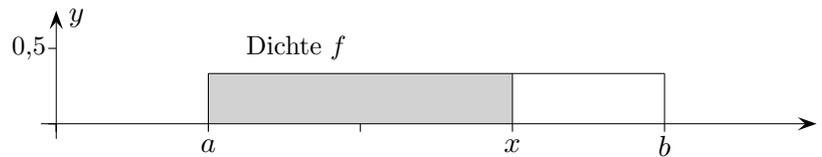


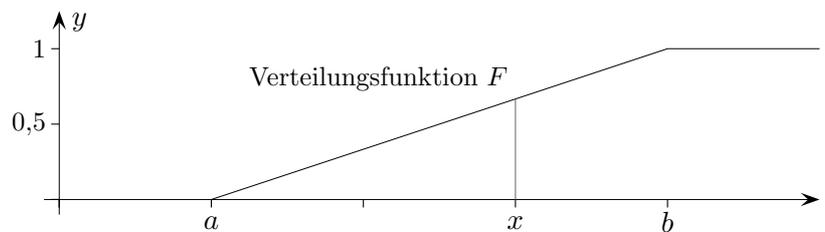
Stetige Verteilungen Rechteckverteilung

Die Längenabweichungen X produzierter Werkstücke von der Norm seien gleichmäßig verteilt zwischen $a = 1 \text{ mm}$ und $b = 4 \text{ mm}$. Die Dichtefunktion lautet also

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Der Graph der Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$ hat das Aussehen:



Ferner gilt

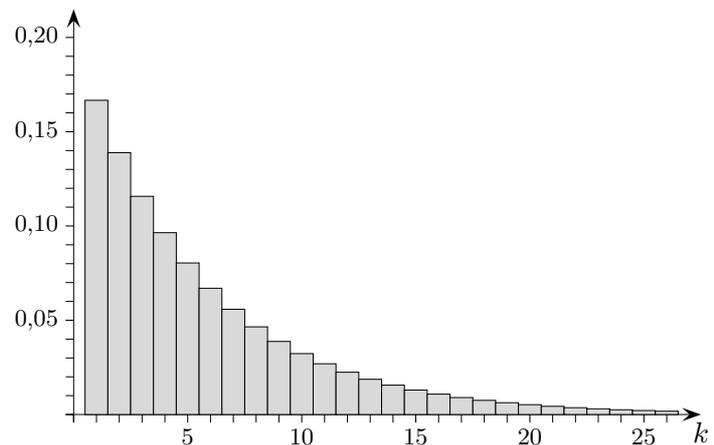
$$\mu = E(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x dx = \dots = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - \mu^2 = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x^2 dx - \mu^2 = \dots = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Stetige Verteilungen Exponentialverteilung

Warten auf eine 6: Wir würfeln solange, bis eine 6 erscheint.

X sei die Anzahl der benötigten Würfe. Es gilt dann für $p = \frac{1}{6}$: $P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$
Z.B. ist die Wahrscheinlichkeit, mit höchstens 4 Würfeln eine 6 zu erzielen, $P(X \leq 4) = 51,8\%$.



Um allgemeiner Wahrscheinlichkeiten von Wartezeiten, z. B. bis zum nächsten Telefonanruf oder bis zum Defektwerden einer Glühlampe, zu berechnen, wählen wir als Ansatz für eine Dichtefunktion

$$f(x) = a \cdot e^{-bx}, \quad x \geq 0.$$

Für diese Dichtefunktion muss $\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$ gelten, also

$$\int_0^{\infty} a \cdot e^{-bx} dx = \left[-\frac{a}{b} e^{-bx} \right]_0^{\infty} = \frac{a}{b} = 1 \implies a = b, \quad \text{damit ist}$$

$$f(x) = a \cdot e^{-ax}, \quad x \geq 0.$$

Um die Bedeutung von a zu erkennen, bestimmen wir $E(X)$.

