1. Bernoulli-Kette ○
2. Simulation mit GeoGebra ○
3. Bernoulli-Kette Verteilungsfunktion
4. einfache Aufgabe ○
5. $<, \leq, >, \geq$ ○
6. Bernoulli-Kette "mindestens ein Treffer"-Aufgabe ○
7. Ereignis unter verschiedenen Wahrscheinlichkeiten betrachtet
8. Nullhypothese und p-Wert
9. Semmelweis' Vermutung zum Kindbettfieber
10. Verteilungsfunktion der Binomialverteilung
11. Ereignisse
12. Tabellarische Lösung mehrere Seiten
13. Grafische Lösung mehrere Seiten
14. Binomialverteilung, gesucht n oder p oder k
15. Kugeln in Fächer
16. Wartezeiten in einer Bernoulli-Kette der Länge n mehrere Seiten
17. Aufgaben mehrere Seiten
18. Histogramm/Stabdiagramm
19. Bernoulli-Kette hinterfragen ○
20. Alkohol-Test ○
21. Aufnahmetest ○
22. Anhang Zur stochastischen Unabhängigkeit
23. Ohne GTR Bayern 2023 Niveau III
24. Paketzentrum IQB 2022 gA anspruchsvoll
25. Elektroautos IQB 2022 gA anspruchsvoll
26. Leiterplatten Ni 2021 gA
27. Smartphone-Spiel IQB 2021 gA
28. Fragestellungen gA, Stichworte

Für den Anfang geeignet ○

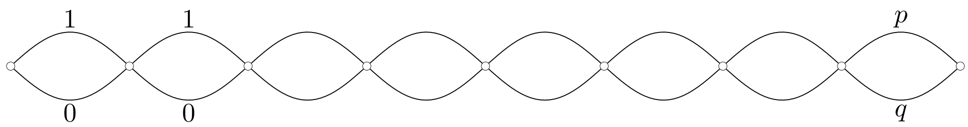
↑ Bernoulli-Kette

Jacob Bernoulli (1654 - 1705)

Die folgende Aufgabe bereitet spätere Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vor, insbesondere das Erstellen von Tests zur Qualitätskontrolle von Erzeugnissen, zur Untersuchung der Wirksamkeit von Medikamenten oder zur Beantwortung biologischer Fragen wie:
Sind Ratten farbenblind?

In einer Urne befinden sich 4 schwarze und 6 weiße Kugeln. Wir mischen und entnehmen der Urne eine Kugel, notieren die Farbe und legen die Kugel wieder in die Urne zurück. Diesen Einzelversuch wiederholen wir 8mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 8 Ziehungen keine (eine, zwei, ..., acht) schwarze Kugeln sind?

Ein Zufallsversuch mit zwei möglichen Ausfällen (Treffer 1, Fehlschlag 0) heißt Bernoulli-Versuch.
Die Wahrscheinlichkeiten werden mit p (Treffer) und q bezeichnet.
Wiederholt man einen Bernoulli-Versuch n-mal, so entsteht eine Bernoulli-Kette der Länge n.



Die Elementarereignisse einer Bernoulli-Kette der Länge n
bestehen aus allen 0-1-Folgen der Länge n.

Für die Aufgabe ist z. B. die Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses $(1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1)$
$p^5 \cdot q^3$ mit $p = 0{,}4$ und $q = 1 - p = 0{,}6$.

Allgemein interessiert man sich bei einer Bernoulli-Kette für die Wahrscheinlichkeit, genau k Treffer zu erzielen. Sei X die Anzahl der Treffer für jedes Elementarereignis. Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $X = 2$.
Elementarereignisse für genau 2 Treffer sind z. B. $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
und $(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$

Hiervon gibt es $\binom{8}{2}$ Stück, die alle jeweils die Wahrscheinlichkeit $p^2 \cdot q^6$ haben, insgesamt erhalten wir:

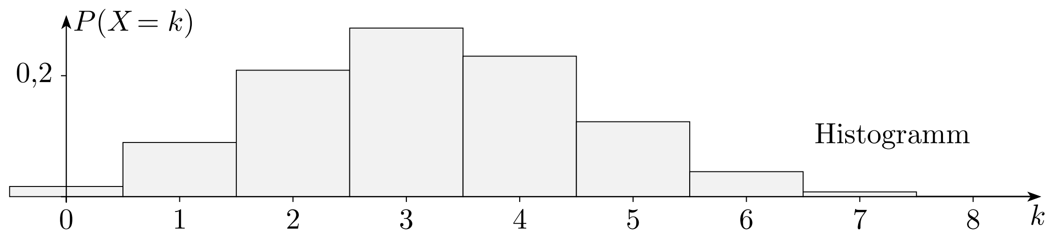
$$P(X = 2) = \binom{8}{2} \cdot p^2 \cdot q^6$$

Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n gebe die Zufallsvariable X die Anzahl der Treffer an.
Die Trefferwahrscheinlichkeit sei p. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für k Treffer

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \qquad q = 1 - p$$

Die Zufallsvariable X heißt binomialverteilt.

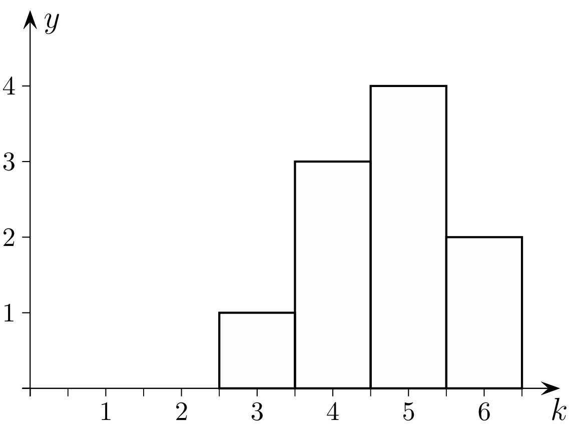
k	$P(X = k)$
0	0,017
1	0,090
2	0,209
3	0,279
4	0,232
5	0,124
6	0,041
7	0,008
8	0,000



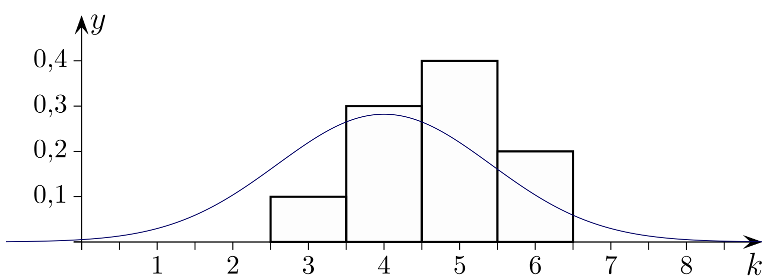
↑ Simulation mit GeoGebra

Länge der Bernoullikette $n = 8$
Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$
Anzahl der Wiederholungen $N = 10$

Mit   L = Folge(ZufallszahlBinomialverteilt$(n, p), i, 1, N)$
erhalten wir ein Liste der absoluten Trefferhäufigkeiten, z. B.
L = $\{3, 6, 4, 5, 6, 5, 4, 5, 4, 5\}$.   Die Liste wird mit = Säulendiagramm(L, 1) grafisch dargestellt.



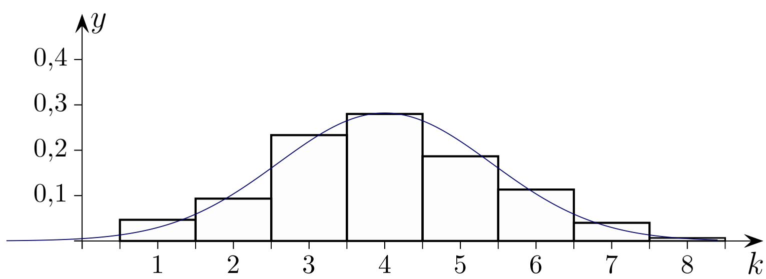
Für ein Diagramm der relativen Häufigkeiten nehmen wir = Säulendiagramm(L, 1, $1/N$)
mit dem Skalierungsfaktor $1/N$. Die Rechteckhöhen werden durch N dividiert.



Die Grafik mit xAchse:yAchse   10:1 wird ergänzt durch = Normal$(np, \text{sqrt}(np(1-p)), x, \text{false})$
und/oder = Normal$(np, \text{sqrt}(np(1-p)), x, \text{true})$

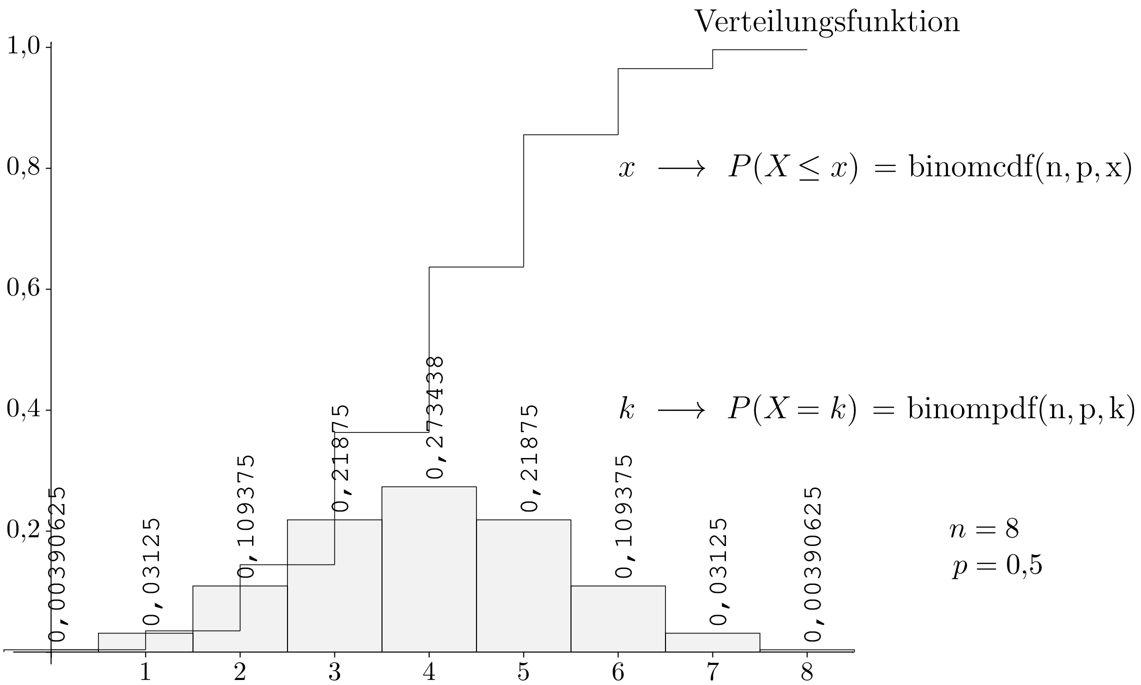
Neuberechnung mit F9 oder Strg+r

Sei nun $N = 150$



↑ Bernoulli-Kette

Siehe auch (Sek I): Bernoulli-Kette, Galton-Brett



↑ Bernoulli-Kette

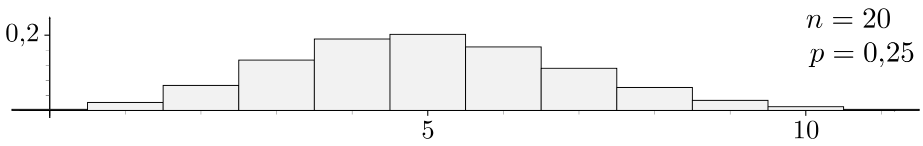
In einer Lieferung Äpfel sind 25 % wurmstichig.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 20 zufällig ausgewählten Äpfeln

a) genau 8
b) höchstens 8
c) mindestens 8 wurmstichige Äpfel sind?
d) die Anzahl der wurmstichigen Äpfel im Bereich $[4; 6]$ liegt?
e) unter den ersten und letzten 10 Äpfeln jeweils genau 4 wurmstichige sind?
f) die Anzahl der Äpfel ohne Wurm im Bereich $[13; 17]$ liegt?

↑ Bernoulli-Kette

In einer Lieferung Äpfel sind 25 % wurmstichig.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 20 zufällig ausgewählten Äpfeln

a) genau 8
b) höchstens 8
c) mindestens 8 wurmstichige Äpfel sind?
d) die Anzahl der wurmstichigen Äpfel im Bereich $[4; 6]$ liegt?
e) unter den ersten und letzten 10 Äpfeln jeweils genau 4 wurmstichige sind?
f) die Anzahl der Äpfel ohne Wurm im Bereich $[13; 17]$ liegt?



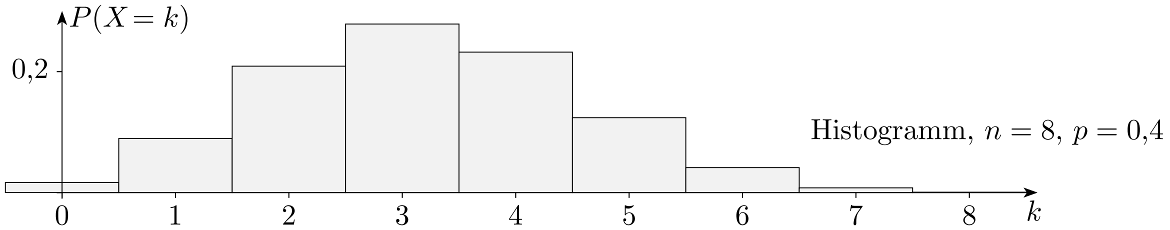
a) $P(X = 8) = 6{,}1\,\%$
b) $P(X \leq 8) = 95{,}9\,\%$
c) $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 10{,}2\,\%$
d) $P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) = 56{,}1\,\%$
e) $n = 10,\ P(X = 4)^2 = 2{,}1\,\%$
f) $p = 0{,}75,\ P(13 \leq Y \leq 17) = 80{,}7\,\%$

$\uparrow$ $<, \leq, >, \geq$

Zur Erinnerung

$2 < 5$	*kleiner als*, wir lesen von links nach rechts.
$5 > 2$	*größer als*
	Auf der „größeren“ Seite von $>$ bzw. $<$ steht die größere Zahl.
$7 \leq 8$	*kleiner gleich*, d. h. entweder *kleiner* oder *gleich*.
$7 \leq 7$	ist richtig.
$8 \geq 7$	*größer gleich*, d. h. entweder *größer* oder *gleich*.
$7 \geq 7$	ist richtig.

