↑ Absorbierende Markow-Ketten

Ein Käfer krabbelt auf der Figur. Er beginnt im Zustand 1.
In den Endpunkten 4 und 5 wartet jeweils ein Vogel, der den Käfer verschlucken wird (Die Zustände 4 und 5 heißen absorbierend). In den Punkten (Zuständen) 1, 2 und 3 wählt der Käfer die Richtung zum nächsten Punkt mit den Wahrscheinlichkeiten der Übergangsmatrix $\mathcal{M}$.

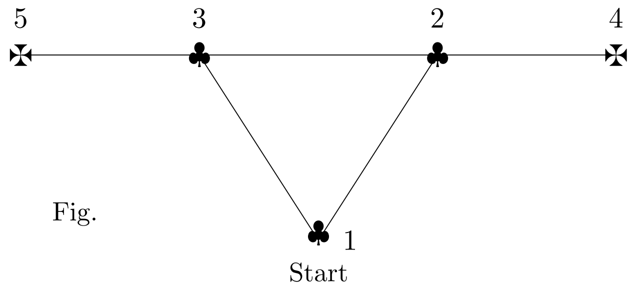
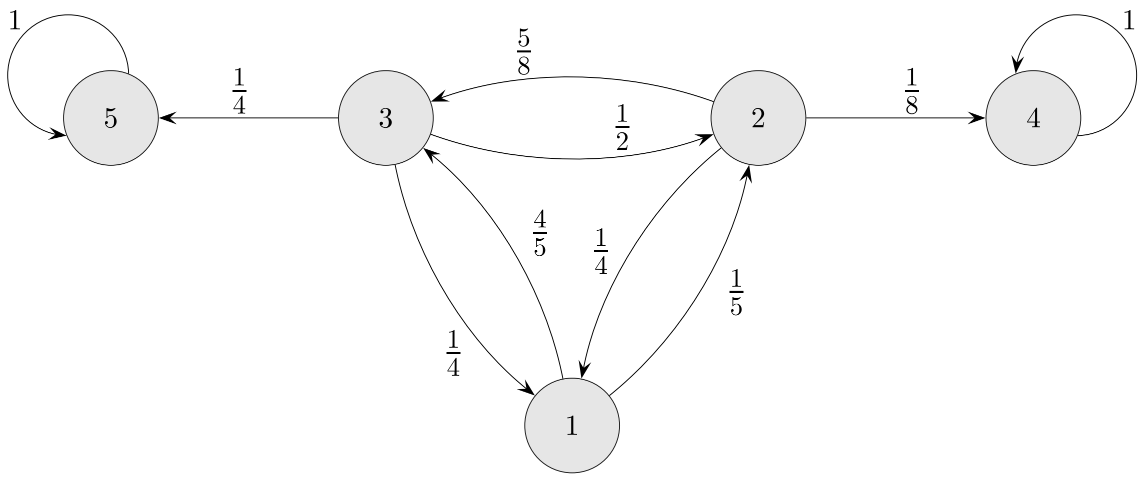


Fig.

		von 1	von 2	von 3	von 4	von 5
nach	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
	2	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
	3	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{8}$	0	0	0
	4	0	$\frac{1}{8}$	0	1	0
	5	0	0	$\frac{1}{4}$	0	1



a) Berechne $\mathcal{M}^n$ für einige n und interpretiere das Ergebnis.

b) Wie lange dauert es im Mittel bis zur Absorption?