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{\infty} x \cdot a \cdot e^{-ax} dx = \text{partiell} = \left[-x \cdot e^{-ax} - \frac{1}{a} e^{-ax} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a}$$

Eine Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, heißt exponentialverteilt mit dem Parameter λ . Der Erwartungswert ist dann $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

In einem Büro klingelt durchschnittlich alle 5 Minuten das Telefon.

a) Zeichne die Graphen der Dichte- und der Verteilungsfunktion $F(x)$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Telefon

b) in den nächsten 10 Minuten,

c) in den nächsten 15 Minuten nicht,

d) erst in den nächsten 5 bis 10 Minuten klingelt?

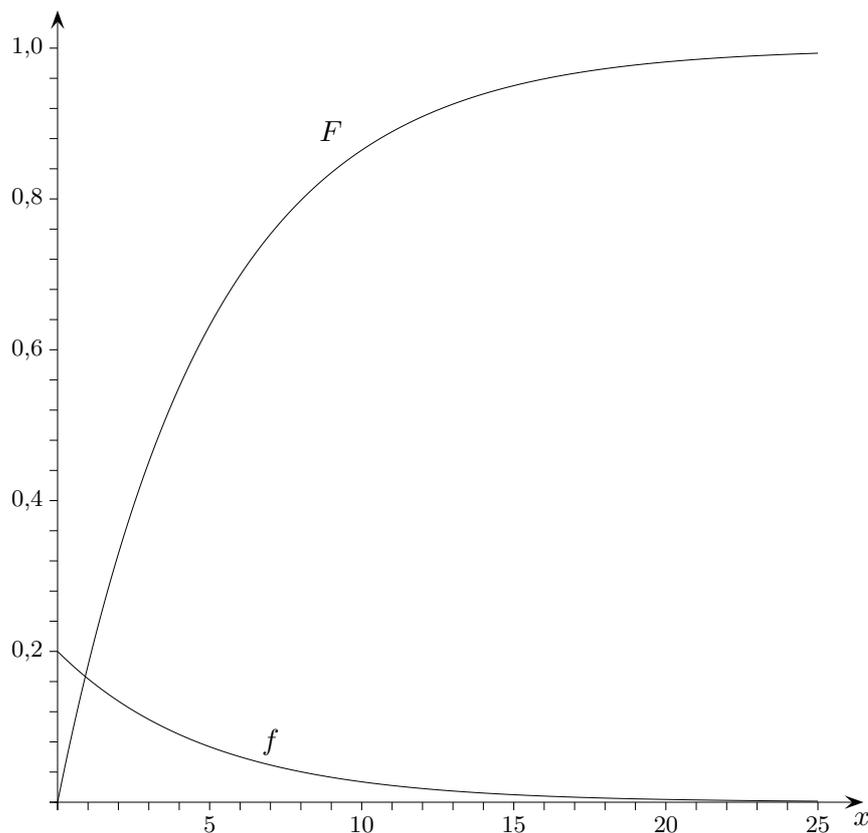
Stetige Verteilungen Exponentialverteilung Ergebnisse

In einem Büro klingelt durchschnittlich alle 5 Minuten das Telefon.

a) Zeichne die Graphen der Dichte- und der Verteilungsfunktion $F(x)$.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = \dots = 1 - e^{-\lambda x}$$

beachte: $F'(x) = f(x)$



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Telefon

b) in den nächsten 10 Minuten,

$$E(X) = 5, \lambda = \frac{1}{5}, \quad P(X \leq 10) = F(10) = 86,5\%$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Wartezeit bis zum nächsten Anruf höchstens 10 Minuten beträgt.

c) in den nächsten 15 Minuten nicht,

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - F(15) = 5,0\%$$

d) erst in den nächsten 5 bis 10 Minuten klingelt?

$$P(5 \leq X \leq 10) = F(10) - F(5) = 23,3\%$$

beachte: $(1 - F(5)) \cdot F(5) = 23,3\%$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in den ersten 5 Minuten nicht klingelt, jedoch innerhalb weiterer 5 Minuten.

