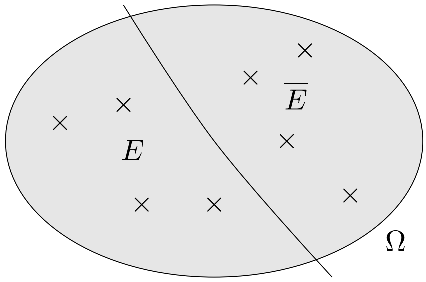
Gegenwahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit, beim einmaligen Würfeln eine Sechs zu erhalten, beträgt $\frac{1}{6}$. Wird der Würfel 100 mal geworfen, erwarten wir ungefähr $\frac{1}{6} \cdot 100 \approx 16{,}7\,\% \approx 17$ Sechsen. Wird ein Würfel mehrmals geworfen, erwarten wir in 16,7% aller Fälle eine Sechs.
Die Prozentschreibweise für Wahrscheinlichkeiten ist besonders anschaulich.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim dreimaligen Würfeln mindestens eine Sechs zu werfen?

Die Menge Ω aller Elementarereignisse besteht aus den Teilmengen:

E : “mindestens eine Sechs“ und
$\overline{E}$: “keine einzige Sechs“



Die Wahrscheinlichkeit für $\overline{E}$ ist einfacher zu berechnen:

Es ist $P(\overline{E}) = (\frac{5}{6})^3$.

Wie erhalten wir nun $P(E)$?

Es muss $P(E) + P(\overline{E}) = 1$ sein, weil die Teilmengen E und $\overline{E}$ zusammen Ω ergeben, sich nicht überlappen und $P(\Omega) = 1$ ist.

Daher folgt: $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - (\frac{5}{6})^3 = 0{,}4213 \approx 42{,}1\,\%$

$\overline{E}$ ist das Gegenereignis von E, $P(\overline{E})$ die Gegenwahrscheinlichkeit.
$\overline{E}$ tritt genau dann ein, wenn E nicht eintritt.

Lösung von Aufgabe 8:
Wir betrachten das Ereignis

E : “unter n Personen haben mindestens 2 im gleichen Monat Geburtstag“.

Die Anzahl der Elementarereignisse beträgt 12^n, da für jede Person 12 Monate infrage kommen.
Die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses

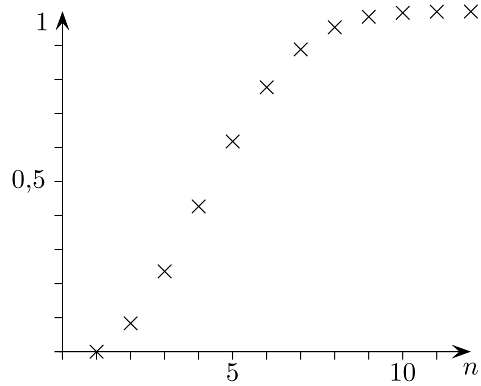
$\overline{E}$: “alle n Personen haben verschiedene Geburtstage“

beträgt:

$$|\,\overline{E}\,| = 12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (12 - n + 1) = \frac{12!}{(12-n)!}$$

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{12!}{(12-n)! \cdot 12^n}$$

n	$P(E)$
2	0,083
3	0,236
4	0,427
5	0,618
6	0,777
7	0,889
8	0,954



Für das Ereignis E^*: “unter n Personen haben mindestens 2 am selben Tag Geburtstag“ ergibt sich:

$$|\,\overline{E^*}\,| = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1) = \frac{365!}{(365-n)!}$$

$$P(E^*) = 1 - P(\overline{E^*}) = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$$

n	$P(E^*)$
10	0,117
20	0,411
30	0,706
40	0,891

Für $n = 23$ ist $P(E) > \frac{1}{2}$.