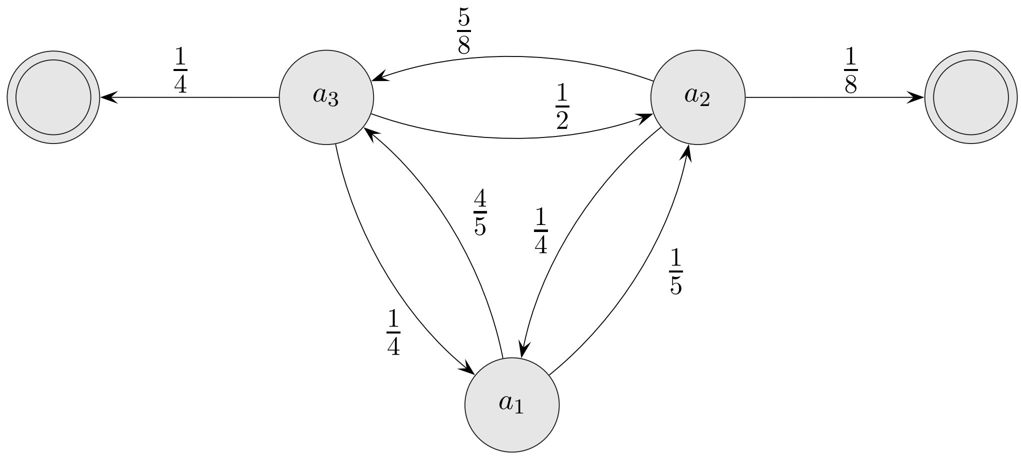
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erfolgt die Absorption in 4, mit welcher in 5?

Die absorbierenden Zustände bilden den Rand der Markow-Kette,
die übrigen werden als innere Zustände bezeichnet.

a) Berechne $\mathcal{M}^n$ für mehrere n und interpretiere das Ergebnis.

Die Matrix-Potenzen geben den plausiblen Sachverhalt wieder, dass letztendlich eine Absorption erfolgt, d. h. die Wahrscheinlichkeiten für den Aufenthalt in einem inneren Zustand streben gegen null.
Für $n = 30$ ist z. B. $p_{14}(30) = 0{,}24$ und $p_{15}(30) = 0{,}74$.

b) Wie lange dauert es im Mittel bis zur Absorption?



Sei a_n die Schrittzahl (Anzahl der Kanten) bis zur Absorption beim Start in n, dann lassen sich die folgenden Beziehungen zwischen a_1, a_2 und a_3 aufstellen:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{5}(1+a_2) + \frac{4}{5}(1+a_3)\\
a_2 &= \frac{1}{4}(1+a_1) + \frac{5}{8}(1+a_3) + \frac{1}{8}\cdot 1\\
a_3 &= \frac{1}{4}(1+a_1) + \frac{1}{2}(1+a_2) + \frac{1}{4}\cdot 1
\end{aligned}
$$

Jede Zeile stellt die Berechnung eines Erwartungswerts dar.

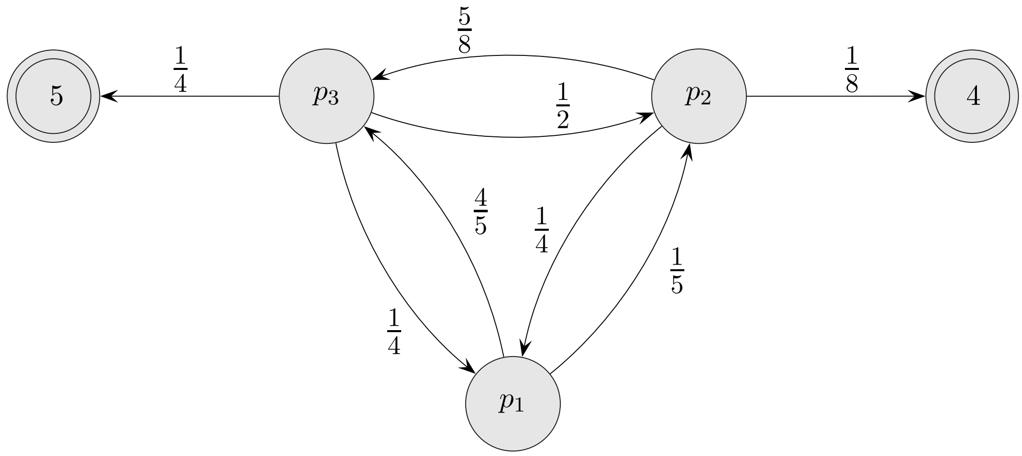
Die Gleichungen lassen sich stets vereinfachen:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 + \frac{1}{5}a_2 + \frac{4}{5}a_3\\
a_2 &= 1 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{5}{8}a_3\\
a_3 &= 1 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{2}a_2
\end{aligned}
$$

