

Aufgaben Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Eine Münze wird viermal geworfen. Y sei die Anzahl der Wechsel zwischen 0 und 1 während einer Versuchsfolge, z. B. $Y(0100) = 2$. Bestimmen Sie die Verteilung von Y , zeichnen Sie ein Histogramm und berechnen Sie den Erwartungswert von Y .
2. In einer Urne befinden sich 9 schwarze und 6 weiße Kugeln. 4 Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen. X sei die Anzahl der weißen Kugeln. Geben Sie die Verteilung der Zufallsvariablen X an, zeichnen Sie ein Streckendiagramm und berechnen Sie den Erwartungswert.
3. Ein Händler vereinbart mit einem Obstbauern, dass in einer Lieferung großer Apfelsinen in jeder Kiste von 50 Stück 10 kleine Apfelsinen sein dürfen. Der Händler darf jeder Kiste 20 Stück entnehmen und die Kiste zurückweisen, falls mehr als 5 kleine Apfelsinen in der Stichprobe sich befinden. Wie viele Kisten werden vom Händler zurückgewiesen, obwohl sie der Vereinbarung entsprechen?
4. Eine Firma liefert Dichtungen in Packungen zu 40 Stück. Eine Packung darf laut Liefervertrag höchstens 10% Ausschuss enthalten. Jede Packung wird überprüft, indem man 10 Stück zufällig entnimmt. Befindet sich in der Stichprobe höchstens eine defekte Dichtung, wird die Packung angenommen, sonst zurückgewiesen.
 - a) Wie groß ist bei diesem Prüfverfahren die Wahrscheinlichkeit ungerechtfertigter Reklamationen, indem eine Packung zurückgewiesen wird, obwohl sie den Lieferbedingungen entspricht?
 - b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung angenommen wird, obwohl sie 20% defekte Dichtungen enthält?
5. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 8 Türme auf dem Schachbrett so zu plazieren, dass sie sich nicht gegenseitig schlagen?
6. Wie viele Teilmengen besitzt eine Menge mit 8 Elementen?
7. Auf wie viele Arten lassen sich a Nullen und b Einsen in einer Reihe anordnen?
8. Nach Angaben der Bundespost kommen 65% der Telefongespräche beim ersten Wählen zustande. Jemand muss 5 Telefongespräche führen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
 - a) jedesmal direkt durchkommt,
 - b) jedesmal beim ersten Wählen nicht durchkommt,
 - c) genau einmal beim ersten Wählen nicht durchkommt?
9. In einer Kantine einer Firma nehmen erfahrungsgemäß durchschnittlich 60 der 100 Angestellten ihr Mittagessen ein. Mit welcher Wahrscheinlichkeit essen in der Kantine
 - a) mehr als 60,
 - b) weniger als 70,
 - c) mindestens 70,
 - d) genau 70 Personen?
10. Ein Multiple-Choice Test besteht aus 50 Items (Aufgaben), bei denen jeweils nur eine von fünf Antworten richtig ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man durch bloßes Raten
 - a) mehr als 20,
 - b) mindestens 10 und höchstens 20,
 - c) weniger als 10 Items richtig beantworten?
11. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 10 Schüssen mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ mindestens 3 Treffer zu erzielen?
12. Jemand wettet, dass er bei 12 Würfeln mit einer Münze genau 6 Einsen erzielt. Wie groß ist die Gewinnwahrscheinlichkeit?
13. Aus einer Kiste mit 6 Äpfeln und 4 Birnen werden 5 Früchte zufällig gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens 2 Äpfel zu ziehen?
14. Zeigen Sie, dass gilt: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Welche anschauliche Bedeutung besitzt diese Aussage?

$$1. \quad \begin{array}{c|cccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline P(X = k) & \frac{2}{16} & \frac{6}{16} & \frac{6}{16} & \frac{2}{16} \end{array} \quad E(X) = 1,5$$

$$2. \quad \begin{array}{c|ccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline P(X = k) & 0,092 & 0,369 & 0,396 & 0,132 & 0,011 \end{array} \quad E(X) = 1,6$$

$$3. \quad \begin{array}{c|cccccccccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline P(X = k) & 0,0029 & 0,0279 & 0,1083 & 0,2259 & 0,2801 & 0,2151 & 0,1034 & 0,0306 & 0,0053 & 0,0005 & 0,0000 \end{array}$$

$$P(X \geq 6) = 0,1398 \quad \text{oder} \quad P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5), \quad \text{binomial:} \quad P(X \geq 6) = 0,1958$$