Von einem elektronischen Bauteil ist bekannt, dass es durchschnittlich 10 Jahre hält.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält das Bauteil höchstens 8 Jahre?

Von einem elektronischen Bauteil ist bekannt, dass es durchschnittlich 10 Jahre hält.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält das Bauteil höchstens 8 Jahre?

$$E(X) = 10, \lambda = \frac{1}{10}, \quad P(X \leq 8) = F(8) = 55,1\%$$

Mehr als die Hälfte der Bauteile hält höchstens 8 Jahre.

Die mittlere Lebensdauer wird jedoch durch einzelne Bauteile beeinflusst, die sehr lange halten.

Stetige Verteilungen Belastungstest

1. In einem Belastungstest reißt ein Faden mit der Länge 20 cm in $X \text{ cm}$ (vom linken Ende gemessen). Die Zufallsgröße X besitzt die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot x \cdot (20 - x) & \text{für } 0 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- a) Bestimme k so, dass f Dichtefunktion ist und weise dies nach.
- b) Skizziere die Grafen von f und der Verteilungsfunktion F .
- c) Bestimme den Erwartungswert und die Standardabweichung von X .
- d) In welchem Bereich symmetrisch zum Erwartungswert liegen 80% der Rissstellen?
- e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eines der beiden Teilfäden mindestens 15 cm lang?

Belastungstest Lösungen

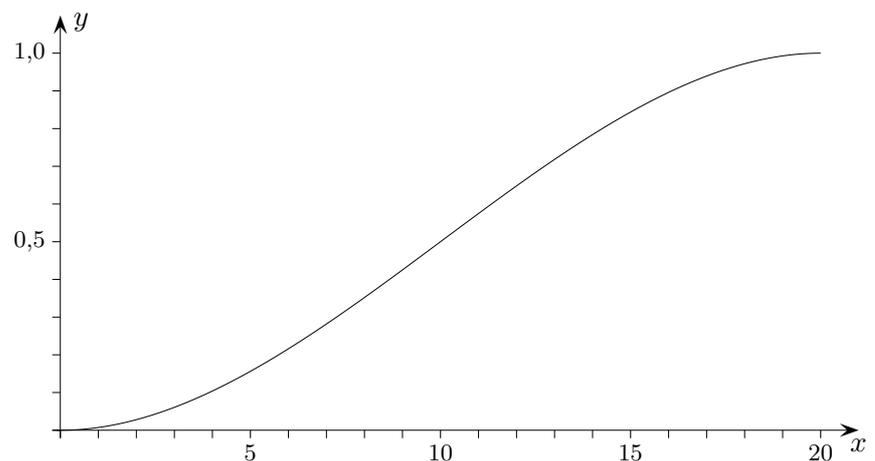
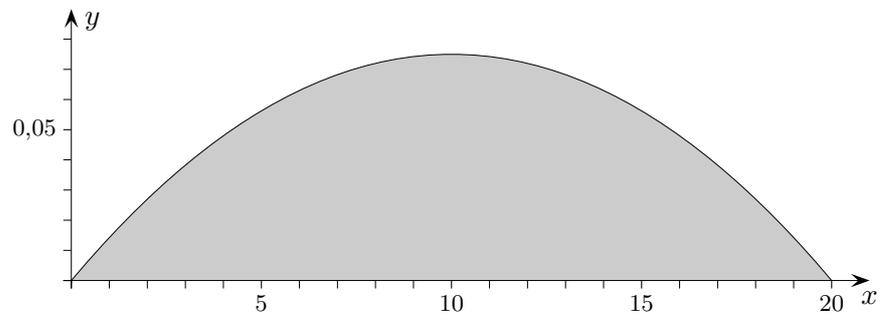
1. In einem Belastungstest reißt ein Faden mit der Länge 20 cm in X cm (vom linken Ende gemessen). Die Zufallsgröße X besitzt die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot x \cdot (20 - x) & \text{für } 0 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- a) Bestimme k so, dass f Dichtefunktion ist und weise dies nach.

$$\int_0^{20} f(x) dx = k \int_0^{20} x \cdot (20 - x) dx = 1 \implies k = \frac{3}{4000}, \quad f(x) \geq 0$$

- b) Skizziere die Grafen von f und der Verteilungsfunktion F .