In dieser sogenannten Mittelwertsregel für die Dauer einer Markow-Kette werden die Erwartungswerte der inneren Nachbarn mit ihrer Wahrscheinlichkeit gewichtet und 1 addiert.

In diesem Fall ergibt sich die mittlere Dauer $a_1 = 7{,}2$.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erfolgt die Absorption in 4?



Sei p_n die Wahrscheinlichkeit, vom Zustand n zum Zustand 4 zu gelangen.
Dann lassen sich die folgenden Beziehungen zwischen p_1, p_2 und p_3 aufstellen:

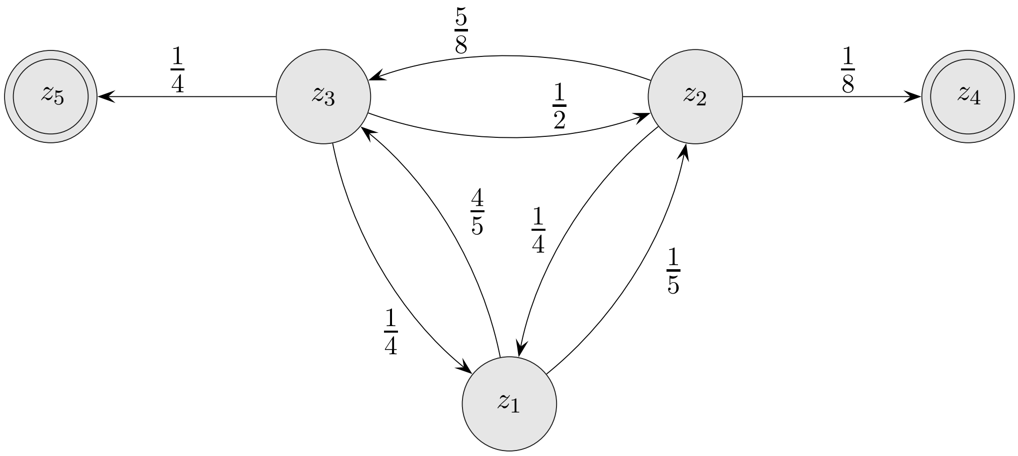
$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{5}\,p_2 + \frac{4}{5}\,p_3 \\
p_2 &= \frac{1}{4}\,p_1 + \frac{5}{8}\,p_3 + \frac{1}{8} \qquad (p_4 = 1) \\
p_3 &= \frac{1}{4}\,p_1 + \frac{1}{2}\,p_2
\end{aligned}
$$

Jede Gleichung ergibt sich als Anwendung der Pfadregel, wobei zu beachten ist, dass nur Pfade berücksichtigt werden, die zum Zustand 4 führen.

In dieser Mittelwertsregel für Wahrscheinlichkeiten, von einem inneren Zustand zu einem absorbierenden zu gelangen, werden die Wahrscheinlichkeiten p_n der inneren Nachbarn gewichtet. Ist der absorbierenden Zustand Nachbar, wird auch die zugehörige Übergangswahrscheinlichkeit addiert.

In diesem Fall ergibt sich $p_1 = 24{,}5\%$.
Die Wahrscheinlichkeit in Zustand 5 absorbiert zu werden ist natürlich $1 - p_1$.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erfolgt die Absorption in z_4 beim Start in z_1?



Der Knoten z_1 wird mit der Wahrscheinlichkeitsmasse 1 belegt.
Die folgenden Beziehungen beinhalten, wieviel hiervon nach z_4 fließt.