$\uparrow$ Bernoulli-Kette Binomialverteilung



$P(X=4) = \mathrm{binompdf}(\mathrm{n}, \mathrm{p}, 4)$	(genau) 4 Treffer	pdf probability density function
$P(X \leq 4) = \mathrm{binomcdf}(\mathrm{n}, \mathrm{p}, 4)$	höchstens 4 Treffer	cdf cumulative density function
$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$	mindestens 4 Treffer	
$P(X < 4) = P(X \leq 3)$	weniger als 4 Treffer	
$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$	mehr als 4 Treffer	
$P(2 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 1)$		

$P(X \geq 6) \approx 5\,\%$	höchstens 2mal keinen Treffer $\widehat{=}\, 0$, $n = 8$, $p = 0{,}4$
$P(Y \leq 2) = \mathrm{binompdf}(\mathrm{n}, \mathrm{q}, 2)$	alternativ, Y Anzahl der Nullen, $q = 0{,}6$

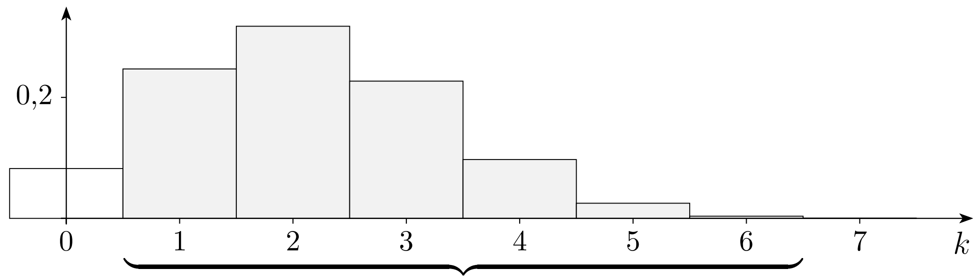
↑ Bernoulli-Kette “mindestens ein Treffer“-Aufgabe

Eine häufige Fragestellung lautet:

Ab welchem n liegt mit mindestens 90 %-iger Wahrscheinlichkeit wenigstens ein Treffer vor, gegeben $p = 0{,}3$?

Lösung:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \geq 0{,}9 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - 0{,}7^n \geq 0{,}9 \quad \Longrightarrow \quad n \geq 6{,}5$ mindestens $n = 7$



1. 95 % aller Fahrgäste haben einen gültigen Fahrausweis.
   Wie viele Fahrgäste muss ein Kontrolleur mindestens überprüfen,
   damit er mit mindestens 90 %iger Wahrscheinlichkeit auf einen Schwarzfahrer trifft?

2. Die Trefferwahrscheinlichkeit beim (einmaligen) Drehen eines Glücksrads sei 25 %.
   Ab welchem n lohnt es sich, darauf zu wetten, dass mindestens ein Treffer erzielt wird?
   (Abitur Bayern 1981)

3. Wie hoch muss der Anteil der Schwarzfahrer an allen Fahrgästen mindestens sein,
   damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 99 % unter 100 Fahrgästen mindestens ein Schwarzfahrer ist?

4. Bei einer laufenden Produktion entsteht erfahrungsgemäß 8,5 % Ausschuss.
   Welche Ereignisse (Stichproben) A, B und C haben die angegebenen Wahrscheinlichkeiten?

   $P(A) = \binom{30}{3} \cdot 0,085^3 \cdot 0{,}915^{27}$ $P(B) = 0{,}085 \cdot 0{,}915^{10}$

   $P(C) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{20}{k} \cdot 0{,}085^k \cdot 0{,}915^{20-k}$

   Zusatzfrage zu $P(B)$:
   Wie viele Ereignisse gibt es dann, die die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ haben?

1. 95 % aller Fahrgäste haben einen gültigen Fahrausweis.
   Wie viele Fahrgäste muss ein Kontrolleur mindestens überprüfen,
   damit er mit mindestens 90 %iger Wahrscheinlichkeit auf einen Schwarzfahrer trifft?
   $n = 45$

2. Die Trefferwahrscheinlichkeit beim (einmaligen) Drehen eines Glücksrads sei 25 %.
   Ab welchem n lohnt es sich, darauf zu wetten, dass mindestens ein Treffer erzielt wird?
   (Abitur Bayern 1981)
   $$P(X \geq 1) > 0{,}5$$
   $$\iff \quad n > 2{,}4 \qquad \text{ab } n = 3$$

3. Wie hoch muss der Anteil der Schwarzfahrer an allen Fahrgästen mindestens sein,
   damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 99 % unter 100 Fahrgästen mindestens
   ein Schwarzfahrer ist?
   $(1-p)^{100} \leq 0{,}01 \qquad 4{,}5\,\%$

4. Bei einer laufenden Produktion entsteht erfahrungsgemäß 8,5 % Ausschuss.
   Welche Ereignisse (Stichproben) A, B und C haben die angegebenen Wahrscheinlichkeiten?
   $$P(A) = \binom{30}{3} \cdot 0,085^3 \cdot 0{,}915^{27} \qquad P(B) = 0{,}085 \cdot 0{,}915^{10}$$
   $$P(C) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{20}{k} \cdot 0{,}085^k \cdot 0{,}915^{20-k}$$
   Zusatzfrage zu $P(B)$:
   Wie viele Ereignisse gibt es dann, die die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ haben?

A: Stichprobe der Länge $n = 30$ mit genau $k = 3$ Ausschussstücken,

B: Stichprobe der Länge $n = 11$ mit genau einem Ausschussstück an vorgegebener Stelle, hiervon gibt es 11 Möglichkeiten,

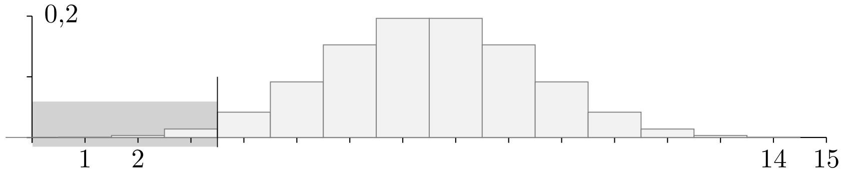
C: Stichprobe der Länge $n = 20$ mit mindestens 4 Ausschussstücken,
$1 - P(X \leq 3) = P(X \geq 4)$

Wiederholung

$$\begin{aligned} a^x &= b \qquad a, b > 0 \\ x \lg a &= \lg b \\ x &= \frac{\lg b}{\lg a} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 100^x &= 1000000 & &|\, 10^{2x} = 10^6 \\ x \lg 100 &= \lg 1000000 & &\text{logarithmieren} \\ x \cdot 2 &= 6 & &|\, 2x = 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Der Übergang zu den Exponenten heißt *logarithmieren.*

↑ Betrachtung eines Ereignisses unter verschiedenen Wahrscheinlichkeiten

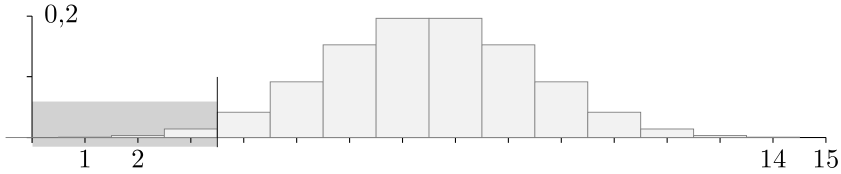


Wir werfen eine (0/1)-Münze $n = 15$ mal und betrachten das Ereignis $X \leq 3$, X Anzahl der Einsen.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses unter der Annahme (Hypothese), dass $p = 0{,}5$ ($p = 0{,}4$) (Wahrscheinlichkeit für das Werfen einer 1) ist.

b) Unter welcher Trefferwahrscheinlichkeit p gilt $P(X \leq 3) = 0{,}05$?

↑ Betrachtung eines Ereignisses unter verschiedenen Wahrscheinlichkeiten



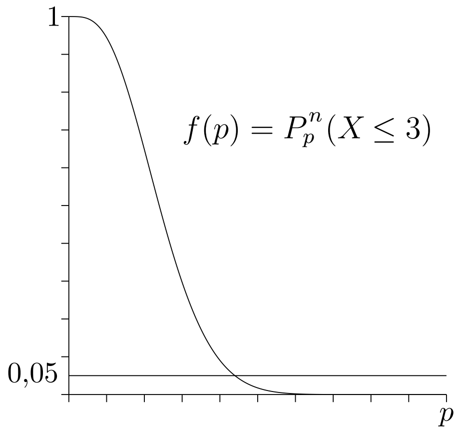
Wir werfen eine (0/1)-Münze $n = 15$ mal und betrachten das Ereignis $X \leq 3$, X Anzahl der Einsen.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses unter der Annahme (Hypothese), dass $p = 0{,}5$ ($p = 0{,}4$) (Wahrscheinlichkeit für das Werfen einer 1) ist.

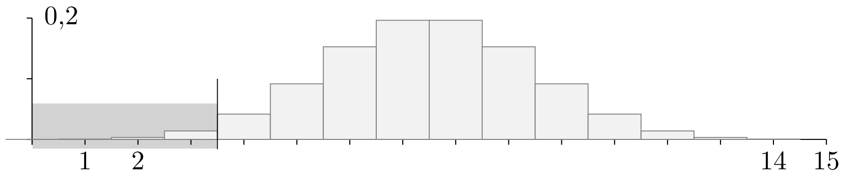
$$P_{0,5}^{n}(X \leq 3) = 0{,}018$$

$$P_{0,4}^{n}(X \leq 3) = 0{,}091$$

b) Unter welcher Trefferwahrscheinlichkeit p gilt $P_p^{15}(X \leq 3) = 0{,}05$? $p = 0{,}44$



↑ Nullhypothese und p-Wert



Unter den Hypothesen (vermutete Wahrscheinlichkeiten) tritt $p = 0{,}5$ hervor.
Beim Würfel ist es $p = 1/6$ für das Werfen z. B. einer 6.
Wir gehen also davon aus, dass die Münze unverfälscht ist.
Diese Hypothese (denke an eine Unschuldsvermutung) wird als Nullhypothese bezeichnet.

In einer Stichprobe vom Unfang $n = 15$ sei $X = 3$. Wir können uns überlegen, wie wahrscheinlich dieses Ergebnis $X = 3$ zusammen mit allen unwahrscheinlicheren Ergebnissen $X = 0, 1, 2$ ist:

$$p = P_{0,5}^{n}(X \leq 3) = 0{,}018$$

Diese Wahrscheinlichkeit heißt p-Wert von 3.
Hier wäre ein Verdacht begründet, dass die Münze manipuliert ist.
Man würde sie genauer untersuchen.

Ein kleiner p-Wert kann ein beobachtetes Stichprobenergebnis vom Zufall statistisch abgrenzen, vorbehaltlich eines Irrtums.

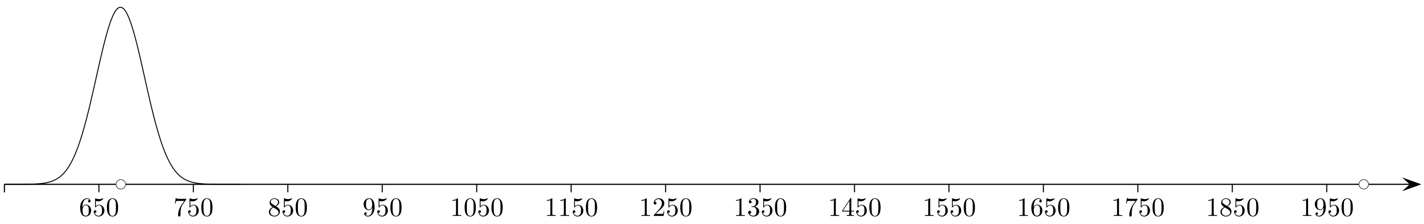
↑ Semmelweis' Vermutung zum Kindbettfieber

Im Jahr 1847 entdeckte der ungarische Arzt Ignaz Semmelweis die Ursache des Kindbettfiebers, einer tödlichen Erkrankung vieler Frauen nach einer Entbindung. Er bemerkte, dass in zurückliegenden Jahren in einer Wiener Klinik, wo Ärzte die Entbindungen vornahmen, beinahe 10 % der Entbundenen starben (genauer von 20042 1989), in einer anderen Klinik, wo Hebammen entbanden, weniger als 4 % (von 56104 1883). Überdies stieg im Jahr 1823, in dem zum Studium der Anatomie das Sezieren von Leichen eingeführt wurde, die Sterberate sprunghaft an.
Als ein mit ihm befreundete Gerichtsmediziner während einer Leichensektion von einem Studenten mit dem Skalpell verletzt wurde und wenige Tage später an einer Blutvergiftung verstarb - einer Krankheit, die einen ähnlichen Verlauf zeigte wie das Kindbettfieber -, vermutete Semmelweis, dass Ärzte sich bei Obduktionen mit einem „Leichengift“ infizierten, das sie dann bei einer Entbindung übertrugen. Die Übertragung von Bakterien war noch unbekannt.
Semmelweis bemühte sich, das Desinfizieren der Hände einzuführen. Doch die meisten Ärzte, unter ihnen sämtliche Autoritäten der Zeit, stritten jeden Zusammenhang zwischen ihren Waschgewohnheiten und den Sterbefällen ab. Semmelweis wurde verleumdet und lächerlich gemacht. Die Ergebnisse wurden jahrzehntelang als Zufall abgetan. Aufgrund seiner psychischen Veränderung - Unbeherrschtheit, Verwirrtheit, Vergesslichkeit - wurde er 1865 in eine Irrenanstalt eingewiesen. Kurz darauf starb er mit 47 Jahren, möglicherweise wurde er von Pflegern erschlagen.
Zu Semmelweis' Zeiten gab es kein Verfahren, das es erlaubt hätte, von der Stichprobe auf die Gesamtheit zu schließen.

Welche statistische Aussage ist dir heute möglich?