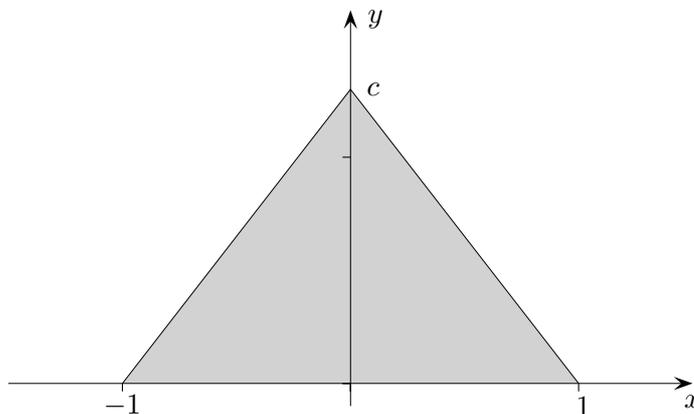
$$F(x) = -\frac{1}{4000}x^3 + \frac{3}{400}x^2 \quad \text{für } 0 \leq x \leq 20$$

- c) Bestimme den Erwartungswert und die Standardabweichung von X . $\mu = 10, \sigma = \sqrt{20}$
- d) In welchem Bereich symmetrisch zum Erwartungswert liegen 80% der Rissstellen?
 $F(x) = 0,10 \implies x = 3,92$ daher $3,92 \leq x \leq 16,08$
- e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eines der beiden Teilfäden mindestens 15 cm lang?
 $P(X \leq 5 \vee X \geq 15) = 2 \cdot F(5) = 31,3\%$

Stetige Verteilung

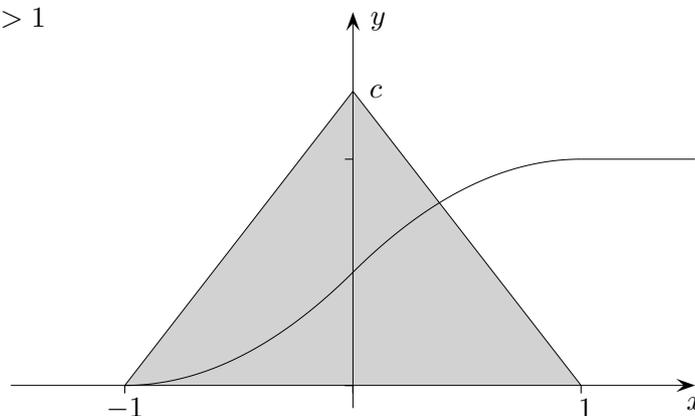
2. Nebenstehend ist der Graph der Dichtefunktion f einer Zufallsvariablen X skizziert.

- Bestimmen Sie die Konstante c ,
- ermitteln und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F von X ,
- berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .



a) $c = 1$

b)
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1 \\ \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



c)
$$\mu = E(X) = \int_{-1}^1 x \cdot f(x) dx = 0 \quad (\text{Symmetrie})$$

$$V(X) = \int_{-1}^1 x^2 \cdot f(x) dx - \mu^2 = \dots = \frac{1}{6}$$

Abweichung von der Norm

3. Eine Maschine stellt Metallstifte her, deren Längen-Abweichung von der Norm eine stetige Zufallsgröße X (in mm) mit der Dichte f ist.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ a(x^2 - 4) & -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