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1 + \frac{1}{4}\, z_2 + \frac{1}{4}\, z_3 \\
z_2 &= \frac{1}{5}\, z_1 + \frac{1}{2}\, z_3 \\
z_3 &= \frac{4}{5}\, z_1 + \frac{5}{8}\, z_2 \\
\hline
z_4 &= \frac{1}{8}\, z_2
\end{aligned}$$

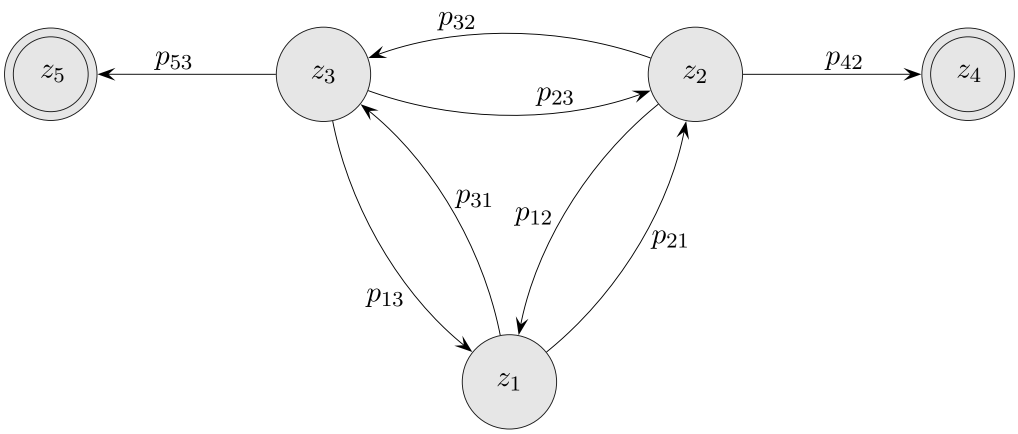
Man beachte den Unterschied dieser Fluss- zur Mittelwertsregel, bei der die Nachbarknoten (zu ihnen führen die Pfeile hin) betrachtet werden.

Die ersten 3 Gleichungen liefern $z_1 = \dfrac{110}{49}$, $z_2 = \dfrac{96}{49}$, $z_3 = \dfrac{148}{49}$,

die 4. Gleichung schließlich $z_4 = \dfrac{12}{49} = 24{,}5\,\%$.

Die Werte für z_1, z_2, z_3 geben die mittlere Anzahl der Besuche (Verweildauer) in z_i vor der Absorption in z_4 beim Start in z_1 an. Betrachte hierzu die Gleichungen.
Die mittlere Anzahl der Schritte (Dauer) bis zur Absorption beträgt $z_1 + z_2 + z_3 = 7{,}2$.
Obwohl nur innere Knoten berücksichtigt werden, ist auch der letzte Schritt zur Absorption in z_4 in der Summe enthalten, da mit $z_1 = 1 + \ldots$ begonnen wird.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erfolgt die Absorption in z_4 beim Start in z_1?



Der Knoten z_1 wird mit der Wahrscheinlichkeitsmasse 1 belegt.
Die folgenden Beziehungen beinhalten, wieviel hiervon nach z_4 fließt.

$$\begin{array}{rcl} z_1 &=& 1 + p_{12}\,z_2 + p_{13}\,z_3 \\ z_2 &=& p_{21}\,z_1 + p_{23}\,z_3 \\ z_3 &=& p_{31}\,z_1 + p_{32}\,z_2 \\ \hline z_4 &=& p_{42}\,z_2 \end{array}$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet:

$$z_1 = \frac{p_{21}\,p_{42} + p_{31}\,p_{23}\,p_{42}}{\Delta} \qquad \text{mit} \qquad \Delta = 1 - p_{32}\,p_{23} - p_{12}\,p_{21} - p_{12}\,p_{23}\,p_{31} - p_{13}\,p_{31} - p_{13}\,p_{32}\,p_{21}$$