4. 10% Ausschuss
4 Ausschussstücke
Stichprobenlänge $n = 10$

$$\begin{aligned} a) \quad \alpha = P(X > 1) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \frac{\binom{36}{10}}{\binom{40}{10}} - \frac{\binom{4}{1} \binom{36}{9}}{\binom{40}{10}} = 1 - 0,2999 - 0,4442 = 0,2559 \end{aligned}$$

- 20% Ausschuss
8 Ausschussstücke

$$b) \quad \beta = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{\binom{32}{10}}{\binom{40}{10}} + \frac{\binom{8}{1} \binom{32}{9}}{\binom{40}{10}} = 0,0761 + 0,2647 = 0,3408$$

5. $8!$

6. 2^8

7. $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$

8. a) $P(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0,65^5 \cdot 0,35^0 = 0,116$

b) $P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0,65^0 \cdot 0,35^5 = 0,005$

c) $P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0,65^4 \cdot 0,35^1 = 0,312$

9. a) $P(X > 60) = 0,4621$

b) $P(X < 70) = 0,9752$

c) $P(X \geq 70) = 0,0248$

d) $P(X = 70) = 0,0100$

10. a) $P(X > 20) = 0,000$

b) $P(10 \leq X \leq 20) = 1 - 0,444 = 0,556$

c) $P(X < 10) = 0,444$

11. $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 0,9453$

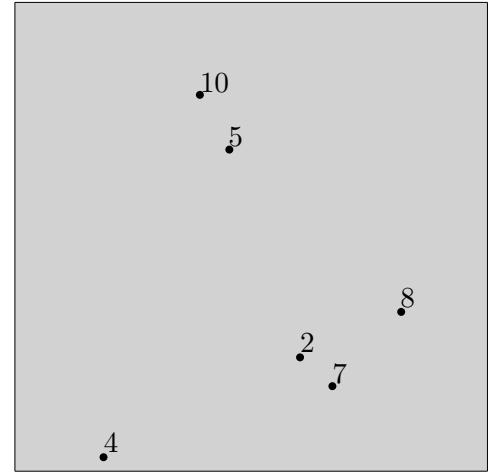
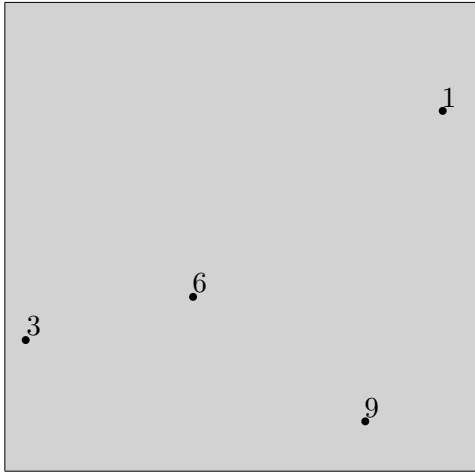
12. $P(X = 6) = \binom{12}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0,226$

13. $P(X \leq 2) = 0,262$

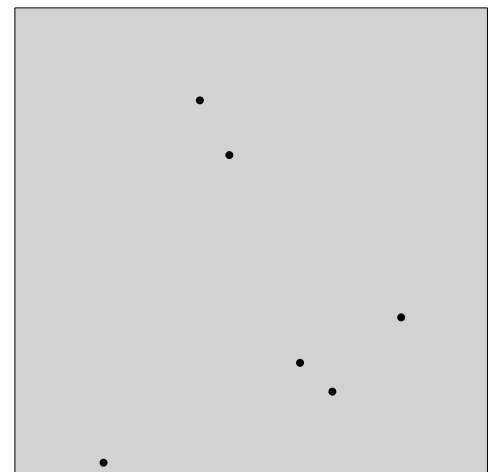
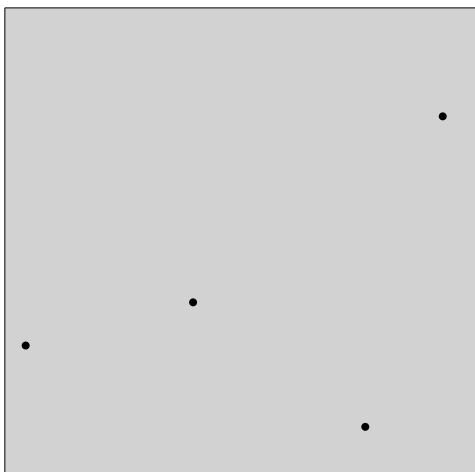
14. Nullen und Einsen werden vertauscht.