↑ Semmelweis' Vermutung zum Kindbettfieber

Sterberate bei den Hebammen (von 56104 starben 1883) $p = 0{,}03356$[1].
Wird diese (geringe) Sterberate bei den Ärzten zugrunde gelegt ($n = 20042$), beträgt der Erwartungswert $E = 673$ und die 3σ-Umgebung $[597, 749]$. Es starben aber 1989 Frauen.

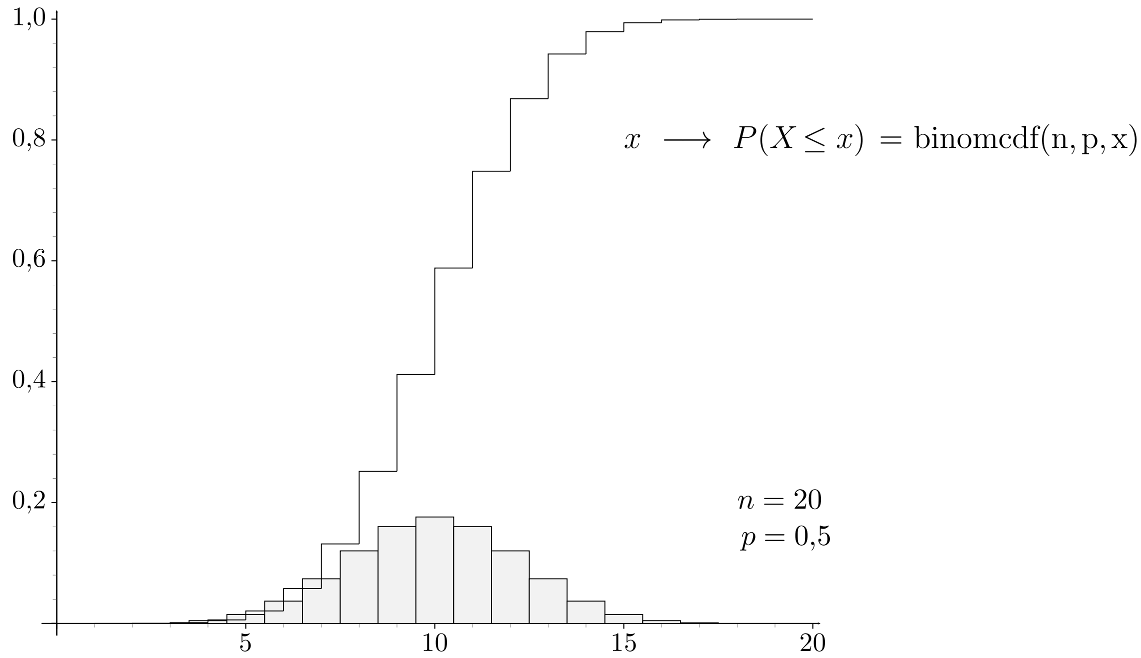


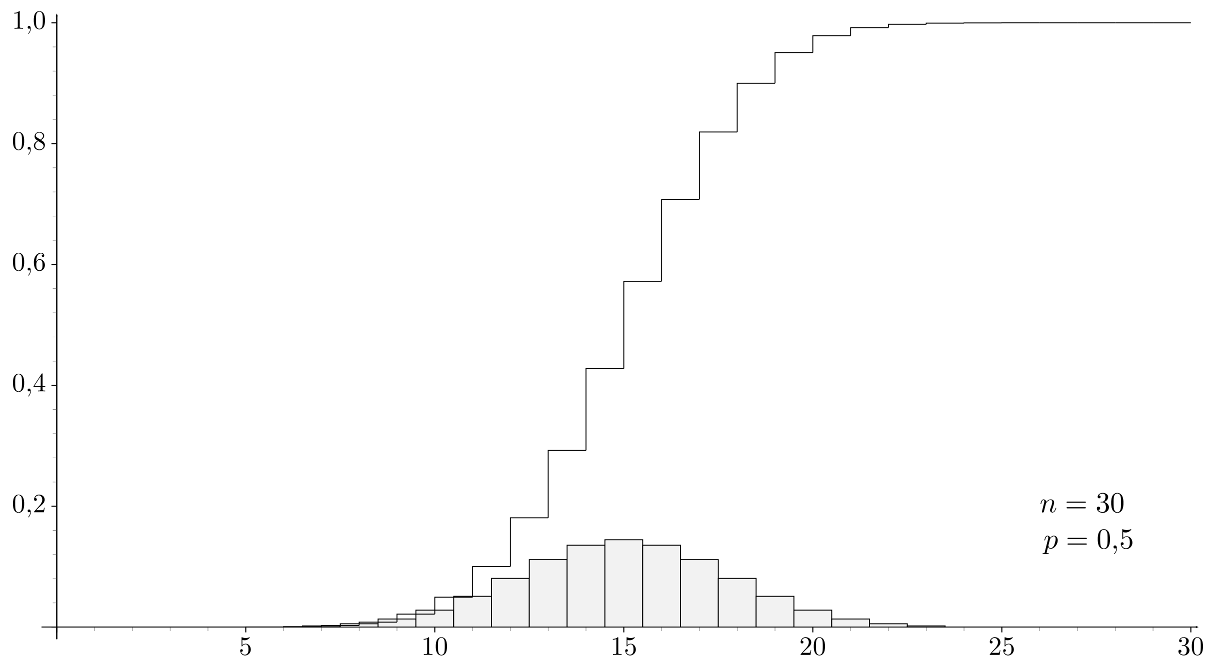
Die Wahrscheinlichkeit für dieses und alle ungünstigeren Ergebnisse beträgt:
$P_p^n(X \geq 1989) = 1 - P_p^n(X \leq 1988) = 0$

Wenn Ärzte die Entbindungen vornahmen, war die Sterberate hochsignifikant größer, als wenn Hebammen entbanden.

[1]Eine genauere Schätzung mit einem Konfidenzintervall würde das Endergebnis nicht verändern.

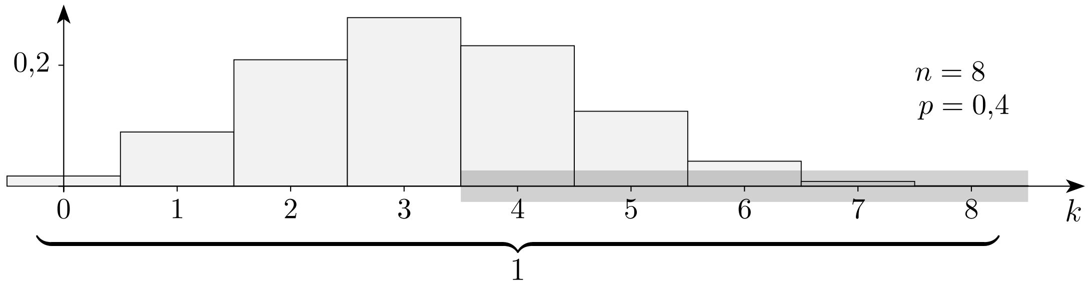
↑ Verteilungsfunktion der Binomialverteilung



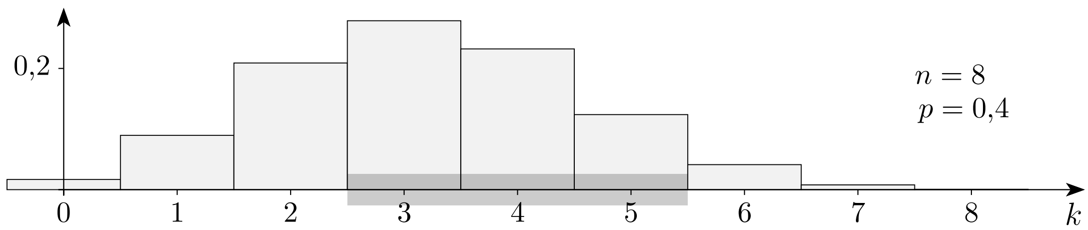


Es ist nicht erforderlich, für x in binomcdf(n, p, x) explizit mit iPart(x) den ganzzahligen Anteil zu nehmen.

↑ Binomialverteilung



$P(X \geq 4) \;=\; 1 - P(X \leq 3) = 0{,}4059$



$P(3 \leq X \leq 5) \;=\; P(X \leq 5) - P(X \leq 2) = 0{,}6348$

$P^{8}_{0,4}(X = 3) \;=\; P^{8}_{0,6}(X = 5)$

$P^{8}_{0,4}(X \leq 3) \;=\; P^{8}_{0,6}(X \geq 5) = 1 - P^{8}_{0,6}(X \leq 4)$

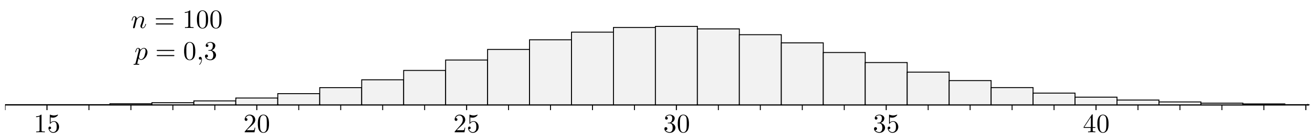
$P^{n}_{p}(X = k) \;=\; P^{n}_{q}(X = n - k)$

$P^{n}_{p}(X \leq k) \;=\; 1 - P^{n}_{q}(X \leq n - k - 1)$

↑ Tabellarische Lösung

Binomialverteilung
Gegeben: $n = 100,\ p = 0{,}3,\ \alpha = 0{,}05$
Gesucht ist

a) das größte k für das gilt: $P(X \leq k) \leq \alpha$
b) das kleinste k für das gilt: $P(k \leq X) \leq \alpha$



↑ Tabellarische Lösung

Binomialverteilung $n = 100$, $p = 0{,}3$

k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$
0	0,0000	26	0,2244
1	0,0000	27	0,2964
2	0,0000	28	0,3768
3	0,0000	29	0,4623
4	0,0000	30	0,5491
5	0,0000	31	0,6331
6	0,0000	32	0,7107
7	0,0000	33	0,7793
8	0,0000	34	0,8371
9	0,0000	35	0,8839
10	0,0000	36	0,9201
11	0,0000	37	0,9470
12	0,0000	38	0,9660
13	0,0001	39	0,9790
14	0,0002	40	0,9875
15	0,0004	41	0,9928
16	0,0010	42	0,9960
17	0,0022	43	0,9979
18	0,0045	44	0,9989
19	0,0089	45	0,9995
20	0,0165	46	0,9997
21	0,0288	47	0,9999
22	0,0479	48	0,9999
23	0,0755	49	1,0000
24	0,1136	50	1,0000
25	0,1631	51	1,0000

Binomialverteilung
Gegeben: $n = 100,\ p = 0{,}3,\ \alpha = 0{,}05$
Gesucht ist
a) das größte k für das gilt: $P(X \leq k) \leq \alpha$
b) das kleinste k für das gilt: $P(k \leq X) \leq \alpha$

Mit dem GTR kann die Tabelle erzeugt werden:
Y1 = binomcdf(100, 0.3, X) (Y-Editor)
2nd TBLSET
Anfangswert: TblStart, hier z. B. 10,
Schrittweite: △ Tbl = 1
2nd TABLE

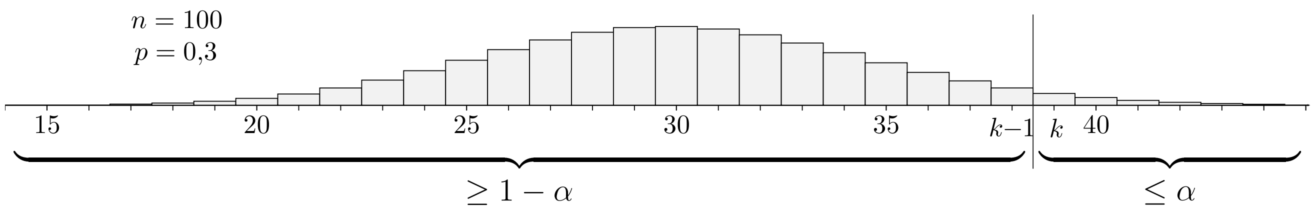
Lösung:

a) $k_{\text{max}} = 22$

b) $k_{\text{min}} = 39$

Suche das kleinste k mit $P(X \leq k-1) \geq 1 - \alpha$.