- Bestimmen Sie a .
- Skizzieren Sie die Grafen von f und der Verteilungsfunktion F .
- Wie lautet die Verteilungsfunktion?
- Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X .
- In welchem Bereich symmetrisch zum Erwartungswert liegen 90 % der Abweichungen?
- Metalstifte, deren absolute Abweichung mindestens 1,5 mm beträgt, sind Ausschuss. Wieviel Prozent Ausschuss hat man zu erwarten?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 5 zufällig ausgewählten Stiften kein Ausschussstück befindet?
- Wie muss man die symmetrischen Ausschuss-Grenzen wählen, damit nur noch 5 % Ausschuss vorliegt?
- Die Stifte sollen in vier gleichstarke (erwartete Anzahlen jeweils gleich) Qualitätsstufen aufgeteilt werden. Wie sind die Grenzen hierfür zu wählen?

a) $-\frac{3}{32}$

b) ...

$$c) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{2} & -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

d) $E(X) = 0, \quad \sigma = 0,89$

e) $[-1,46; 1,46]$

f) 8,6 %

g) 63,8 %

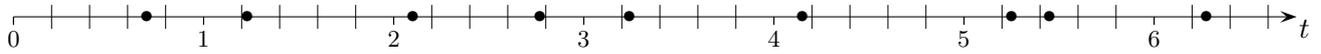
h) absolute Abweichung mindestens 1,62 mm

i) $[-2; -0,69], [-0,69; 0], [0; 0,69], [0,69; 2]$

Exponentialverteilung

Punktartige Signale werden in zufälliger Aufeinanderfolge ausgesendet.

Wir wollen die Wartezeit T bis zum ersten Signal (oder zwischen zwei Signalen) untersuchen.



Das Intervall $I = (0 | t]$ teilen wir in n gleiche Teile (...) und wählen n so groß, dass jeder Abschnitt höchstens einen Punkt enthält. Wir nehmen an, dass pro Zeiteinheit im Schnitt λ Signale gesendet werden. Der Erwartungswert für I beträgt daher $\mu = \lambda \cdot t$ Punkte.

Pro Abschnitt wird mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{\lambda t}{n}$ ein Signal gesendet (Bernoulli-Kette).

Für T gilt:

$$P(T > t) = (1 - p)^n = \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n$$

Für $n \rightarrow \infty$ erhält man

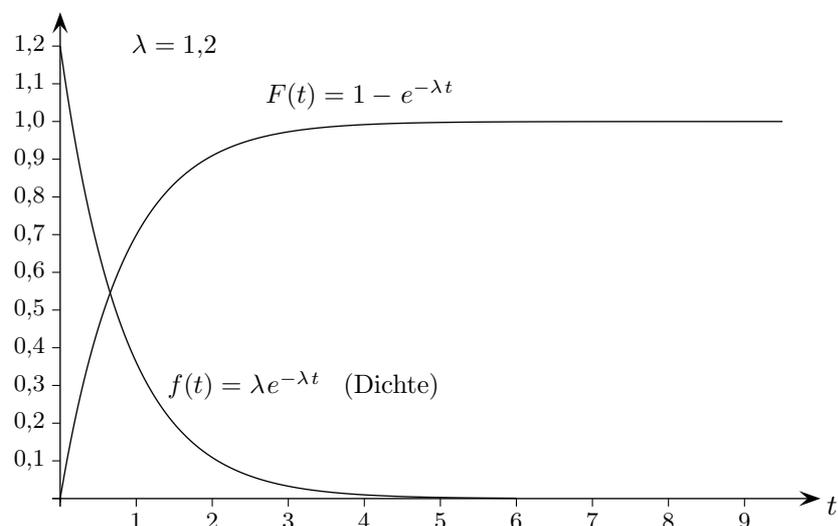
$$P(T > t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n = e^{-\lambda t}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für kein Signal in einem Intervall der Länge t beträgt

$$P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

und für mindestens ein Signal (Verteilungsfunktion $F(t)$)

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad \text{Diese Wahrscheinlichkeiten sind Funktionen von } t, \quad F' = f \text{ (Dichte).}$$