10 Kugeln werden auf 2 Behälter zufällig aufgeteilt.

a) Mikroereignis (Die Kugeln mit den Nummern 1, 3, 6 und 9 sind im linken Behälter.)



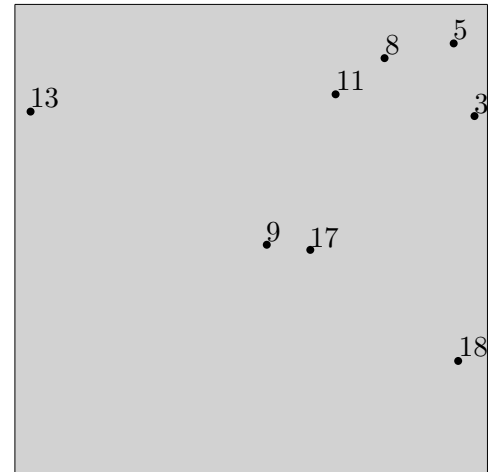
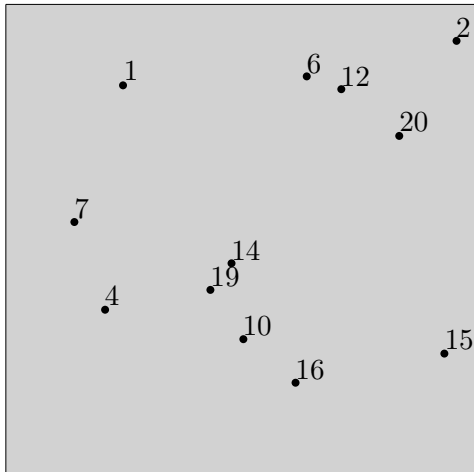
b) Makroereignis (Im linken Behälter sind 4 Kugeln.)



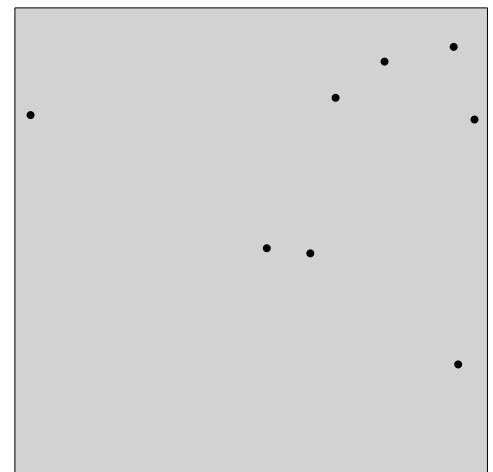
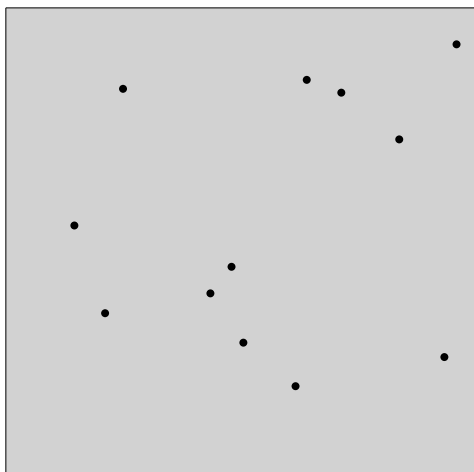
Ermittle die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse.

20 Kugeln werden auf 2 Behälter zufällig aufgeteilt.

a) Mikroereignis



b) Makroereignis



Ermittle die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse.

10 Kugeln

a) Mikroereignis $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ Alle Mikroereignisse sind gleichwahrscheinlich.

b) Makroereignis $\binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 20,5\%$

20 Kugeln

a) Mikroereignis $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

b) Makroereignis $\binom{20}{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 12,0\%$