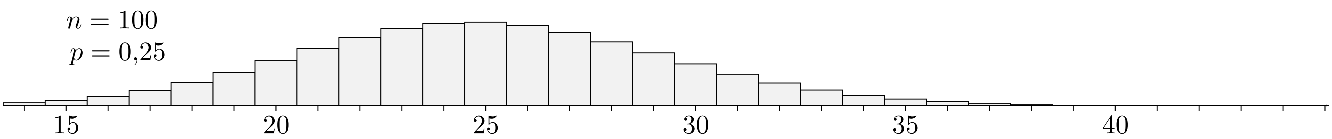
$1 - \alpha = 0{,}95$



↑ Tabellarische Lösung

Binomialverteilung
Gegeben: $n = 100,\ p = 0{,}25,\ \alpha = 0{,}05$
Gesucht ist

a) das größte k für das gilt: $P(X \leq k) \leq \alpha$
b) das kleinste k für das gilt: $P(k \leq X) \leq \alpha$



↑ Tabellarische Lösung

Binomialverteilung
Gegeben: $n = 100,\ p = 0{,}25,\ \alpha = 0{,}05$
Gesucht ist

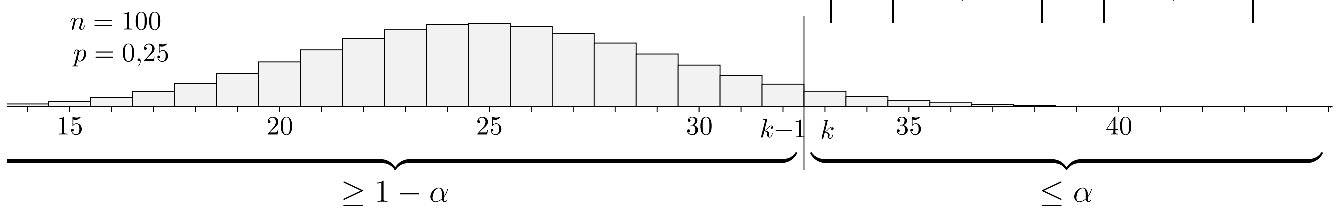
a) das größte k für das gilt: $P(X \le k) \le \alpha$
b) das kleinste k für das gilt: $P(k \le X) \le \alpha$

Lösung:

a) $k_{\text{max}} = 17$
b) $k_{\text{min}} = 33$

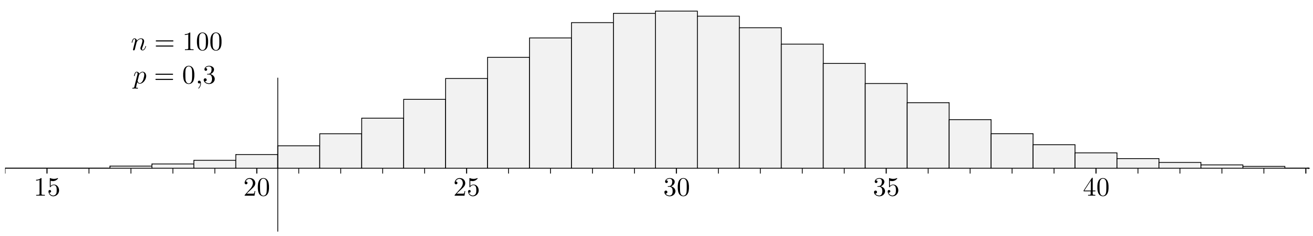
Binomialverteilung $n = 100,\ p = 0{,}25$

k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$
0	0,0000	26	0,6417
1	0,0000	27	0,7224
2	0,0000	28	0,7925
3	0,0000	29	0,8505
4	0,0000	30	0,8962
5	0,0000	31	0,9307
6	0,0000	32	0,9554
7	0,0000	33	0,9724
8	0,0000	34	0,9836
9	0,0000	35	0,9906
10	0,0001	36	0,9948
11	0,0004	37	0,9973
12	0,0010	38	0,9986
13	0,0025	39	0,9993
14	0,0054	40	0,9997
15	0,0111	41	0,9999
16	0,0211	42	0,9999
17	0,0376	43	1,0000
18	0,0630	44	1,0000
19	0,0995	45	1,0000
20	0,1488	46	1,0000
21	0,2114	47	1,0000
22	0,2864	48	1,0000
23	0,3711	49	1,0000
24	0,4617	50	1,0000
25	0,5535	51	1,0000



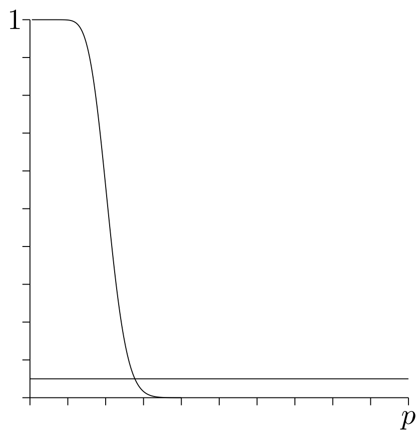
↑ Grafische Lösung

Binomialverteilung
Gegeben: $n = 100$
Gesucht sind alle Trefferwahrscheinlichkeiten p,
für die $P(X \leq 20) \leq 0{,}05$ gelten.



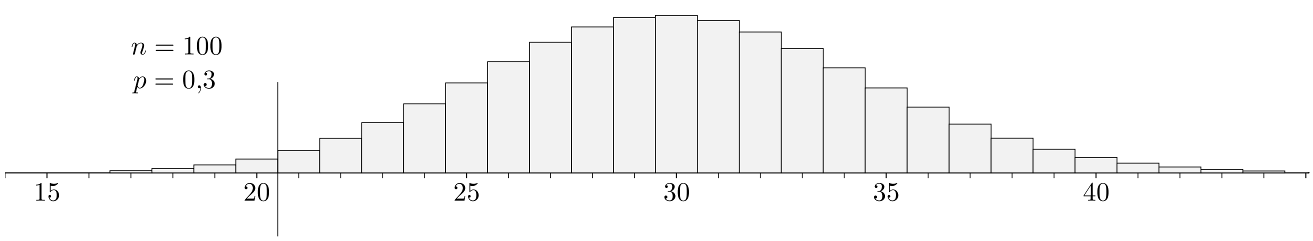
↑ Grafische Lösung

Binomialverteilung
Gegeben: $n = 100$
Gesucht sind alle Trefferwahrscheinlichkeiten p,
für die $P(X \leq 20) \leq 0{,}05$ gelten.



Lösung:

$p \in [0{,}2772; 1]$

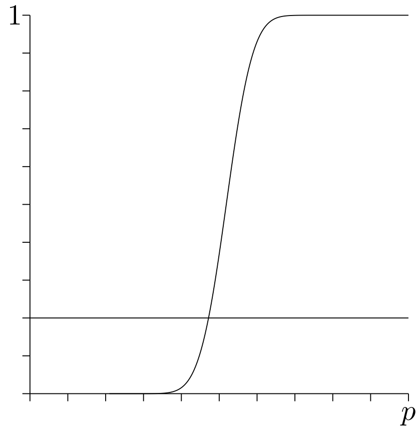


↑ Grafische Lösung

Binomialverteilung
Gegeben: $n = 80$
Gesucht sind alle Trefferwahrscheinlichkeiten p,
für die $P(X \geq 42) > 0{,}20$ gelten.

↑ Grafische Lösung

Binomialverteilung
Gegeben: $n = 80$
Gesucht sind alle Trefferwahrscheinlichkeiten p,
für die $P(X \geq 42) > 0{,}20$ gelten.



Lösung:
$p \in [0{,}4718; 1]$

↑ Binomialverteilung, gesucht n oder p oder k

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Würfe, die man mit einem Würfel machen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens drei Sechsen zu würfeln.

2. Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit dem Parameter $p = 0{,}25$. Bestimmen Sie den zweiten Parameter n als möglichst kleine Zahl, sodass gilt: $P(X \leq 1) \leq 0{,}1$

3. Ein Glücksrad hat die drei Sektoren rot, gelb und blau. Die Farben treten mit den Wahrscheinlichkeit rot $= 0{,}3$, gelb $= 0{,}4$, blau $= 0{,}3$ auf. Wie oft muss man das Glücksrad drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens zweimal gelb zu erhalten?

4. Bestimmen Sie die maximale Anzahl der Einsen, die mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens auftreten, wenn man mit einem Würfel 40-mal wirft.

5. X ist binomialverteilt mit $n = 30$, $p = 0{,}5$. Für welches k gilt: $P(X \geq k) < 5\,\%$?

6. Bestimmen Sie die Trefferwahrscheinlichkeit, notwendig ist, um bei sechs Versuchen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens zwei Treffer zu erzielen.

7. Bei einer Lotterie sind 5 % der Lose Gewinne. Wie viele Lose hätte man mindestens kaufen müssen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Gewinnlose über 50 % liegt?

8. Ein Betrieb produziert Mikrochips, die mit einer einer Wahrscheinlichkeit von 8 % fehlerhaft sind. Wie viele Chips müssen mindestens hergestellt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mehr als 750 fehlerfreie Chips darunter sind?

9. Ein Medikament wirkt erfahrungsgemäß bei 50 % aller Patienten. Das Medikament 15 Patienten verabreicht. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Medikament bei allen 15 Patienten wirkt, soll mindestens 70 % betragen. Wie hoch müsste dazu seine Wirkungswahrscheinlichkeit mindestens sein?

10. Eine bestimmte Maschine besteht aus 8 unabhängig voneinander arbeitenden Teilen. Jedes Teil funktioniert mit der Wahrscheinlichkeit p nicht. Fallen mindestens 2 dieser Teile aus, wird die Maschine funktionsunfähig. Wie groß darf p höchstens sein, damit die Maschine mit (mindestens) 80 % Sicherheit arbeiten kann?

11. Ein Multiple-Choise-Test besteht aus 12 Fragen mit jeweils vier Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Wie viele richtige Antworten müssen für das Bestehen des Tests mindestens verlangt werden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass man durch zufälliges Raten besteht, kleiner als 10 % sein soll?

↑ Binomialverteilung, gesucht n oder p oder k

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Würfe, die man mit einem Würfel machen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens drei Sechsen zu würfeln.
   $p = 1/6$, kleinstes n gesucht $\quad P(X \geq 3) \geq 0{,}95,\ n \geq 36$

2. Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit dem Parameter $p = 0{,}25$. Bestimmen Sie den zweiten Parameter n als möglichst kleine Zahl, sodass gilt: $P(X \leq 1) \leq 0{,}1$ $\quad n \geq 15$

3. Ein Glücksrad hat die drei Sektoren rot, gelb und blau. Die Farben treten mit den Wahrscheinlichkeit rot $= 0{,}3$, gelb $= 0{,}4$, blau $= 0{,}3$ auf. Wie oft muss man das Glücksrad drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens zweimal gelb zu erhalten? $\quad X$ Anzahl Sektor gelb, $p = 0{,}4$, kleinstes n gesucht $\quad P(X \geq 2) \geq 0{,}90,\ n \geq 9$

4. Bestimmen Sie die maximale Anzahl der Einsen, die mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens auftreten, wenn man mit einem Würfel 40-mal wirft.
   $n = 40,\ \ p = 1/6$, größtes k gesucht $\quad P(X \geq k) \geq 0{,}95,\ \ k \leq 3$
   Die gesuchte Anzahl ist 3.

5. X ist binomialverteilt mit $n = 30$, $p = 0{,}5$. Für welches k gilt: $P(X \geq k) < 5\,\%$?
   kleinstes k gesucht $\quad 20 \leq k \leq 30$

6. Bestimmen Sie die Trefferwahrscheinlichkeit, notwendig ist, um bei sechs Versuchen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens zwei Treffer zu erzielen.
   $n = 6,\ \ P(X \geq 2) \geq 0{,}95$, kleinstes p gesucht $\quad p \geq 0{,}59$

7. Bei einer Lotterie sind 5 % der Lose Gewinne. Wie viele Lose hätte man mindestens kaufen müssen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Gewinnlose über 50 % liegt?
   X Anzahl der Gewinnlose, $p = 0{,}05$, $k = 2$, kleinstes n gesucht $\quad P(X \geq 2) \geq 0{,}50,\ n \geq 34$

8. Ein Betrieb produziert Mikrochips, die mit einer einer Wahrscheinlichkeit von 8 % fehlerhaft sind. Wie viele Chips müssen mindestens hergestellt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mehr als 750 fehlerfreie Chips darunter sind?
   X Anzahl fehlerfreie Chips, $p = 0{,}92$, kleinstes n gesucht $\quad P(X > 750) \geq 0{,}95,\ n \geq 830$

9. Ein Medikament wirkt erfahrungsgemäß bei 50 % aller Patienten. Das Medikament 15 Patienten verabreicht. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Medikament bei allen 15 Patienten wirkt, soll mindestens 70 % betragen. Wie hoch müsste dazu seine Wirkungswahrscheinlichkeit mindestens sein?
   $n = 15,\ \ P(X = 15) \geq 0{,}70$, kleinstes p gesucht $p \geq 0{,}98$

10. Eine bestimmte Maschine besteht aus 8 unabhängig voneinander arbeitenden Teilen. Jedes Teil funktioniert mit der Wahrscheinlichkeit p nicht. Fallen mindestens 2 dieser Teile aus, wird die Maschine funktionsunfähig. Wie groß darf p höchstens sein, damit die Maschine mit (mindestens) 80 % Sicherheit arbeiten kann?

$n = 8$, $P(X \geq 2) < 0{,}20$, größtes n gesucht $p \leq 0{,}10$

11. Ein Multiple-Choise-Test besteht aus 12 Fragen mit jeweils vier Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Wie viele richtige Antworten müssen für das Bestehen des Tests mindestens verlangt werden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass man durch zufälliges Raten besteht, kleiner als 10 % sein soll?

X Anzahl richtige Antworten, $n = 12$, $p = 0{,}25$, kleinstes k gesucht $P(X \geq k) < 10\,\%$?

$k \geq 6$

Falls p gesucht ist (grafische Lösung):
In $P(X \leq k) =$ binomcdf(n, p, k) bzw. $P(X \geq k) = 1 -$ binomcdf(n, p, k-1) für p
X einsetzen und als Funktionsterm (Y=) eingeben. Mit einer gegebenen
Wahrscheinlichkeit als konstante Funktion wird in der Grafik die Schnittstelle ermittelt.

Falls n gesucht ist (tabellarische Lösung):
In $P(X \leq k) =$ binomcdf(n, p, k) bzw. $P(X \geq k) = 1 -$ binomcdf(n, p, k-1) für n
X einsetzen, als Funktionsterm (Y=) eingeben und die Tabelle betrachten,
Schrittweite: $\triangle$ Tbl = 1.

Entsprechendes falls k gesucht ist.

Bei Verwendung des GTRs sind bis auf einen eventuellen Übergang zur Gegenwahrscheinlichkeit keine weiteren Umformungen erforderlich.

1) Fragestellung erfassen, X Anzahl der Treffer im Sachzusammenhang festlegen
Welches Ereignis ein Treffer mit der Wahrscheinlichkeit p ist, ist meistens offensichtlich.

2) $n = ?$, $p = ?$, $k = ?$, Zwei Angaben sind im Aufgabentext enthalten.

3) gesucht: z. B. kleinstes n

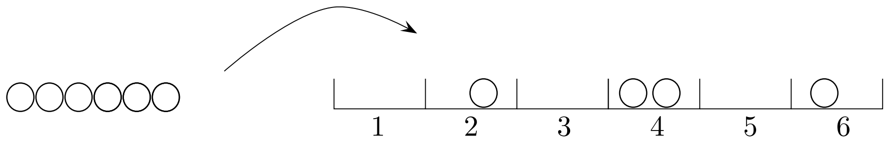
4) Ansatz notieren z. B. $P(X \geq 2) < 0{,}20$

5) Lösung mit GTR (Grafik für gesuchtes p sonst Tabelle) ermitteln

↑

↑ Kugeln in Fächer

$n = 10$ Kugeln sollen auf $m = 6$ Fächer zufällig verteilt werden.



