Axiomensystem von Kolmogorow

In der Mathematik werden Begriffe (z. B. die Ableitung einer Funktion, die bedingte Wahrscheinlichkeit usw.) mit Hilfe einfacherer Begriffe definiert, die wiederum mit noch einfacheren definiert worden sind. Analog dazu werden mathematische Sätze mit Hilfe anderer math. Sätze bewiesen, die ihrerseits ... . Diese Zurückführung lässt sich nicht unbegrenzt fortsetzen. Am Anfang jeder math. Theorie stehen daher grundlegende Begriffe, die nicht weiter erklärt werden, und grundlegende Beziehungen zwischen den Begriffen, genannt Axiome, die nicht weiter bewiesen werden können.
1933 hat der russische Mathematiker Kolmogorow gezeigt, dass drei Axiome genügen, auf denen die Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgebaut werden kann.

Wir betrachten eine Menge Ω und das System der Teilmengen von Ω. P sei eine Funktion, die jeder Teilmenge eine reelle Zahl zuordnet. P erfüllt folgende Bedingungen:

Axiome:

1. $P(E) \geq 0$ für alle Teilmengen von Ω, $\quad E \subset \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad$ für $A,\ B \subset \Omega \quad$ und $\quad A \cap B = \emptyset$

Folgerungen aus dem Axiomensystem: $\quad A,\ B,\ C \subset \Omega$

a) $P(A) \leq 1$

b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

c) $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

e) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

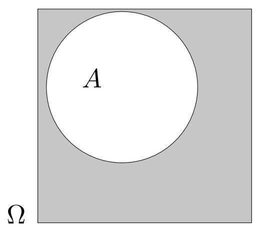
Gesetze der Mengenalgebra:

1)	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	Kommutativgesetze
2)	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	Assoziativgesetze
3)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivgesetze
4)	$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$	Absorptionsgesetze
5)	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgan-Gesetze
6)	$A = \overline{\overline{A}}$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$ $A \cup \overline{A} = \Omega$	Komplementgesetze

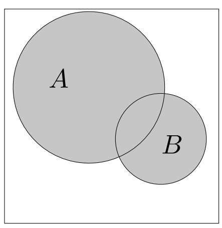
$\subset$ enthalten (ist Teilmenge)

$\cup$ vereinigt
$\cap$ geschnitten

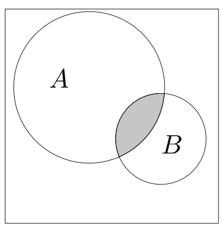
$\emptyset$ leere Menge



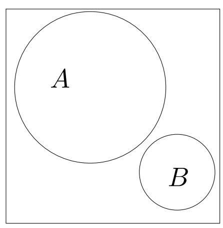
$\overline{A}$



$A \cup B$



$A \cap B$



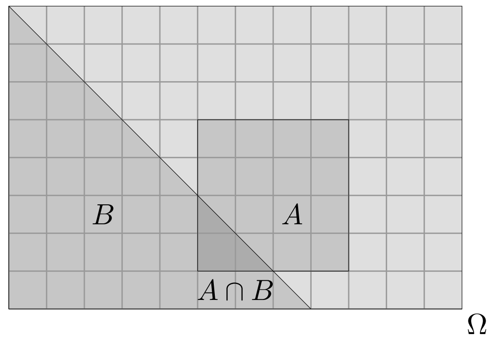
$A \cap B = \emptyset$

Unabhängigkeit   Vier-Felder-Tafel

$P(A) \;=\; \frac{4}{24} \;=\; \frac{1}{6}$

$P(B) \;=\; \frac{8}{24} \;=\; \frac{1}{3}$

$P(A \cap B) \;=\; \frac{\frac{1}{2}}{24} \;=\; \frac{1}{48}$



Nehmen wir an, wir wissen, dass das Ereignis B eingetroffen ist.
Wie groß ist dann $P(A \mid B)$, d. h. die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung von B?
Statt A als Teil von Ω zu betrachten, ist nun der Anteil von $A \cap B$ an B zu bestimmen.

$P(A \mid B) \;=\; \frac{A \cap B}{B} \;=\; \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \;=\; \frac{1}{16}$,   *beachte:* $P(A \cap B) \;=\; \frac{A \cap B}{\Omega}$ und $P(B) \;=\; \frac{B}{\Omega}$

Gemeint sind die Flächeninhalte.