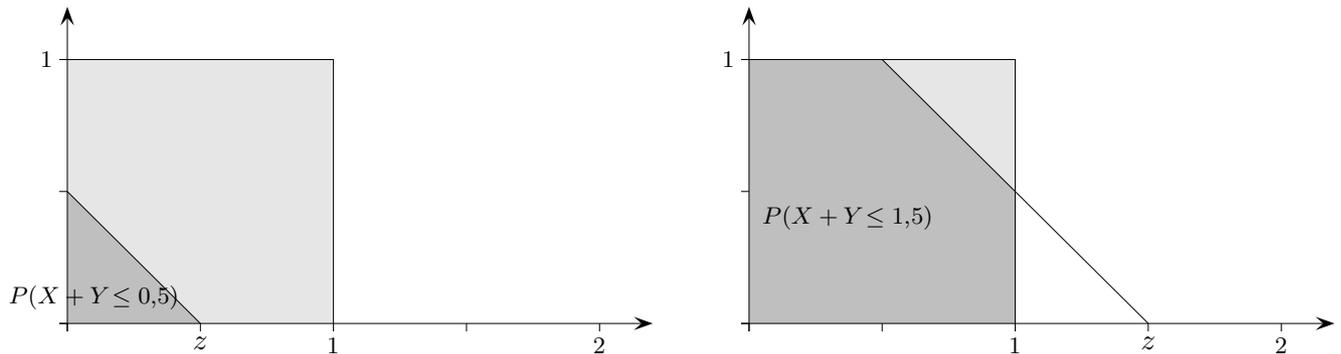


Summe von Zufallsvariablen

Gegeben sind die unabhängigen, gleichverteilten Zufallsvariablen X und Y mit den Wahrscheinlichkeitsdichten $f(x)$ und $g(x)$.

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

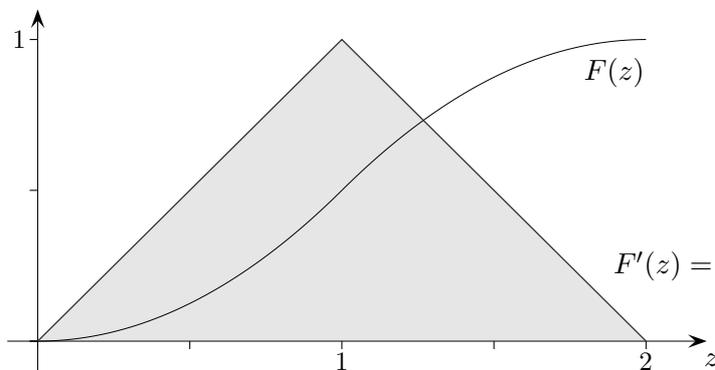
Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeiten $P(X + Y \leq z)$.



Die Ergebnisse von (X, Y) fallen in das Quadrat der Länge 1.

Zwei der Ereignisse $X + Y \leq z$ sind grafisch dargestellt.

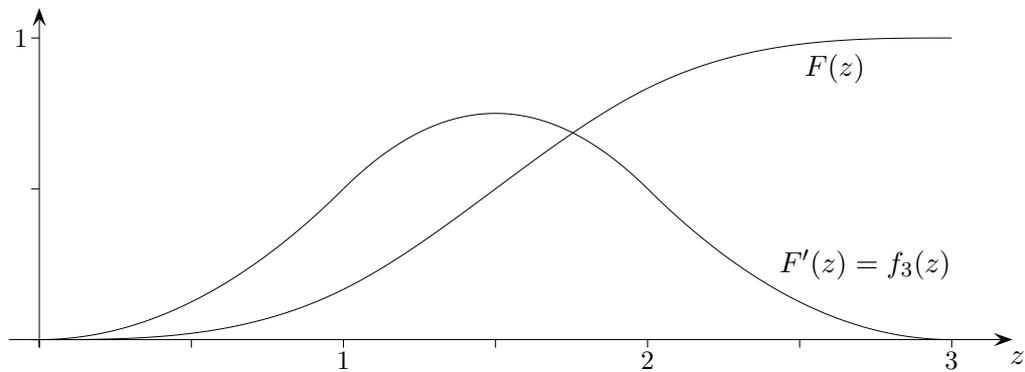
Die Verteilungsfunktion $F(z)$, sowie deren Ableitung, die Dichtefunktion, sind nun zu erkennen.



