnittlich zu erwarten ist.

Unter den 61.023 Einwohnern der Altersgruppe 19 - 21 Jahre gab es im Jahr 2014 insgesamt 12.048 Sportler. In dieser Altersgruppe gab es 30.806 Mädchen, davon waren 3.401 in einem Sportverein organisiert.

e) Stellen Sie diese Daten in einer Vierfeldertafel dar und vervollständigen Sie diese.
Nennen Sie ggf. die Bedeutung von Abkürzungen, die Sie verwenden.

S: Die betreffende Person ist Mitglied eines Sportvereins.
W: Die betreffende Person ist weiblich.

	W	$\overline{W}$	$\sum$
S	3401	8647	12048
$\overline{S}$	27405	21570	48975
$\sum$	30806	30217	61023

$$P(\overline{W} \cap S) = \frac{8647}{61023} = 0{,}142$$

$$P(\overline{W}|S) = \frac{8647}{12048} = 0{,}718 = 71{,}8\,\%$$

f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
A: eine zufällig ausgewählte Person dieser Altersgruppe männlich und Sportler ist
B: ein zufällig ausgewählter Sportler männlich ist.

g) Untersuchen Sie unter Verwendung der gegebenen Daten, ob es einen stochastischen Zusammenhang zwischen der Mitgliedschaft in einem Sportverein und der Zugehörigkeit zu einer Altersgruppe gibt.

$$h_{\text{Altersgruppe}}(S) = \frac{12048}{61023} = 0{,}197 \quad > \quad h(S) = 0{,}155$$

Die rel. Häufigkeit von Sportlern in der vorgegebenen Altersgruppe ist höher als die rel. Häufigkeit der Sportler Berlins.

↑

↑ Abiturienten

Betrachtet werden die folgenden Ereignisse in Bezug auf deutsche Abiturienten:
Ein zufällig ausgewählter Abiturient

A: nimmt ein Studium auf

B: absolviert direkt nach der Schulzeit ein freiwilliges soziales Jahr.

Die folgende Vierfeldertafel stellt die Zusammenhänge von A und B dar.

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	15 %	5 %	
$\overline{B}$	60 %	20 %	
$\sum$			

a) Beschreiben Sie jeweils im Sachzusammenhang die Bedeutung der Ereignisse $\overline{A}$ und $\overline{A} \cap B$.

b) Geben Sie für die Ereignisse $\overline{A} \cap B$ und $\overline{A} \cup B$ jeweils die Wahrscheinlichkeit an.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Abiturient, der direkt nach der Schulzeit ein freiwilliges soziales Jahr absolviert, ein Studium aufnimmt.

d) Ermitteln Sie, ob die Ereignisse A und B unabhängig sind.

↑ Abiturienten

Betrachtet werden die folgenden Ereignisse in Bezug auf deutsche Abiturienten:
Ein zufällig ausgewählter Abiturient

A: nimmt ein Studium auf

B: absolviert direkt nach der Schulzeit ein freiwilliges soziales Jahr.

Die folgende Vierfeldertafel stellt die Zusammenhänge von A und B dar.

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	15 %	5 %	20 %
$\overline{B}$	60 %	20 %	80 %
$\sum$	75 %	25 %	100 %

a) Beschreiben Sie jeweils im Sachzusammenhang die Bedeutung der Ereignisse $\overline{A}$ und $\overline{A} \cap B$.

$\overline{A}$: Ein zufällig ausgewählter Abiturient nimmt kein Studium auf.

$\overline{A} \cap B$: Ein zufällig ausgewählter Abiturient nimmt kein Studium auf und absolviert ein freiwilliges soziales Jahr.

b) Geben Sie für die Ereignisse $\overline{A} \cap B$ und $\overline{A} \cup B$ jeweils die Wahrscheinlichkeit an. 5 % bzw. 40 %

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Abiturient, der direkt nach der Schulzeit ein freiwilliges soziales Jahr absolviert, ein Studium aufnimmt.

$$P(A\,|\,B) = \frac{15}{20} = 75\,\%$$

d) Ermitteln Sie, ob die Ereignisse A und B unabhängig sind.

$P(A) = P(A\,|\,B)$

A und B sind daher unabhängig.

Eine Urne enthalte zwei rote und drei weiße Kugeln.
Es wird rein zufällig eine Kugel entnommen.
Anschließend wird die gezogene Kugel zurückgelegt und der Urne
eine weitere Kugel gleicher Färbung hinzugefügt.

a) Die Ziehung wird zweimal wiederholt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

   1) beide Kugeln rot sind
   2) genau eine Kugel rot ist
   3) keine Kugel rot ist.

b) Die Ziehung wird dreimal wiederholt.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Kugeln rot sind.

In der Urne befinden sich nun eine rote und eine weiße Kugel.
Ist die gezogene Kugel rot, so ist das Experiment beendet. Wird eine weiße Kugel
gezogen, wird wie bisher verfahren.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Experiment im ersten Versuch
   (zweiten, dritten, vierten, . . .) beendet wird.

Diese Art des Urnenmodells ist nach Pólya benannt.
Die epidemieartige Ausbreitung zweier verschiedener, sich aber gegenseitig
behindernder Krankheitserreger wird hiermit modelliert.