Mit $P(A \mid B) \;=\; \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ wird die Grundmenge auf B reduziert. Die Division durch $P(B)$ bewirkt eine Normierung zu 1.

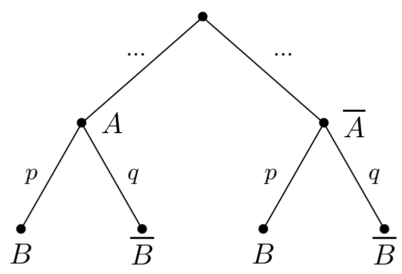
Wäre $P(A \mid B) \;=\; P(A)$,   d. h. $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \;=\; P(A)$ oder $P(A \cap B) \;=\; P(A) \cdot P(B)$,

so hätte das Vorliegen von B keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit von A,
A wäre von B unabhängig und umgekehrt.

Einem Baumdiagramm ist die Unabhängigkeit der Ereignisse:

in der ersten Stufe tritt A auf,
in der zweiten Stufe tritt B auf,

sofort zu entnehmen. Wenn die Wahrscheinlichkeiten nicht vom Ausgang des 1. Versuchs abhängig sind, dann sind die Teilbäume auf der 2. Stufe identisch (siehe Blatt Unabhängigkeit).



Mit einer Vier-Felder-Tafel kann die Unabhängigkeit zweier Ereignisse A und B auf mehrere Weisen überprüft werden, z. B.

1. $P(A \cap B) \;=\; P(A) \cdot P(B) \iff \frac{a}{s} = \frac{a+b}{s} \cdot \frac{a+c}{s}$
2. $P(A \mid B) \;=\; P(A \mid \overline{B}) \iff \frac{a}{a+c} = \frac{b}{b+d}$
3. $ad \;=\; bc$ *(Begründung durch Termumformungen)*

	B	$\overline{B}$	
A	a	b	$a+b$
$\overline{A}$	c	d	$c+d$
	$a+c$	$b+d$	$s = a+b+c+d$

Aufgaben

1. Von den 100 Abiturienten des Prüfungsjahrgangs erreichen die 24 Jahrgangsbesten eine Gesamtnote, die mit einer 1 vor dem Komma beginnt. Es werden die Ereignisse „Ein zufällig ausgewählter Abiturient gehört zu den 24 Jahrgangsbesten“ und „Ein zufällig ausgewählter Abiturient ist weiblich“ betrachtet.

   a) Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse stochastisch abhängig sind, falls sich im gesamten Prüfungsjahrgang 37 und unter den Jahrgangsbesten 11 Frauen befinden.

   b) Wie viele Frauen müssen unter den 24 Besten und wie viele unter den gesamten 100 Abiturienten sein, damit obige Ereignisse stochastisch unabhängig sind? Bestimmen Sie alle Möglichkeiten. Eine reine Knaben- bzw. Mädchenschule kann auf Grund der in Aufgabe 1 genannten Schüler ausgeschlossen werden (aus Abitur Bayern GK 2004).

2. In einem Supermarkt werden Joghurtbecher angeboten. Die Lieferung der Becher erfolgt auf Paletten zu je 200 Stück. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Becher beschädigt und somit unverkäuflich ist, beträgt 5%. Die beschädigten Becher weisen ausschließlich folgende Schäden auf:
   E: „Aludeckel eingedrückt“ oder
   G: „Becher gebrochen“.
   Der Schaden E tritt bei 4% aller Becher, der Schaden G bei 40% der beschädigten Becher auf.

   a) Ermitteln Sie, ob die Schäden E und G unabhängig voneinander auftreten.

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Becher, dessen Deckel eingedrückt ist, gebrochen (aus Abitur Bayern LK 2001)?

Aufgaben

1. Von den 100 Abiturienten des Prüfungsjahrgangs erreichen die 24 Jahrgangsbesten eine Gesamtnote, die mit einer 1 vor dem Komma beginnt. Es werden die Ereignisse „Ein zufällig ausgewählter Abiturient gehört zu den 24 Jahrgangsbesten“ und „Ein zufällig ausgewählter Abiturient ist weiblich“ betrachtet.

   a) Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse stochastisch abhängig sind, falls sich im gesamten Prüfungsjahrgang 37 und unter den Jahrgangsbesten 11 Frauen befinden.

   b) Wie viele Frauen müssen unter den 24 Besten und wie viele unter den gesamten 100 Abiturienten sein, damit obige Ereignisse stochastisch unabhängig sind? Bestimmen Sie alle Möglichkeiten. Eine reine Knaben- bzw. Mädchenschule kann auf Grund der in Aufgabe 1 genannten Schüler ausgeschlossen werden (aus Abitur Bayern GK 2004).