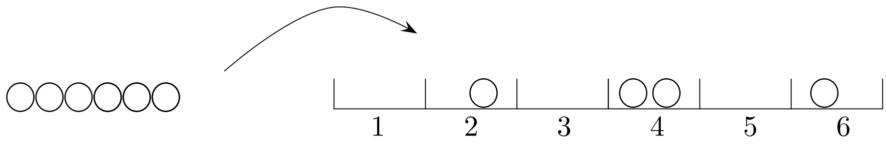
a) Untersuche, ob für ein bestimmtes Fach die Anzahl X der Kugeln binomialverteilt ist.
Tipp: Betrachte das Experiment aus Sicht des Faches. „Horch, was komm von draußen 'rein?“

b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit P, mit der ein bestimmtes Fach leer bleibt.

c) Untersuche, ob die Anzahl Y der leeren Fächer binomialverteilt mit der Wahrscheinlichkeit P ist.

↑ Kugeln in Fächer

$n = 10$ Kugeln sollen auf $m = 6$ Fächer zufällig verteilt werden.



a) Untersuche, ob für ein bestimmtes Fach die Anzahl X der Kugeln binomialverteilt ist.
Tipp: Betrachte das Experiment aus Sicht des Faches. „Horch, was komm von draußen 'rein?"

Jede Kugel gelangt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ in ein bestimmtes Fach.
Der Vorgang wird 10-mal unabhängig wiederholt.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \;\; p = \frac{1}{m}, \;\; q = 1 - p$$

b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit P, mit der ein bestimmtes Fach leer bleibt. $P = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$

c) Untersuche, ob die Anzahl Y der leeren Fächer binomialverteilt mit der Wahrscheinlichkeit P ist.

Y nimmt die Werte 0 bis 5 an.
Y kann nicht binomialverteilt sein,
da die zugrunde liegenden Ereignisse nicht unabhängig sind.

Wahrscheinlichkeit für 5 leere Fächer: P^5 (binomialverteilt), jedoch ist $6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10}$ richtig.
Alle 10 Kugeln sind dann in einem bestimmten Fach.

Erwartungswert für 5 leere Fächer: $5P$ (binomialverteilt),
jedoch ist $6P$ nach der Häufigkeitsinterpretation richtig.

↑ Wartezeiten in einer Bernoulli-Kette der Länge n

a) Erster Treffer im k-ten Versuch

b) Erster Treffer frühestens im k-ten Versuch

c) Erster Treffer spätestens im k-ten Versuch

d) i-ter Treffer im k-ten Versuch

e) i-ter Treffer frühestens im k-ten Versuch

f) i-ter Treffer spätestens im k-ten Versuch

↑ Wartezeiten in einer Bernoulli-Kette der Länge n

a) Erster Treffer im k-ten Versuch

$P(E) = P_p^{k-1}(X = 0) \cdot p$

$P(E) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

vorher kein Treffer, erst im k-ten Versuch

b) Erster Treffer frühestens im k-ten Versuch

$P(E) = P^{k-1}(X = 0)$

$P(E) = (1-p)^{k-1}$

vorher kein Treffer

c) Erster Treffer spätestens im k-ten Versuch

$P(E) = 1 - P_p^{k}(X = 0)$

$P(E) = 1 - (1-p)^{k}$

Gegenereignis von: Kein Treffer in k Versuchen

d) i-ter Treffer im k-ten Versuch

$P(E) = P_p^{k-1}(X = i-1) \cdot p$

vorher $i-1$ Treffer, Treffer im k-ten Versuch

e) i-ter Treffer frühestens im k-ten Versuch

$P(E) = P_p^{k-1}(X \leq i-1)$

höchstens $i-1$ Treffer in $k-1$ Versuchen

f) i-ter Treffer spätestens im k-ten Versuch

$P(E) = 1 - P_p^{k}(X \leq i-1)$

Gegenereignis von: Höchstens $i-1$ Treffer in k Versuchen

Beachte i-ter Treffer: Weitere sind möglich.

↑ Wartezeiten in einer Bernoulli-Kette

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dem ersten Erfolg genau k Misserfolge vorausgehen?

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint der erste Erfolg beim k-ten Versuch oder noch später?

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dem 2. Erfolg genau k Versuche vorausgehen?

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dem m-ten Erfolg genau k Versuche vorausgehen?

5. Ein Laplace-Würfel werde solange geworfen, bis die zweite 6 erscheint. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies

   a) beim 12. Wurf geschieht,

   b) frühestens beim 12. Wurf geschieht,

   c) spätestens beim 12. Wurf geschieht?

↑ Wartezeiten in einer Bernoulli-Kette

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dem ersten Erfolg genau k Misserfolge vorausgehen? $P_p^k(X=0)\cdot p=(1-p)^k\cdot p$

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint der erste Erfolg beim k-ten Versuch oder noch später? $P_p^{k-1}(X=0)=(1-p)^{k-1}$

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dem 2. Erfolg genau k Versuche vorausgehen? $P_p^k(X=1)\cdot p=k\cdot p\cdot(1-p)^{k-1}\cdot p$

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dem m-ten Erfolg genau k Versuche vorausgehen? $P_p^k(X=m-1)\cdot p=\binom{k}{m-1}\,p^{m-1}\cdot(1-p)^{k-(m-1)}\cdot p$

5. Ein Laplace-Würfel werde solange geworfen, bis die zweite 6 erscheint. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies

   a) beim 12. Wurf geschieht, $P_{1/6}^{11}(X=1)\cdot\frac{1}{6}=11\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=4{,}9\,\%$

   b) frühestens beim 12. Wurf geschieht, $P_{1/6}^{11}(X\le 1)=43{,}1\,\%$

   c) spätestens beim 12. Wurf geschieht? $1-P_{1/6}^{12}(X\le 1)=61{,}9\,\%$

Beim zehnmaligen Losen ist die Wahrscheinlichkeit mindestens einmal zu gewinnen mindestens $40\,\%$. Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Losen mindestens sein?

↑

Beim zehnmaligen Losen ist die Wahrscheinlichkeit mindestens einmal zu gewinnen mindestens 40 %. Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Losen mindestens sein?

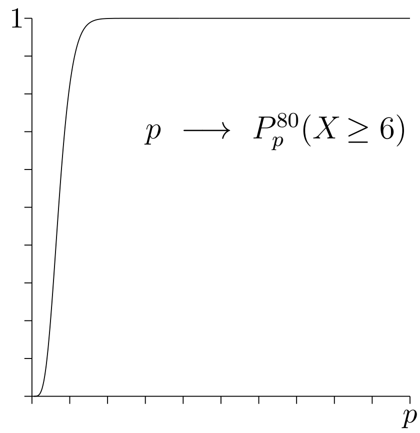
$$\begin{aligned} P_p^{10}(X \geq 1) &\geq 0{,}4 \\ 1 - q^{10} &\geq 0{,}4 \\ &\dots \\ p &\geq 0{,}05 \end{aligned}$$

↑

1. Ein Hersteller von Flaschen behauptet, dass höchstens 5 % der Flaschen Farbveränderungen aufweisen. Ein Händler kontrolliert eine Flaschenlieferung mit einer Stichprobe vom Umfang 80 (klein gegenüber der Anzahl der Flaschen in der Lieferung).

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit (höchstens) haben sechs und mehr Flaschen Farbveränderungen?

   b) Erläutern Sie die Grafik.



   c) Laut Liefervertrag dürfen Lieferungen zurückgewiesen werden, in deren Stichprobe sich mindestens k Flaschen mit Farbveränderungen befinden. Das k ist so zu wählen, dass höchstens 5 % der Lieferungen ungerechtfertigt zurückgewiesen werden können. Ermitteln Sie k.

2. Eine Glühlampe, die zufällig der Produktion entnommen wird, leuchtet einwandfrei mit der unbekannten Wahrscheinlichkeit p. Jemand entnimmt zufällig 40 Glühlampen. Mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % sollen mindestens 38 Glühlampen dieser Stichprobe einwandfrei sein.
   Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit p mindestens sein?

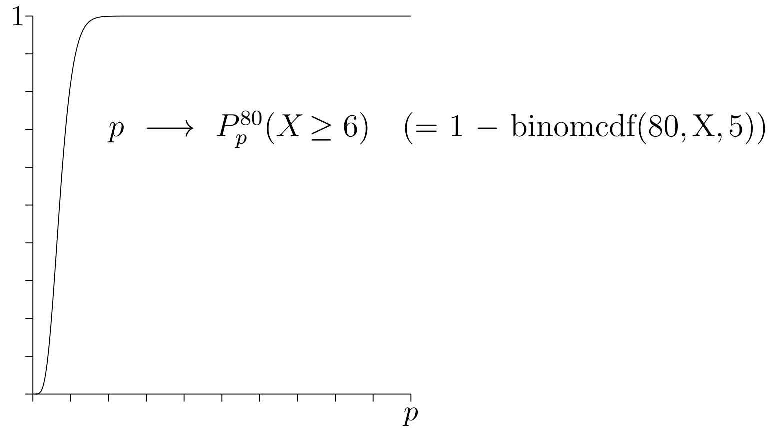
3. Ein Zahnarzt weiß, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Patienten Karies zu diagnostizieren, etwa 0,8 beträgt. Wie viele Karteikarten muss man der Patientenkartei zufällig entnehmen, wenn dabei mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % drei oder mehr Patienten mit Kariesbefund sein sollen?

1. Ein Hersteller von Flaschen behauptet, dass höchstens 5 % der Flaschen Farbveränderungen aufweisen. Ein Händler kontrolliert eine Flaschenlieferung mit einer Stichprobe vom Umfang 80 (klein gegenüber der Anzahl der Flaschen in der Lieferung).

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit (höchstens) haben sechs und mehr Flaschen Farbveränderungen?

   $$P_p^{80}(X \geq 6) = 21{,}1\,\%$$

   b) Erläutern Sie die Grafik.



Jedem p wird die Wahrscheinlichkeit $P_p^{80}(X \geq 6)$ zugeordnet.

Der Graph steigt steil an, für $p = 0{,}1$ ist die Wahrscheinlichkeit bereits $p = 0{,}8$.

...

   c) Laut Liefervertrag dürfen Lieferungen zurückgewiesen werden, in deren Stichprobe sich mindestens k Flaschen mit Farbveränderungen befinden. Das k ist so zu wählen, dass höchstens 5 % der Lieferungen ungerechtfertigt zurückgewiesen werden können. Ermitteln Sie k.

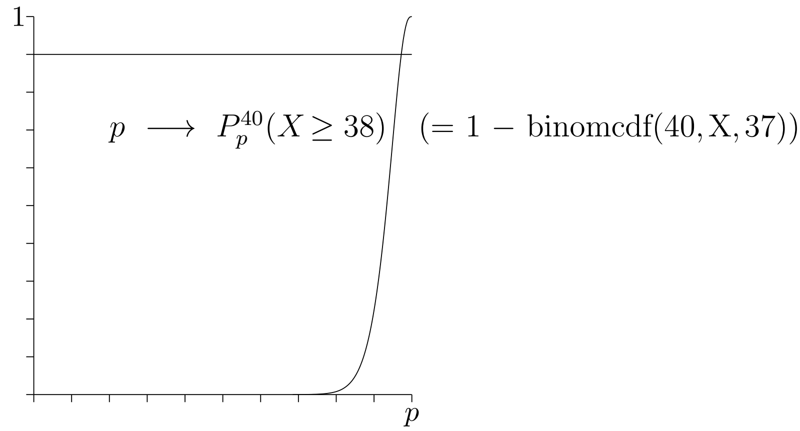
   minimales k mit $P_{0,05}^{80}(X \geq k) \leq 5\,\%$, $k = 8$ (tabellarisch)

   $\text{Y1} = 1 - \text{binomcdf}(80, 0.05, \text{X} - 1)$

X	Y1
7	.105
8	.047

2. Eine Glühlampe, die zufällig der Produktion entnommen wird, leuchtet einwandfrei mit der unbekannten Wahrscheinlichkeit p. Jemand entnimmt zufällig 40 Glühlampen. Mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % sollen mindestens 38 Glühlampen dieser Stichprobe einwandfrei sein.
   Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit p mindestens sein?

   minimales p mit $P_p^{40}(X \geq 38) \geq 90\,\%$, mindestens $p = 97{,}2\,\%$ (grafisch)



↑

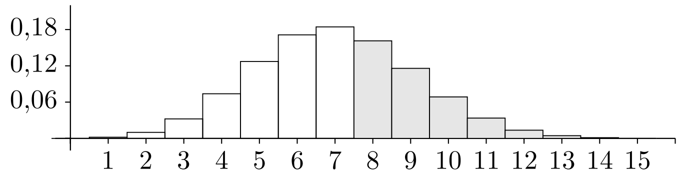
3. Ein Zahnarzt weiß, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Patienten Karies zu diagnostizieren, etwa 0,8 beträgt. Wie viele Karteikarten muss man der Patientenkartei mindestens zufällig entnehmen, wenn dabei mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % drei oder mehr Patienten mit Kariesbefund sein sollen?

minimales n mit $P_{0,8}^{n}(X \geq 3) \geq 95\,\%$, mindestens $n = 6$ (tabellarisch)

Y1 = 1 − binomcdf(X, 0.8, 2)

X	Y1
5	.942
6	.983

↑

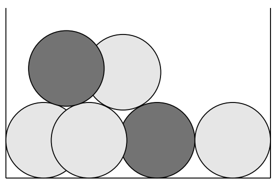


Die Abbildung zeigt das Histogramm der Binomialverteilung mit den Parametern $n = 20$ und $p = 0{,}35$.
Entscheiden Sie für jede der drei Sachsituationen, ob die Situation durch diese Verteilung modelliert werden kann und der grau gefärbte Bereich zu der Frage passt.

a) Aus Erfahrung weiß der Küchenchef, dass 35 % der Besucher einer Kantine Menü II wählen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei den ersten 20 Gästen 8-mal Menü II verkauft?