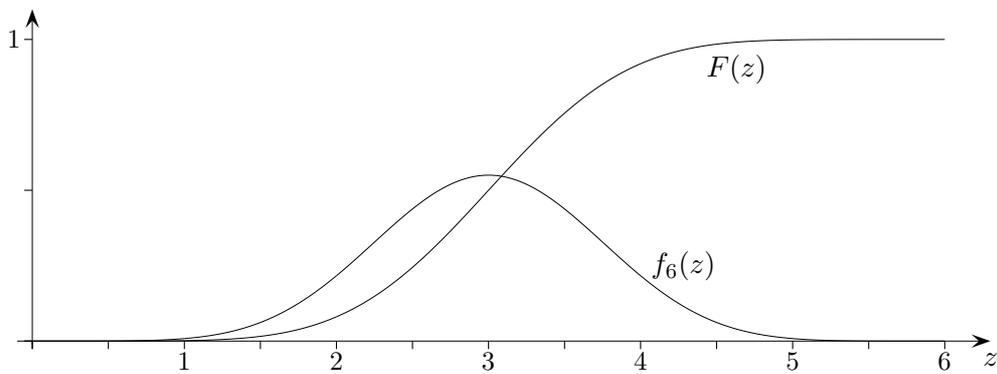
$$F(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{2} & \text{für } 0 \leq z \leq 1 \\ 1 - \frac{(z-2)^2}{2} & 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

$$f_2(z) = \begin{cases} z & \text{für } 0 \leq z \leq 1 \\ 2 - z & 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

Zu den Zufallsvariablen X und Y nehmen wir noch eine dritte unabhängige Zufallsvariable Z mit derselben Wahrscheinlichkeitsdichte hinzu. Verteilungs- und Dichtefunktion von $X + Y + Z$ sind grafisch dargestellt. Auf die (mühsame) Herleitung der Funktionsterme wird hier verzichtet.

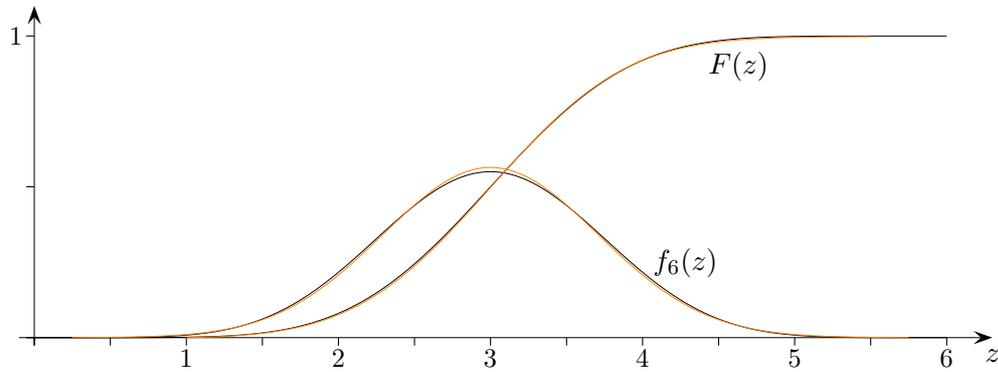


Für sechs unabhängige Zufallsvariablen ergibt sich folgende Grafik:



Vergleich mit der Normalverteilung

Für sechs unabhängige Zufallsvariablen ergibt sich folgende Grafik:



Die orange gefärbten Kurven gehören zur Normalverteilung mit $\mu = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ und $\sigma = \sqrt{6 \cdot \frac{1}{12}}$. Die Varianz eines Summanden beträgt $\frac{1}{12}$.

Mit 12 Summanden können näherungsweise normalverteilte ($\mu = 6$ und $\sigma = 1$) Zufallszahlen erzeugt werden. Mit der Subtraktion um 6 erhalten wir den Mittelwert null (Zwölferregel).