Binomialkoeffizient

Für ein Experiment werden 3 von 5 Tieren ausgewählt.
Auf wie viele Arten kann diese Auswahl erfolgen?
Erinnern wir uns an ein entsprechendes Problem: Wenn für 5 Autos nur 3 Parkplätze zur Verfügung stehen, haben wir $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten gefunden. Jedoch ist die Analogie nicht vollkommen. Im Parkproblem waren die 3 Parkplätze unterscheidbar. In unserem Problem ist die Reihenfolge, in der wir die Tiere anordnen, irrelevant. Bezeichnen wir die 3 geparkten Wagen mit a, b und c; dann unterscheiden wir zwischen den Anordnungen (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Unabhängig von der anfänglichen Auswahl der 3 Wagen zählen wir jede Auswahl sechsfach. Wenn wir umgekehrt nicht an der Reihenfolge der Autos (oder Tiere) interessiert sind, müssen wir 60 durch 6 dividieren.
Die gleiche Überlegung kann zur Herleitung eines allgemeinen Resultats verwendet werden.
Auf wie viele Arten können wir aus n Kugeln k auswählen?
Wenn die Reihenfolge von Bedeutung ist, wird das Resultat durch $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \dots \ \cdot (n-k+1)$ angegeben, andernfalls müssen wir die $k!$ Permutationen der k ausgewählten Kugeln rückgängig machen, d. h. wir fassen jeweils $k!$ Permutationen zu einer Teilmenge zusammen. Für die ungeordnete Auswahl gibt es also

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \dots \ \cdot (n-k+1)}{k!} \quad \text{Möglichkeiten.}$$

Dieser Term (Binomialkoeffizient) wird gewöhnlich mit $\binom{n}{k}$ abgekürzt. Man liest "n über k".

Bei einer Urne mit n nummerierten Kugeln gibt es $\binom{n}{k}$ ungeordnete Stichproben vom Umfang k (k-elementige Teilmengen).

Auf wie viele Arten können 3 von 5 Tieren ausgewählt werden?

Lösung:

$$\binom{n}{k} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

Die Menge der Tiere sei $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$
Dann gibt es die 10 Möglichkeiten:

$\{a, b, c\}$ $\{a, b, d\}$ $\{a, b, e\}$ $\{a, c, d\}$ $\{a, c, e\}$
$\{a, d, e\}$ $\{b, c, d\}$ $\{b, c, e\}$ $\{b, d, e\}$ $\{c, d, e\}$

1. In einem Käfig sind 20 mit den Nummern 1 bis 20 versehene Mäuse. 5 Mäuse werden zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für
   a) eine ganz bestimmte Auswahl,
   b) eine Auswahl von Mäusen, deren Nummern nicht größer als 10 sind?

2. Ein Test besteht aus 6 Fragen. Zu jeder Frage sind 4 Antworten vorgegeben, von denen genau eine richtig ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit rät man zufällig 6 richtige Antworten?

3. Vor einem Entscheidungsrennen lassen sich die 8 teilnehmenden Skiläufer fotografieren. Auf einer Aufnahme sind immer 3 Läufer. Wie viele Bilder müssen mindestens gemacht werden, um garantiert die späteren drei Sieger auf einem Bild zu haben?

4. Bei einer Tombola gibt es unter 100 Losen 4 Gewinne. Der erste Käufer erwirbt 10 Lose. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens ein Gewinnlos dabei?

5. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto "6 aus 49" mit einer Tippreihe
   a) genau 4 Richtige,
   b) mindestens 4 Richtige zu haben.

Binomialkoeffizient Aufgaben Lösungen

1. In einem Käfig sind 20 mit den Nummern 1 bis 20 versehene Mäuse. 5 Mäuse werden zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für

   a) eine ganz bestimmte Auswahl, $\dfrac{1}{\binom{20}{5}}$

   b) eine Auswahl von Mäusen, deren Nummern nicht größer als 10 sind? $\dfrac{\binom{10}{5}}{\binom{20}{5}} = 1{,}6\,\%$

2. Ein Test besteht aus 6 Fragen. Zu jeder Frage sind 4 Antworten vorgegeben, von denen genau eine richtig ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit rät man zufällig 6 richtige Antworten? $\dfrac{1}{4^6}$

3. Vor einem Entscheidungsrennen lassen sich die 8 teilnehmenden Skiläufer fotografieren. Auf einer Aufnahme sind immer 3 Läufer. Wie viele Bilder müssen mindestens gemacht werden, um garantiert die späteren drei Sieger auf einem Bild zu haben? $\binom{8}{3}$

4. Bei einer Tombola gibt es unter 100 Losen 4 Gewinne. Der erste Käufer erwirbt 10 Lose. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens ein Gewinnlos dabei? $1 - \dfrac{\binom{96}{10}}{\binom{100}{10}} = 34{,}8\,\%$

5. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto "6 aus 49" mit einer Tippreihe

   a) genau 4 Richtige, $\dfrac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = 0{,}000969$

   b) mindestens 4 Richtige zu haben.

$$\frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{6}\cdot\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} =$$

$$\frac{13545}{13983816} + \frac{258}{13983816} + \frac{1}{13983816} = 0{,}001$$

Binomialkoeffizient

Siehe auch (Sek I): n-Fakultät, Binomialkoeffizient