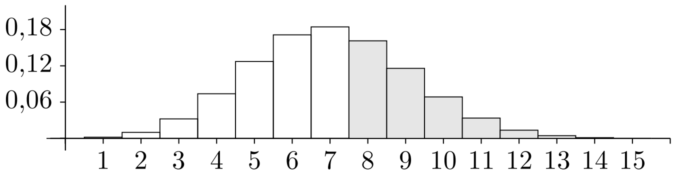
b) In einem Stoffbeutel mit 100 Schokoladenkugeln sind 35 mit Nougatfüllung. Auf einem Kindergeburtstag sind 20 Kinder. Nach einem Spiel darf jedes Kind der Reihe nach ohne hinzusehen eine Kugel ziehen (und aufessen). Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 8 Nougatkugeln gezogen?

c) Peter spielt oft Darts. Er trifft den innersten Kreis der Scheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von 35 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er diesen bei 20 Würfen mindestens 8-mal?



Aus einer Urne werden 6 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 2 schwarze und 4 graue Kugeln zu ziehen?

↑



Die Abbildung zeigt das Histogramm der Binomialverteilung mit den Parametern $n = 20$ und $p = 0{,}35$.
Entscheiden Sie für jede der drei Sachsituationen, ob die Situation durch diese Verteilung modelliert werden kann und der grau gefärbte Bereich zu der Frage passt.

a) Aus Erfahrung weiß der Küchenchef, dass 35 % der Besucher einer Kantine Menü II wählen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei den ersten 20 Gästen 8-mal Menü II verkauft?

Für eine Binomialverteilung ist $P_{0,35}^{20}(X = 8)$ zu ermitteln,
im Diagramm wird $P_{0,35}^{20}(X \geq 8)$ veranschaulicht.

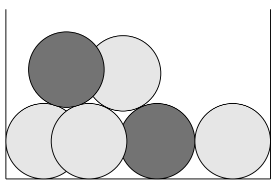
b) In einem Stoffbeutel mit 100 Schokoladenkugeln sind 35 mit Nougatfüllung. Auf einem Kindergeburtstag sind 20 Kinder. Nach einem Spiel darf jedes Kind der Reihe nach ohne hinzusehen eine Kugel ziehen (und aufessen). Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 8 Nougatkugeln gezogen?

Es liegt eine hypergeometrische Verteilung vor, Ziehen ohne Zurücklegen.
Jedoch kann eine hypergeometrische Verteilung durch eine Binomialverteilung approximiert werden, $P = 0{,}515$ hypergeometrisch, $P = 0{,}511$ binomial.

c) Peter spielt oft Darts. Er trifft den innersten Kreis der Scheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von 35 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er diesen bei 20 Würfen mindestens 8-mal?

Für eine Binomialverteilung ist $P_{0,35}^{20}(X \geq 8)$ zu ermitteln,
das wird im Diagramm veranschaulicht.

Aus einer Urne werden 6 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 2 schwarze und 4 graue Kugeln zu ziehen?



X Anzahl der schwarzen Kugeln in der Stichprobe

$$P(X = 2) = \binom{6}{2} p^2 q^4,\ p = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 2) = \frac{80}{243} \approx \frac{1}{3}$$

↑

Student A muss einen medizinischen Test mit 80 ja/nein-Fragen bestehen.
Hierfür sind mindestens 60 % richtig zu beantworten.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er es ausschließlich durch Raten schafft?

b) Wie wären seine Chancen, wenn er ein wenig lernen würde,
so dass er in mindestens 65 % der Fälle richtig läge?

c) Wie groß müsste seine Trefferquote mindestens sein,
damit er mit mindestens 95 %iger Wahrscheinlichkeit den Test besteht?

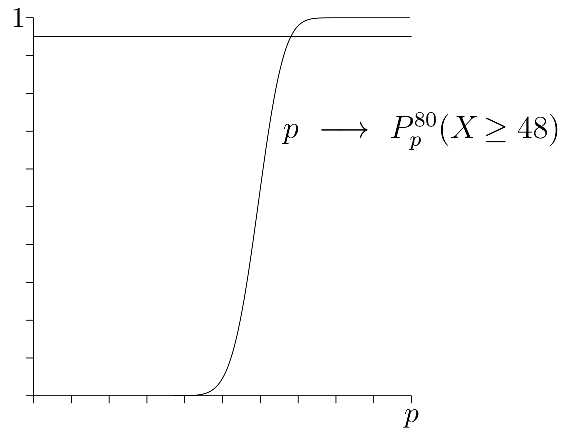
↑

Student A muss einen medizinischen Test mit 80 ja/nein-Fragen bestehen.
Hierfür sind mindestens 60 % richtig zu beantworten.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er es ausschließlich durch Raten schafft? 4,6 %

b) Wie wären seine Chancen, wenn er ein wenig lernen würde,
so dass er in mindestens 65 % der Fälle richtig läge? 85,4 %

c) Wie groß müsste seine Trefferquote mindestens sein,
damit er mit mindestens 95 %iger Wahrscheinlichkeit den Test besteht? 68,1 %



↑

In einer Bevölkerung grassiert eine Viruserkrankung. Der Anteil der infizierten Personen, bei denen die Krankheit noch nicht ausgebrochen ist, ist p. Mit einem neu entwickelten Bluttest kann man das Virus sicher nachweisen. Er soll bei einer Reihenuntersuchung eingesetzt werden, um die Krankheit bereits vor Ausbruch zu diagnostizieren. Um die Zahl der teuren Tests möglichst klein zu halten, wird dabei Blut von 20 Personen gemischt und untersucht. Nur wenn sich dabei das Virus nachweisen lässt, wird das Blut jeder der 20 Personen noch einmal einzeln untersucht.

a) Man geht zunächst von $p = 0{,}05$ aus. Mit wie vielen Tests muss man durchschnittlich bei Gruppen von 20 Personen rechnen?

b) Für welchen Wert von p sind bei diesem Verfahren durchschnittlich 10 Tests pro Gruppe von 20 Personen zu erwarten?

In einer Bevölkerung grassiert eine Viruserkrankung. Der Anteil der infizierten Personen, bei denen die Krankheit noch nicht ausgebrochen ist, ist p. Mit einem neu entwickelten Bluttest kann man das Virus sicher nachweisen. Er soll bei einer Reihenuntersuchung eingesetzt werden, um die Krankheit bereits vor Ausbruch zu diagnostizieren. Um die Zahl der teuren Tests möglichst klein zu halten, wird dabei Blut von 20 Personen gemischt und untersucht. Nur wenn sich dabei das Virus nachweisen lässt, wird das Blut jeder der 20 Personen noch einmal einzeln untersucht.

a) Man geht zunächst von $p = 0{,}05$ aus. Mit wie vielen Tests muss man durchschnittlich bei Gruppen von 20 Personen rechnen?

$$E(X) = 1 \cdot P_{0,05}^{20}(X = 0) + 21 \cdot P_{0,05}^{20}(X \geq 1) = 13{,}8$$

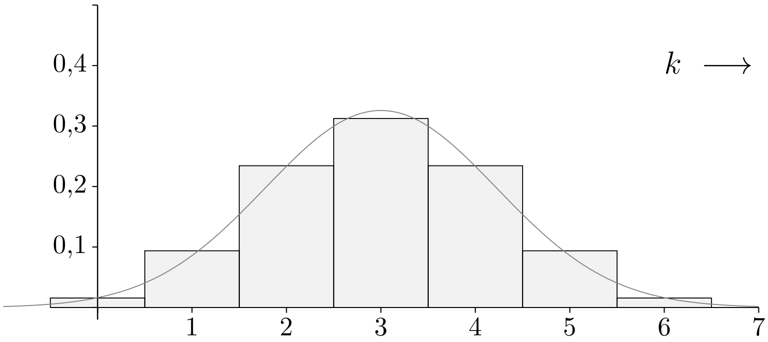
Man muss durchschnittlich mit etwa 14 Tests pro Gruppe rechnen.

b) Für welchen Wert von p sind bei diesem Verfahren durchschnittlich 10 Tests pro Gruppe von 20 Personen zu erwarten?

$$E(X) = 1 \cdot P_{p}^{20}(X = 0) + 21 \cdot P_{p}^{20}(X \geq 1) = 10$$

$p \approx 0{,}029$ GTR

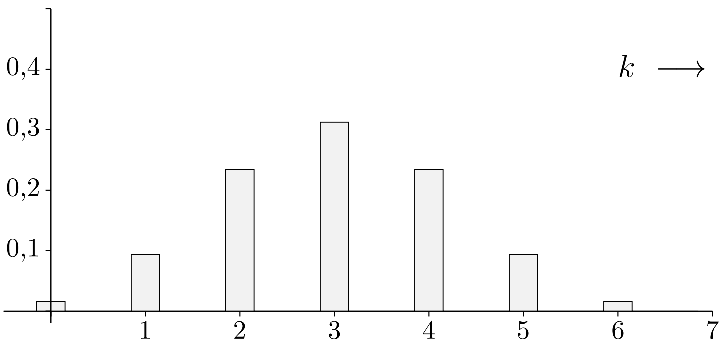
↑ Histogramm/Stabdiagramm



$$k \longrightarrow P(X=k) = \text{binompdf(n, p, k)}$$

$$n = 6$$
$$p = \frac{1}{2}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsvariablen kann mit einem Histogramm veranschaulicht werden. Die Rechtecke liegen direkt nebeneinander. Diese grafische Darstellung eignet sich z. B. für Messdaten, für die eine Klasseneinteilung vorgenommen wurde. Der Übergang zur Normalverteilung erscheint naheliegend.



$$k \longrightarrow P(X=k) = \text{binompdf(n, p, k)}$$

$$n = 6$$
$$p = \frac{1}{2}$$

Ein Stab- bzw. Säulendiagramm für eine binomialverteilte Zufallsvariable hebt hervor, dass es sich um eine diskrete Zufallsvariable handelt. Im Gegensatz zur stetigen Zufallsvariablen werden nur endlich viele Werte angenommen. Die Stabbreite ist bedeutungslos.

↑ Bernoulli-Kette hinterfragen

Manchmal wird in Aufgaben verlangt, dass kritisch hinterfragt wird, ob bei Versuchswiederholungen die Annahme, dass eine Bernoulli-Kette vorliegt, gerechtfertigt ist.
Genauer:
Es soll kritisch hinterfragt werden, ob eine Modellierung der Versuchswiederholungen mit einer Bernoulli-Kette gerechtfertigt ist.

Mögliche Ansatzpunkte:

Sind die einzelnen Teilexperimente wirklich voneinander unabhängig (gegenseitige Beeinflussung der einzelnen Versuchsdurchführungen o. ä.)?
Ändert sich die Wahrscheinlichkeit für "Treffer" möglicherweise während der Durchführung des Zufallsexperiments (Abnutzungserscheinungen bei Materialien, Lerneffekte bei Versuchspersonen o. ä.)?
Gibt es außer den beiden Ergebnissen vielleicht noch "Ausnahmefälle", bei denen nicht klar ist, ob sie als Treffer oder Niete zu werten sind?

Eine Bernoulli-Kette liegt vor (d. h. die Modellierung mit einer Bernoulli-Kette ist gerechtfertigt), wenn ein Bernoulli-Experiment n-mal unabhängig voneinander durchgeführt wird. Das Adjektiv *unabhängig* bezieht sich auf die Versuchswiederholungen in dem Sinne, wie es gerade geschildert wurde. Zu unterscheiden ist hiervon die (vorliegende) stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen verschiedener Stufen im Modell der Bernoulli-Kette (Binomialverteilung), die leicht zu beweisen wäre, jedoch in der Schule nicht thematisiert wird, siehe Anhang.

Eine *Kette* setzt sich gemeinhin aus miteinander verbundenen Gliedern zusammen.
Bei einer Bernoulli-Kette sind jedoch die Teilversuche unabhängig voneinander, die Trefferwahrscheinlichkeit bleibt stets gleich. Eine alternative Bezeichnung ist Bernoulli-Prozess. Die Länge n gibt nur die Anzahl der nummerierten Teilversuche an. Diese könnten auch zeitgleich durchgeführt werden.

Die Bernoulli-Kette ist eine Markov-Kette, bei der sich die stochastischen Abhängigkeiten durch die Wahl gleicher Wahrscheinlichkeiten verflüchtigt haben.

↑ Alkohol-Test

Erfahrungsgemäß ist nach 22 Uhr ein Drittel aller Autofahrer alkoholisiert unterwegs, 10 % von ihnen haben obendrein keinen Führerschein. Insgesamt liegt der Anteil der Autofahrer ohne Führerschein bei etwa 5 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Autofahrer

a) alkoholisiert und ohne Führerschein unterwegs ist,

b) nüchtern, aber ohne Führerschein fährt,

c) korrekt (d. h. mit Führerschein und nüchtern) unterwegs ist?

↑ Alkohol-Test

Erfahrungsgemäß ist nach 22 Uhr ein Drittel aller Autofahrer alkoholisiert unterwegs, 10 % von ihnen haben obendrein keinen Führerschein. Insgesamt liegt der Anteil der Autofahrer ohne Führerschein bei etwa 5 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Autofahrer

a) alkoholisiert und ohne Führerschein unterwegs ist, 0,0333

b) nüchtern, aber ohne Führerschein fährt, 0,0167

c) korrekt (d. h. mit Führerschein und nüchtern) unterwegs ist? 0,6500

A Fahrer ist alkoholisiert
F Fahrer besitzt einen Führerschein

	F	$\overline{F}$	$\sum$
A	0,3000	0,0333	0,3333
$\overline{A}$	0,6500	0,0167	0,6667
$\sum$	0,9500	0,0500	1

Ein Polizist hält zwischen 23.30 Uhr und 0.00 Uhr willkürlich 6 Fahrzeuge auf.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

d) alle Fahrer betrunken sind,

e) wenigstens ein Fahrer nüchtern ist,

f) gleich viele nüchterne wie betrunkene Fahrer kontrolliert werden,

g) mehr als ein Drittel der kontrollierten Fahrer betrunken sind?