$$z_2 = \frac{p_{21} + p_{23}\,p_{31}}{\Delta}$$

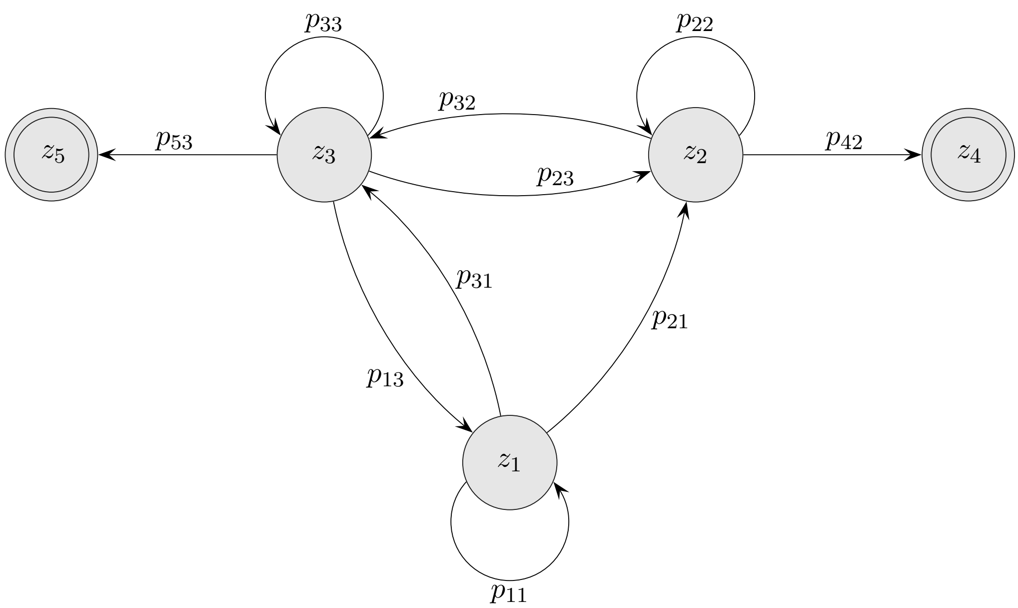
$$z_3 = \frac{p_{31} + p_{32}\,p_{21}}{\Delta}$$

$$z_4 = \frac{p_{42}\,p_{21} + p_{42}\,p_{23}\,p_{31}}{\Delta}$$

z_4 enthält die Wahrscheinlichkeit, in z_4 beim Start in z_1 absorbiert zu werden.
Die Werte für z_1, z_2, z_3 geben die mittlere Anzahl der Besuche (Verweildauer) in z_i vor der Absorption in z_4 beim Start in z_1 an.
Versuche, den regelmäßigen Aufbau der Terme zu ergründen (Stichwörter: Pfade und Schleifen).
Die Formel von Mason klärt die Zusammenhänge.

↑ Mason-Regel

Für eine Vermutung der Mason-Regel (Beweis folgt) dient das folgende Beispiel.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erfolgt die Absorption in z_4 beim Start in z_2?



Die folgenden Beziehungen (Flussregel) beinhalten, wieviel hiervon nach z_4 fließt.

$$\begin{array}{lcl}
z_1 &=& \phantom{1+{}} p_{11}\,z_1 + p_{13}\,z_3 \\
z_2 &=& 1 + p_{21}\,z_1 + p_{22}\,z_2 + p_{23}\,z_3 \\
z_3 &=& \phantom{1+{}} p_{31}\,z_1 + p_{32}\,z_2 + p_{33}\,z_3 \\
\hline
z_4 &=& \phantom{1+{}} p_{42}\,z_2 \qquad\qquad \text{Lösung:}
\end{array}$$