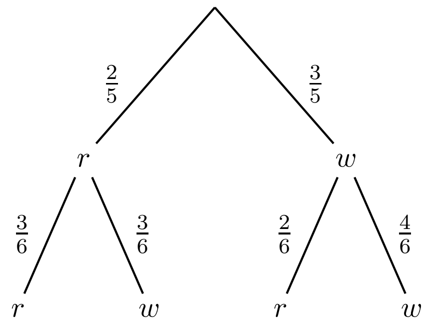
Eine Urne enthalte zwei rote und drei weiße Kugeln.
Es wird rein zufällig eine Kugel entnommen.
Anschließend wird die gezogene Kugel zurückgelegt und der Urne eine weitere Kugel gleicher Färbung hinzugefügt.

a) Die Ziehung wird zweimal wiederholt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

1) beide Kugeln rot sind $\qquad P(rr) = \frac{1}{5}$

2) genau eine Kugel rot ist $\qquad P(rw \vee wr) = \frac{2}{5}$

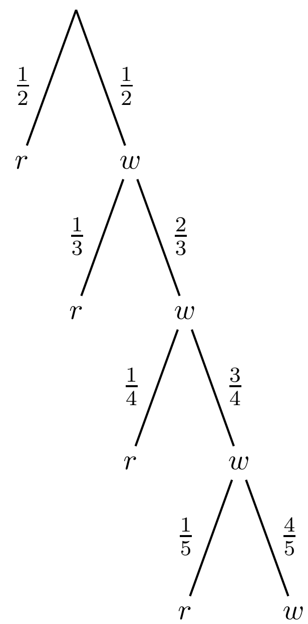
3) keine Kugel rot ist. $\qquad P(ww) = \frac{2}{5}$



b) Die Ziehung wird dreimal wiederholt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Kugeln rot sind. $\qquad P(rrr) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{35}$

In der Urne befinden sich nun eine rote und eine weiße Kugel.
Ist die gezogene Kugel rot, so ist das Experiment beendet. Wird eine weiße Kugel gezogen, wird wie bisher verfahren.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Experiment im ersten Versuch (zweiten, dritten, vierten, . . .) beendet wird.



1. Versuch	$P(r)$	$= \frac{1}{2}$
2.	$P(wr)$	$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$
3.	$P(wwr)$	$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$
4.	$P(wwwr)$	$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$
k. Versuch	$P(\underbrace{ww\ldots w}_{(k-1)\,\mathrm{mal}}r)$	$= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k+1}$

↑

In einer Urne befinden sich zwei rote und eine bestimmte Anzahl schwarzer Kugeln.
Es werden zwei Kugeln mit einem Griff gezogen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens eine der Kugeln schwarz,
wenn die Urne drei schwarze Kugeln enthält?

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln rot sind, beträgt nun 1/36.
Wie viele schwarze Kugeln sind in der Urne?

In einer Urne befinden sich zwei rote und eine bestimmte Anzahl schwarzer Kugeln.
Es werden zwei Kugeln mit einem Griff gezogen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens eine der Kugeln schwarz, wenn die Urne drei schwarze Kugeln enthält?

A: „Mindestens eine der Kugeln ist schwarz."
$\overline{A}$: „Beide Kugeln sind rot."
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{10} = 90\,\%$

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln rot sind, beträgt nun 1/36.
Wie viele schwarze Kugeln sind in der Urne?

B: „Beide Kugeln sind rot."
$P(B) = \frac{2}{2+n} \cdot \frac{1}{1+n} = \frac{2}{(2+n)(1+n)} = \frac{1}{36}$
$72 = (2+n)(1+n)$
$n = 7 \qquad \text{GTR}$
Es befinden sich 7 schwarze Kugeln in der Urne.

Ein Betrieb produziert Schrauben, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 25 % fehlerhaft sind. Vor der Auslieferung an den Kunden werden die Schrauben durch ein Prüfgerät kontrolliert. Das Prüfgerät findet 95 % der fehlerhaften Schrauben, hält aber auch 10 % der einwandfreien Schrauben für fehlerhaft. Diese Schrauben kommen nicht in den Verkauf.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
   A: „Eine fehlerhafte Schraube kommt in den Verkauf."
   (d. h. „Eine Schraube ist fehlerhaft und wird verkauft.")
   B: „Eine einwandfreie Schraube wird nicht verkauft."
   C: „Das Prüfgerät trifft eine falsche Entscheidung."

b) Das Prüfgerät soll so verbessert werden, dass die Wahrscheinlichkeit für eine falsche Entscheidung höchstens 2 % beträgt. Dazu soll der Anteil p der einwandfreien Schrauben, die das Prüfgerät fehlerhaft aussortiert, gesenkt werden. Wie groß darf p höchstens sein?

Ein Betrieb produziert Schrauben, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 25 % fehlerhaft sind. Vor der Auslieferung an den Kunden werden die Schrauben durch ein Prüfgerät kontrolliert. Das Prüfgerät findet 95 % der fehlerhaften Schrauben, hält aber auch 10 % der einwandfreien Schrauben für fehlerhaft. Diese Schrauben kommen nicht in den Verkauf.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: „Eine fehlerhafte Schraube kommt in den Verkauf.“ $P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}05 = 0{,}0125$
(d. h. „Eine Schraube ist fehlerhaft und wird verkauft.“)

B: „Eine einwandfreie Schraube wird nicht verkauft.“ $P(B) = 0{,}75 \cdot 0{,}10 = 0{,}075$

C: „Das Prüfgerät trifft eine falsche Entscheidung.“ $P(C) = P(A) + P(B) = 0{,}0875$

b) Das Prüfgerät soll so verbessert werden, dass die Wahrscheinlichkeit für eine falsche Entscheidung höchstens 2 % beträgt. Dazu soll der Anteil p der einwandfreien Schrauben, die das Prüfgerät fehlerhaft aussortiert, gesenkt werden. Wie groß darf p höchstens sein?

$P(C) = P(A) + 0{,}75 \cdot p \leq 0{,}02$

p darf höchstens 1 % betragen.

Stochastik

Startseite