↑ Alkohol-Test

A Fahrer ist alkoholisiert
F Fahrer besitzt einen Führerschein

	F	$\overline{F}$	$\sum$
A	0,3000	0,0333	0,3333
$\overline{A}$	0,6500	0,0167	0,6667
$\sum$	0,9500	0,0500	1

Ein Polizist hält zwischen 23.30 Uhr und 0.00 Uhr willkürlich 6 Fahrzeuge auf.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

d) alle Fahrer betrunken sind, $0{,}0333^6 = 0{,}0014$

e) wenigstens ein Fahrer nüchtern ist, Gegenereignis $1 - 0{,}0014 = 0{,}9986$

f) gleich viele nüchterne wie betrunkene Fahrer kontrolliert werden, $P^6_{1/3}(X = 3) = 0{,}2195$

g) mehr als ein Drittel der kontrollierten Fahrer betrunken sind? $P^6_{1/3}(Y > 2) = 0{,}3196$

↑ Aufnahmetest

300 Personen bewerben sich für eine Schule, wobei im Schnitt 60 % den Aufnahmetest nicht bestehen. Eine Klasse umfasst höchstens 20 Schüler. Mit welcher Wahrscheinlichkeit müssen im neuen Schuljahr mindestens 5 (6, 7) Klassen eingerichtet werden?

↑ Aufnahmetest

300 Personen bewerben sich für eine Schule, wobei im Schnitt 60 % den Aufnahmetest nicht bestehen. Eine Klasse umfasst höchstens 20 Schüler. Mit welcher Wahrscheinlichkeit müssen im neuen Schuljahr mindestens 5 (6, 7) Klassen eingerichtet werden?

5 Klassen: $P_{0,4}^{300}(81 \leq X \leq 100) = 0{,}010$

6 Klassen: $P_{0,4}^{300}(101 \leq X \leq 120) = 0{,}515$

7 Klassen: $P_{0,4}^{300}(121 \leq X \leq 140) = 0{,}467$

$\uparrow$ Anhang Bernoulli-Kette
Zur stochastischen Unabhängigkeit

Sei z. B. $n = 5$.

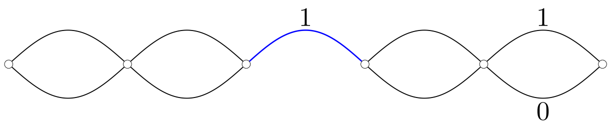
$A_k = 1,$ Treffer im k. Versuch, $P(A_k) = p$

$\overline{A}_k = 0,$ kein Treffer im k. Versuch, $P(\overline{A}_k) = q$

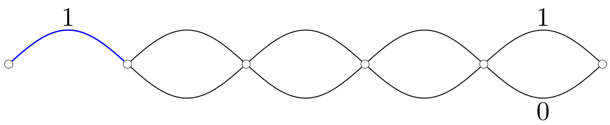
Die stochastische Unabhängigkeit spiegelt sich wider in (z. B.)

$P(1, 0, 0, 1, 1) = P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4 \cap A_5) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot P(A_4) \cdot P(A_5)$

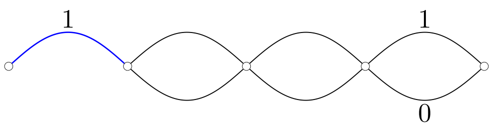
Es soll exemplarisch $P(A_3) = P(\smile, \smile, 1, \smile, \smile) = p$ gezeigt werden.

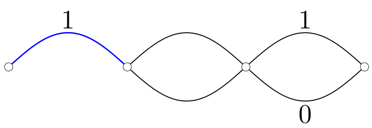


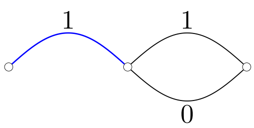
Hierzu ist wegen $a \cdot b = b \cdot a$ gleichwertig:

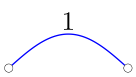


Zu jedem Pfad, der mit 1 endet, gibt es einen Pfad, der mit 0 endet. Somit gilt $P(a1) + P(a0) = P(a) \cdot p + P(a) \cdot q = P(a)(p + q) = P(a)$. Mit dieser Überlegung können die Pfade schrittweise solange verkürzt werden, bis der Pfad 1 mit $P(1) = p$ übrig bleibt.



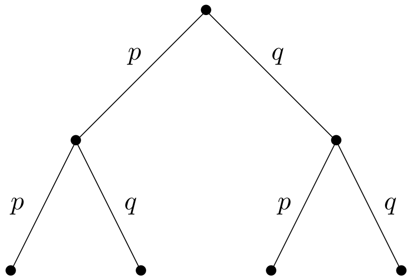


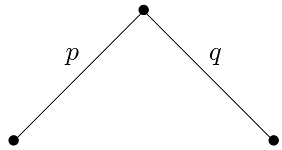




alternative kurze Begründung
Die Gesamtwahrscheinlichkeit jeder Bernoulli-Kette beträgt 1 (hier $n = 4,$ p ausklammern).

Mit den unteren Stufen eines binären Pfaddiagramms kann die Situation auch mit einem Blick erfasst werden.





$$pp + pq = p(p+q) = p$$

↑ Ohne GTR   Bayern 2023 Niveau III

In einen leeren Behälter werden 3 Kugeln gelegt. Dabei wird die Farbe jeder Kugel durch Werfen eines Würfels festgelegt, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind. Wird die „1“ oder die „2“ erzielt, wird eine gelbe Kugel gewählt, sonst eine schwarze.

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich nun mindestens zwei schwarze Kugeln im Behälter befinden, $\frac{20}{27}$ beträgt.

b) Aus dem Behälter werden zwei der drei Kugeln zufällig entnommen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind.

$\uparrow$ Ohne GTR Bayern 2023 Niveau III

In einen leeren Behälter werden 3 Kugeln gelegt. Dabei wird die Farbe jeder Kugel durch Werfen eines Würfels festgelegt, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind. Wird die „1“ oder die „2“ erzielt, wird eine gelbe Kugel gewählt, sonst eine schwarze.

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich nun mindestens zwei schwarze Kugeln im Behälter befinden, $\frac{20}{27}$ beträgt.

$P_{\text{gelb}} = \frac{1}{3}$ (es wird eine gelbe Kugel gewählt)

$P_{\text{schwarz}} = \frac{2}{3}$ (es wird eine schwarze Kugel gewählt)

Sei X die Anzahl der schwarzen Kugeln, X ist binomialverteilt.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big) =$$

$$1 - \left(\tfrac{1}{3}\right) - 3 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = 1 - \tfrac{1}{27} - \tfrac{2}{9} = \ldots = \tfrac{20}{27}$$

b) Aus dem Behälter werden zwei der drei Kugeln zufällig entnommen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind.

Für das Ereignis müssen vor der Entnahme 3 oder 2 schwarze Kugeln im Behälter sein.

1. Im Behälter befinden sich 3 schwarze Kugeln und es werden zwei schwarze Kugeln gezogen:
$$P_1 = \tfrac{8}{27} \cdot 1 \cdot 1 = \tfrac{8}{27}$$
2. Im Behälter befinden sich 2 schwarze Kugeln und es werden zwei schwarze Kugeln gezogen:
$$P_2 = 3 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2} = \ldots = \tfrac{4}{27}$$

$$P_1 + P_2 = \tfrac{4}{9}$$

$\uparrow$ Paketzentrum IQB 2022 gA anspruchsvoll

In einem Paketzentrum werden pro Jahr viele Millionen Pakete angeliefert. Die Pakete werden automatisch nach ihrem Bestimmungsort sortiert. 10 % der Pakete haben das Ziel A, 7 % das Ziel B. Die übrigen Pakete haben andere Ziele.
Alle im Paketzentrum angelieferten Pakete werden im Rahmen der Sortierung gewogen. 5 % der Pakete haben ein Gewicht von mehr als 10 kg und gelten damit als schwer. Von den Paketen mit dem Ziel A sind 8 % schwer.

a) Von den Paketen, die das Ziel B haben, sind 2 % schwer. Berechnen Sie den Anteil der schweren Pakete unter denen, die weder Ziel A noch Ziel B haben.

b) Im Paketzentrum werden 20 Pakete zufällig ausgewählt.

   Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses im Sachzusammenhang kann mit dem Term

   $$0{,}9^{14} \cdot \left[0{,}9^6 + \binom{6}{1} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^5 + \binom{6}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^4 + \binom{6}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^3\right]$$

   berechnet werden.

   Geben Sie ein passendes Ereignis an.

c) Eines der anderen Ziele ist Ziel C. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 20 ausgewählten Paketen keines das Ziel C hat, beträgt etwa 54 %. Ermitteln Sie den Anteil der Pakete mit dem Ziel C unter allen Paketen, die pro Jahr im Paketzentrum angeliefert werden.

↑ Paketzentrum

In einem Paketzentrum werden pro Jahr viele Millionen Pakete angeliefert. Die Pakete werden automatisch nach ihrem Bestimmungsort sortiert. 10 % der Pakete haben das Ziel A, 7 % das Ziel B. Die übrigen Pakete haben andere Ziele.
Alle im Paketzentrum angelieferten Pakete werden im Rahmen der Sortierung gewogen. 5 % der Pakete haben ein Gewicht von mehr als 10 kg und gelten damit als schwer. Von den Paketen mit dem Ziel A sind 8 % schwer.

a) Von den Paketen, die das Ziel B haben, sind 2 % schwer. Berechnen Sie den Anteil der schweren Pakete unter denen, die weder Ziel A noch Ziel B haben.

gesuchter Anteil x
$0{,}1 \cdot 0{,}08 + 0{,}07 \cdot 0{,}02 + (1 - 0{,}1 - 0{,}07) \cdot x = 0{,}05$ liefert $x \approx 0{,}049$.

b) Im Paketzentrum werden 20 Pakete zufällig ausgewählt.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses im Sachzusammenhang kann mit dem Term

$$0{,}9^{14} \cdot \left[0{,}9^6 + \binom{6}{1} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^5 + \binom{6}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^4 + \binom{6}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^3\right]$$

berechnet werden.
Geben Sie ein passendes Ereignis an.

Von den 20 ausgewählten Paketen haben die ersten 14 nicht das Ziel A und von den weiteren 6 haben höchstens 3 das Ziel A.

c) Eines der anderen Ziele ist Ziel C. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 20 ausgewählten Paketen keines das Ziel C hat, beträgt etwa 54 %. Ermitteln Sie den Anteil der Pakete mit dem Ziel C unter allen Paketen, die pro Jahr im Paketzentrum angeliefert werden.

Y: Anzahl der Pakete, die das Ziel C haben.
Y ist binomialverteilt mit p und $n = 20$.
$P(Y = 0) = 0{,}54$ liefert $(1 - p)^{20} = 0{,}54$ und damit den gesuchten Anteil $p \approx 0{,}03$.

↑ Elektroautos IQB 2022 gA anspruchsvoll

Unter den Elektroautos eines Herstellers weisen 30 % mindestens eines der beiden Ausstattungsmerkmale A bzw. B auf.

a) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $1 - 10 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^9 - 0{,}7^{10}$ berechnet werden kann.
Geben Sie ein passendes Ereignis an.

b) Zehn Elektroautos des Herstellers werden nacheinander betrachtet. Ermitteln Sie, wie viele Autos mit dem Merkmal A sich unter diesen zehn Autos mindestens befinden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % von den ersten drei betrachteten Autos mindestens eines das Merkmal A aufweist.

↑ Elektroautos IQB 2022 gA anspruchsvoll

Unter den Elektroautos eines Herstellers weisen 30 % mindestens eines der beiden Ausstattungsmerkmale A bzw. B auf.

a) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $1 - 10 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^9 - 0{,}7^{10}$ berechnet werden kann.
Geben Sie ein passendes Ereignis an.

> Zufallsexperiment: Zehn Elektroautos des Herstellers werden zufällig ausgewählt.
> Ereignis: „Unter den zufällig ausgewählten Elektroautos weisen mindestens zwei eines der beiden Merkmale A und B auf."

b) Zehn Elektroautos des Herstellers werden nacheinander betrachtet. Ermitteln Sie, wie viele Autos mit dem Merkmal A sich unter diesen zehn Autos mindestens befinden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % von den ersten drei betrachteten Autos mindestens eines das Merkmal A aufweist.

> gesuchte Anzahl: k
> Aus $1 - \frac{10-k}{10} \cdot \frac{9-k}{9} \cdot \frac{8-k}{8} \geq 0{,}9$ folgt $k \geq 5$.
>
> nicht korrekt wäre
> Aus $1 - \left(\frac{10-k}{10}\right)^3 \geq 0{,}9$ folgt $k \geq 6$.
> Aus $\left(1 - \frac{k}{10}\right)^3 < 0{,}1$ folgt $k \geq 6$.

↑ Leiterplatten Ni 2021 gA mit Anmerkung

Ein Unternehmen produziert Leiterplatten zum Einbau in elektronische Geräte. Aus Erfahrung weiß man, dass 3 % der Leiterplatten fehlerhaft sind. 600 Leiterplatten werden zufällig ausgewählt. Die Anzahl der fehlerhaften Leiterplatten unter den ausgewählten kann durch eine binomialverteilte Zufallsgröße X beschrieben werden.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Leiterplatten
   - 25 Leiterplatten fehlerhaft sind.
   - maximal 20 Leiterplatten fehlerhaft sind.
   - mehr als 15 aber weniger als 30 Leiterplatten fehlerhaft sind.

b) Geben Sie die Bedeutung des folgenden Terms im Sachzusammenhang an:
   $\binom{600}{550} \cdot 0{,}97^{550} \cdot 0{,}03^{50} + \binom{600}{551} \cdot 0{,}97^{551} \cdot 0{,}03^{49}$

Jede fehlerhafte Leiterplatte wird untersucht. Sie weist entweder Fehler 1 oder Fehler 2 auf. Die Wahrscheinlichkeit für Fehler 1 beträgt 80 %, die für Fehler 2 beträgt 20 %. Beim Standardverfahren wird der vorliegende Fehler mit absoluter Sicherheit gefunden. Es wird zunächst Fehler 1 gesucht. Falls dieser an keiner Stelle vorliegt, muss die Stelle gesucht werden, an der Fehler 2 vorliegt. Die Suche von Fehler 1 kostet 12 €, die Suche von Fehler 2 kostet 3 €.

c) Geben Sie die Kosten an, die dem Unternehmen entstehen, wenn bei einer Leiterplatte der Fehler 2 gefunden wird.
   Weisen Sie nach, dass die zu erwartenden Kosten für das Standardverfahren 12,60 € pro Leiterplatte betragen.