$$z_1 = \frac{p_{32}p_{13}}{\Delta} \qquad \text{mit} \qquad \Delta = 1 - p_{11} - p_{22} - p_{33} - p_{23}p_{32} - p_{31}p_{13} - p_{21}p_{32}p_{13}$$
$$+ p_{11}p_{22} + p_{11}p_{33} + p_{22}p_{33} + p_{11}p_{32}p_{23} + p_{22}p_{31}p_{13} - p_{22}p_{33}p_{11}$$

$$z_2 = \frac{1 - p_{11} - p_{33} - p_{31}p_{13} + p_{33}p_{11}}{\Delta}$$

$$z_3 = \frac{p_{32}(1 - p_{11})}{\Delta}$$

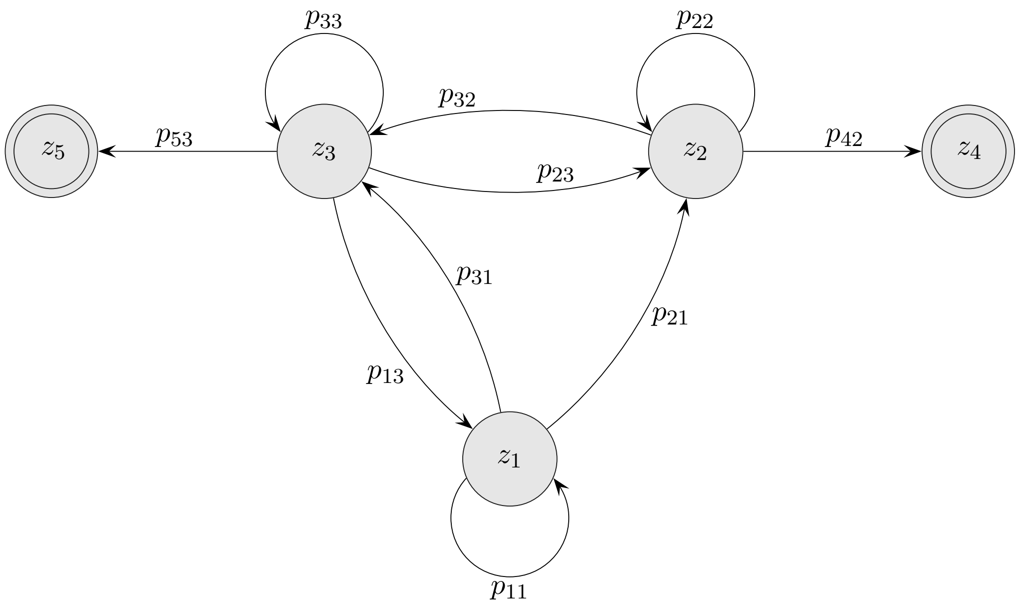
$$z_4 = \frac{p_{42}(1 - p_{11} - p_{33} - p_{31}p_{13} + p_{33}p_{11})}{\Delta}$$

Nenner: $1 - \sum S_k + \sum S_k S_m - \sum S_k S_m S_n + \sum S_k S_m S_n S_p - \ldots +,$ Schleifen(werte) S_i
Die Produkte erfassen alle disjunkten (keine gemeinsamen Knoten) Schleifenpaare, -tripel usw.

Zähler: P(direkter Pfad (Knoten werden nicht mehrfach passiert) von 2 nach i)$(\,1 - \sum S_k^* + \sum S_k^* S_m^* - \ldots +)$
S_i^* wie im Nenner, jedoch disjunkt zum Pfad. (Bei mehreren Pfaden sind die Terme zu summieren.)