2. In einem Supermarkt werden Joghurtbecher angeboten. Die Lieferung der Becher erfolgt auf Paletten zu je 200 Stück. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Becher beschädigt und somit unverkäuflich ist, beträgt 5%. Die beschädigten Becher weisen ausschließlich folgende Schäden auf:
   E: „Aludeckel eingedrückt“ oder
   G: „Becher gebrochen“.
   Der Schaden E tritt bei 4% aller Becher, der Schaden G bei 40% der beschädigten Becher auf.

   a) Ermitteln Sie, ob die Schäden E und G unabhängig voneinander auftreten.

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Becher, dessen Deckel eingedrückt ist, gebrochen (aus Abitur Bayern LK 2001)?

Lösungen:

1. a Frauen unter den 24 Besten
   b Frauen insgesamt

	Jgb	$\overline{\text{Jgb}}$	$\sum$
w	a		b
m			
$\sum$	24		100

w und Jgb unabhängig $\iff$ $P(\text{w} \cap \text{Jgb}) = P(\text{w}) \cdot P(\text{Jgb})$

$\frac{a}{100} = \frac{b}{100} \cdot \frac{24}{100} \iff a/b = 6/25$ $\qquad (a;\, b),\ (6;\, 25),\ (12;\, 50),\ (18;\, 75)$

2. a) abhängig

   b) 0,25

Bei einer Marktumfrage kannten 22 % aller Befragten das Produkt P_1, 30 % kannten das Produkt P_2 und 40 % kannten mindestens eines der beiden Produkte. Wie viel Prozent kennen beide Produkte?

$$\begin{aligned} A &= \text{Befragter kennt Produkt } P_1 \\ B &= \text{Befragter kennt Produkt } P_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= 0{,}22 \\ P(B) &= 0{,}30 \\ P(A \cup B) &= 0{,}40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \qquad \text{Gleichung umgestellt} \\ &= 12\,\% \end{aligned}$$

Sei A das Ereignis, ein Auto (oder mehrere) zu besitzen und B das Ereignis, ein Haus (oder mehrere) zu besitzen. Der Anteil von A betrage 60 %, der Anteil von B sei 20 %. Ferner sei bekannt, dass der Anteil derer, die sowohl ein Haus als auch ein Auto besitzen, 10 % betrage. Wie groß ist der Anteil derjenigen, die

a) kein Auto besitzen,

b) ein Auto besitzen, aber kein Haus,

c) entweder ein Auto oder ein Haus oder beides besitzen?

a) $P(\overline{A}) = 0{,}40$

b) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}60 - 0{,}10 = 0{,}50$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}60 + 0{,}20 - 0{,}10 = 0{,}70$

H Besitzt ein Haus
F Besitzt ein Auto

	H	$\overline{H}$	$\sum$
A	0,1	0,5	0,6
$\overline{A}$	0,1	0,3	0,4
$\sum$	0,2	0,8	1

Sei A das Ereignis, ein TV-Gerät zu besitzen und B das Ereignis, einen CD-Player zu besitzen. Der Anteil von A betrage 90 %, der Anteil von B sei 60 %. Ferner sei bekannt, dass der Anteil derer, die sowohl ein Haus als auch ein Auto besitzen, 57 % betrage. Wie viel Prozent besitzen

a) kein TV-Gerät,

b) zwar ein TV-Gerät, aber keinen CD-Player,

c) mindestens eines der beiden Geräte,

d) weder ein TV-Gerät, noch einen CD-Player,

e) höchstens eines der beiden Geräte,

f) genau eines der beiden Geräte?

a) $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}90 = 0{,}10$

b) $P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B}) = 0{,}33$

c) $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}07 = 0{,}93$

d) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}07$

e) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}57 = 0{,}43$

f) $P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}33 + 0{,}03 = 0{,}36$

A Besitzt ein TV-Gerät
B Besitzt einen CD-Player

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	0,57	0,03	0,60
$\overline{B}$	0,33	0,07	0,40
$\sum$	0,90	0,10	1