Um Kosten einzusparen, wird für die fehlerhaften Leiterplatten ein Schnelltest vorgeschlagen: In diesem wird bei den fehlerhaften Leiterplatten ausschließlich Fehler 1 gesucht. Dieser Schnelltest kostet nur 2 €, allerdings wird ein vorhandener Fehler 1 nur in 50 % der Fälle gefunden. Wird mit diesem Schnelltest der Fehler 1 nicht gefunden[1], wird anschließend das Standardverfahren durchgeführt.

d) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Fehler 1 in diesem Schnelltest nicht gefunden wird, 60 % beträgt.
   Bestimmen Sie unter der Bedingung, dass bei dem Schnelltest Fehler 1 nicht gefunden wurde, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der vorhandene Fehler trotzdem Fehler 1 ist.

e) Untersuchen Sie, ob sich die zu erwartenden Kosten pro Leiterplatte für die Fehlersuche mit Schnelltest und Standardverfahren tatsächlich verringern.

[1] möglicherweise, weil er nicht vorhanden ist,

Ein Unternehmen produziert Leiterplatten zum Einbau in elektronische Geräte. Aus Erfahrung weiß man, dass 3 % der Leiterplatten fehlerhaft sind. 600 Leiterplatten werden zufällig ausgewählt. Die Anzahl der fehlerhaften Leiterplatten unter den ausgewählten kann durch eine binomialverteilte Zufallsgröße X beschrieben werden.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Leiterplatten

- 25 Leiterplatten fehlerhaft sind. $P(X = 25) \approx 0{,}023$
- maximal 20 Leiterplatten fehlerhaft sind. $P(X \leq 20) \approx 0{,}733$
- mehr als 15 aber weniger als 30 Leiterplatten fehlerhaft sind. $P(15 < X < 30) \approx 0{,}712$

b) Geben Sie die Bedeutung des folgenden Terms im Sachzusammenhang an:

$$\binom{600}{550} \cdot 0{,}97^{550} \cdot 0{,}03^{50} + \binom{600}{551} \cdot 0{,}97^{551} \cdot 0{,}03^{49}$$

Der Term stellt die Wahrscheinlichkeit dar, dass von 600 zufällig ausgewählten Leiterplatten 550 oder 551 fehlerfrei sind.

Jede fehlerhafte Leiterplatte wird untersucht. Sie weist entweder Fehler 1 oder Fehler 2 auf. Die Wahrscheinlichkeit für Fehler 1 beträgt 80 %, die für Fehler 2 beträgt 20 %. Beim Standardverfahren wird der vorliegende Fehler mit absoluter Sicherheit gefunden. Es wird zunächst Fehler 1 gesucht. Falls dieser an keiner Stelle vorliegt, muss die Stelle gesucht werden, an der Fehler 2 vorliegt. Die Suche von Fehler 1 kostet 12 €, die Suche von Fehler 2 kostet 3 €.

c) Geben Sie die Kosten an, die dem Unternehmen entstehen, wenn bei einer Leiterplatte der Fehler 2 gefunden wird. 15 €

Weisen Sie nach, dass die zu erwartenden Kosten für das Standardverfahren 12,60 € pro Leiterplatte betragen. Zu erwartende Kosten pro Platte: $0{,}8 \cdot 12\,€ + 0{,}2 \cdot 15\,€ = 12{,}60\,€$

Um Kosten einzusparen, wird für die fehlerhaften Leiterplatten ein Schnelltest vorgeschlagen: In diesem wird bei den fehlerhaften Leiterplatten ausschließlich Fehler 1 gesucht. Dieser Schnelltest kostet nur 2 €, allerdings wird ein vorhandener Fehler 1 nur in 50 % der Fälle gefunden. Wird mit diesem Schnelltest der Fehler 1 nicht gefunden[1], wird anschließend das Standardverfahren durchgeführt.

d) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Fehler 1 in diesem Schnelltest nicht gefunden wird, 60 % beträgt.

Fehler 1 wird während des Schnelltests in 50 % der Fälle gefunden, in denen Fehler 1 tatsächlich vorliegt, in allen anderen Fällen nicht.

$$1 - 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}8 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}6$$

Bestimmen Sie unter der Bedingung, dass bei dem Schnelltest Fehler 1 nicht gefunden wurde, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der vorhandene Fehler trotzdem Fehler 1 ist.

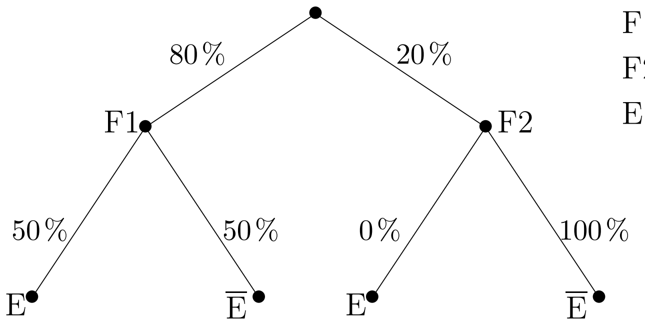
$$\frac{0{,}8 \cdot 0{,}5}{0{,}6} = \frac{2}{3}$$

e) Untersuchen Sie, ob sich die zu erwartenden Kosten pro Leiterplatte für die Fehlersuche mit Schnelltest und Standardverfahren tatsächlich verringern.

$$2\,€ + 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 12\,€ + 0{,}2 \cdot 15\,€ = 9{,}80\,€$$

Mit 9,80 € gegenüber 12,60 € für das Standardverfahren haben sich die zu erwartenden Kosten verringert.

[1]möglicherweise, weil er nicht vorhanden ist,



F1: „Fehler 1 vorhanden.“

F2: „Fehler 2 vorhanden.“

E: „Fehler 1 im Schnelltest gefunden.“

↑

↑ Smartphone-Spiel IQB 2021 gA

Bei einem Smartphone-Spiel kann jeder Spieler jeden Sonntag Sterne gewinnen. Dazu hat er an jedem Sonntag zehn Versuche. Bei jedem Versuch kann nur ein Stern gewonnen werden; die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt 40 %.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei zehn Versuchen mehr als sechs Sterne gewinnt.

b) Beurteilen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussage eines Spielers:
„Ich habe an den letzten drei Sonntagen jeweils acht Sterne gewonnen. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, an diesem Sonntag wieder acht Sterne zu gewinnen, deutlich kleiner als vorher."

c) An einem Sonntag nutzen vier Spieler jeweils die möglichen zehn Versuche zum Gewinnen von Sternen.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei zwei der vier Spieler jeweils fünf Sterne gewinnen.

d) Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Versuch einen Stern zu gewinnen, wird geändert. Anschließend beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, bei zehn Versuchen höchstens drei Sterne zu gewinnen, etwa 62 %.
Ermitteln Sie die geänderte Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Versuch einen Stern zu gewinnen, auf ganze Prozent genau.

Außerdem hat jeder Spieler täglich einmal die Möglichkeit, allein durch Starten des Spiels Bonuspunkte zu erhalten. Durch das Starten wird ihm automatisch eine zufällig bestimmte Anzahl von Bonuspunkten gutgeschrieben. Der Tabelle können die möglichen Anzahlen und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten entnommen werden.

Anzahl der Bonuspunkte	10	20	50
Wahrscheinlichkeit	50 %	40 %	10 %

e) Ein Spieler startet das Spiel an drei aufeinanderfolgenden Tagen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Spieler von Tag zu Tag weniger Bonuspunkte erhält.

f) Ein Spieler startet das Spiel an vier Tagen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Spieler dabei insgesamt 80 Bonuspunkte erhält.

g) Die Wahrscheinlichkeiten für 10 und 20 Bonuspunkte werden so geändert, dass die Spieler im Zeitraum von 200 Tagen, an denen das Spiel gestartet wird, im Mittel 3000 Bonuspunkte erhalten. Ermitteln Sie die beiden geänderten Wahrscheinlichkeiten.

Bei einem Smartphone-Spiel kann jeder Spieler jeden Sonntag Sterne gewinnen. Dazu hat er an jedem Sonntag zehn Versuche. Bei jedem Versuch kann nur ein Stern gewonnen werden; die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt 40 %.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei zehn Versuchen mehr als sechs Sterne gewinnt. X: Anzahl der gewonnenen Sterne, X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}4$, $P(X > 6) \approx 5\,\%$

b) Beurteilen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussage eines Spielers: „Ich habe an den letzten drei Sonntagen jeweils acht Sterne gewonnen. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, an diesem Sonntag wieder acht Sterne zu gewinnen, deutlich kleiner als vorher.“
Die Aussage ist falsch, da die einzelnen Spiele stochastisch unabhängig sind. Die Spiele der vergangenen Sonntage beeinflussen also nicht die Wahrscheinlichkeiten der zukünftigen Spiele.

c) An einem Sonntag nutzen vier Spieler jeweils die möglichen zehn Versuche zum Gewinnen von Sternen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei zwei der vier Spieler jeweils fünf Sterne gewinnen. Y: Anzahl der Spieler mit 5 Sternen, Y ist binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = P(X = 5) \approx 0{,}20$, $P(Y = 2) \approx 15\,\%$

d) Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Versuch einen Stern zu gewinnen, wird geändert. Anschließend beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, bei zehn Versuchen höchstens drei Sterne zu gewinnen, etwa 62 %.
Ermitteln Sie die geänderte Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Versuch einen Stern zu gewinnen, auf ganze Prozent genau. X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und unbekanntem Wert von p. Für $p = 0{,}32$ gilt $P(X \leq 3) \approx 59{,}6\,\%$ und für $p = 0{,}31$ gilt $P(X \leq 3) \approx 62{,}3\,\%$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 31 %.

Außerdem hat jeder Spieler täglich einmal die Möglichkeit, allein durch Starten des Spiels Bonuspunkte zu erhalten. Durch das Starten wird ihm automatisch eine zufällig bestimmte Anzahl von Bonuspunkten gutgeschrieben. Der Tabelle können die möglichen Anzahlen und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten entnommen werden.

Anzahl der Bonuspunkte	10	20	50
Wahrscheinlichkeit	50 %	40 %	10 %

e) Ein Spieler startet das Spiel an drei aufeinanderfolgenden Tagen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Spieler von Tag zu Tag weniger Bonuspunkte erhält. $0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 2\,\%$

f) Ein Spieler startet das Spiel an vier Tagen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Spieler dabei insgesamt 80 Bonuspunkte erhält. $4 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}1 + 0{,}4^4 \approx 8\,\%$

g) Die Wahrscheinlichkeiten für 10 und 20 Bonuspunkte werden so geändert, dass die Spieler im Zeitraum von 200 Tagen, an denen das Spiel gestartet wird, im Mittel 3000 Bonuspunkte erhalten. Ermitteln Sie die beiden geänderten Wahrscheinlichkeiten.
x: Wahrscheinlichkeit für 10 Bonuspunkte
$10x + (0{,}9 - x) \cdot 20 + 0{,}1 \cdot 50 = \frac{3000}{200}$, $x = 0{,}8$
Wahrscheinlichkeit für 10 Bonuspunkte: 80 %, für 20 Bonuspunkte: 10 %

↑ Fragestellungen gA, Stichworte

1. mehrstufiges Zufallsexperiment,
   Pfaddiagramm aufgrund weniger Angaben erstellen, Summe von Pfadwahrscheinlichkeiten,
   Gegenereignis, bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$, Erwartungswert ermitteln,
   Unabhängigkeit der Ereignisse A und B ist an gleichen Teilbäumen zu erkennen,

2. Vier-Felder-Tafel mit rel. oder absoluten Zahlen,
   Vier-Felder-Tafel aufgrund weniger Angaben erstellen,
   bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$,
   Unabhängigkeit der Ereignisse A und B bedeutet $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
   alternativ $P_B(A) = P_{\overline{B}}(A)$
   Vier-Felder-Tafel verquickt mit der Bernoulli-Kette, n und p sind dann gegeben.

3. Binomialverteilung, $P(X \leq k)$, $P(X < k)$, $P(X \geq k)$, $P(X > k)$, $P(a \leq X \leq b)$
   Anzahl der Treffer X höchstens k, kleiner als (weniger als), mindestens, größer als k,
   X im Intervall $[a, b]$ (mindestens a und höchstens b),
   Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ (Punktschätzung)
   $n = 40$, $p = 0{,}8$, $P(X \geq 29) \approx 91{,}2\,\%$
   $P(25 \leq X \leq 30) \approx 26{,}5\,\%$

   p, bzw. n ermitteln (GTR),
   Y ist binomialverteilt mit p und $n = 20$,
   $P(Y = 0) = 0{,}54$ liefert $(1-p)^{20} = 0{,}54$ und damit den gesuchten Anteil $p \approx 0{,}03$.

   $n = 30$, $p = 0{,}7$ Für welches (kleinste) k gilt: $P(X \geq k) < 5\,\%$?
   $26 \leq k \leq 30$, $P(X \geq 25) \approx 0{,}077$, $P(X \geq 26) \approx 0{,}030$

   Bedeutung eines Terms im Sachzusammenhang
   $$\binom{600}{550} \cdot 0{,}97^{550} \cdot 0{,}03^{50} + \binom{600}{551} \cdot 0{,}97^{551} \cdot 0{,}03^{49}$$

   Anteil (Wahrscheinlichkeit) berechnen (Ansatz mit unbekanntem Anteil)
   $$10x + (0{,}9 - x) \cdot 20 + 0{,}1 \cdot 50 = \frac{3000}{200}, \quad x = 0{,}8$$

   Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Treffer, die mindestens viermal
   so groß ist wie die Anzahl der Nichttreffer. $P(X \geq 80)$

   einzelne Pfade bei der Bernoulli-Kette $n = 15$, kein Treffer $P = q^{15}$

   Diagramm der Binomialverteilung (Histogramm) ist für $p = 0{,}5$ symmetrisch,
   für $p < 0{,}5$ nach links verschoben (beachte den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$),
   für $p > 0{,}5$ nach rechts verschoben.

   Anzahl der Nichttreffer mindestens k $P(Y \geq k)$, an die Stelle von p tritt q

   Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$, 95 %-Prognoseintervall $[\mu - 1{,}96\sigma; \mu + 1{,}96\sigma]$
   Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ Im Sachkontext wird in der Regel nach außen gerundet.

4. Erwartungswert aufgrund einer Tabelle ermitteln,
   Parameter ermitteln, damit ein Spiel fair ist,