↑ Mason-Regel

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erfolgt die Absorption in z_4 (in z_5) beim Start in z_2?



$$p_{11} = \frac{1}{5},\quad p_{21} = \frac{1}{5},\quad p_{31} = \frac{3}{5},\quad p_{22} = \frac{4}{8},\quad p_{32} = \frac{3}{8},\quad p_{42} = \frac{1}{8},\quad p_{13} = \frac{1}{6},\quad p_{23} = \frac{2}{6},\quad p_{33} = \frac{1}{6},\quad p_{53} = \frac{2}{6}$$

$$\begin{array}{rcl}
z_1 & = & \; p_{11}\,z_1 \;+\; p_{13}\,z_3 \\
z_2 & = & 1 + p_{21}\,z_1 \;+\; p_{22}\,z_2 \;+\; p_{23}\,z_3 \\
z_3 & = & \; p_{31}\,z_1 \;+\; p_{32}\,z_2 \;+\; p_{33}\,z_3 \\
\hline
z_4 & = & \; p_{42}\,z_2
\end{array}$$

$$z_1 = \frac{15}{41}$$

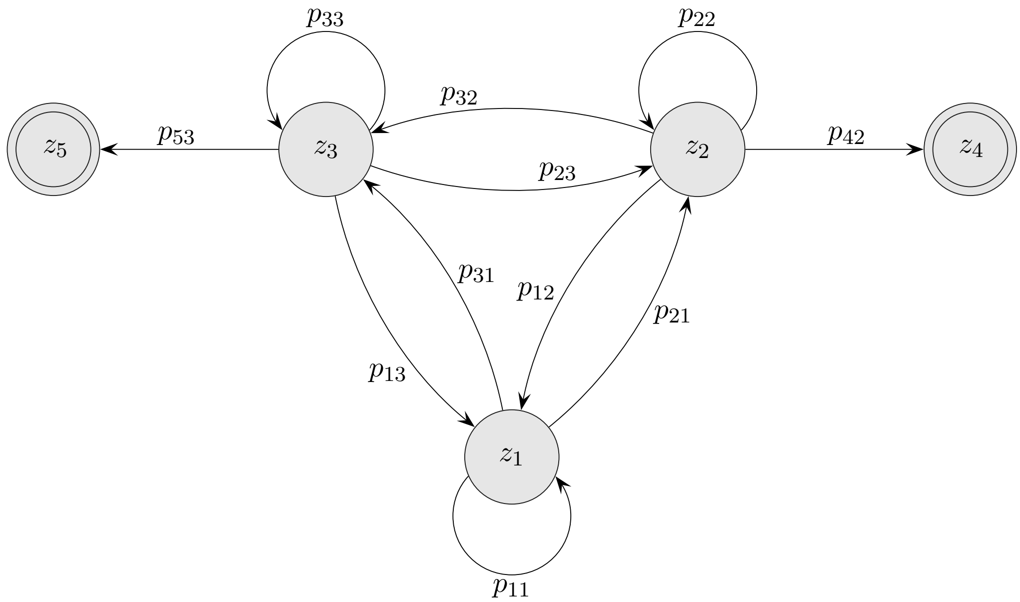
$$z_2 = \frac{136}{41}$$

$$z_3 = \frac{72}{41}$$

$$z_4 = \frac{17}{41}$$

$$z_5 = 1 - z_4 = \frac{24}{41}$$

↑ Verweilzeiten, zusammengefasst



Sei t_{ji} die mittlere Anzahl der Besuche in j vor der Absorption beim Start in i.
Für den Start in z_1 gilt:

$$\begin{aligned} t_{11} &= 1 + p_{11}t_{11} + p_{12}t_{21} + p_{13}t_{31} \\ t_{21} &= p_{21}t_{11} + p_{22}t_{21} + p_{23}t_{31} \\ t_{31} &= p_{31}t_{11} + p_{32}t_{21} + p_{33}t_{31} \end{aligned} \iff \begin{aligned} (1-p_{11})t_{11} - p_{12}t_{21} - p_{13}t_{31} &= 1 \\ -p_{21}t_{11} + (1-p_{22})t_{21} - p_{23}t_{31} &= 0 \\ -p_{31}t_{11} - p_{32}t_{21} + (1-p_{33})t_{31} &= 0 \end{aligned}$$

$$\iff \begin{pmatrix} (1-p_{11}) & -p_{12} & -p_{13} \\ -p_{21} & (1-p_{22}) & -p_{23} \\ -p_{31} & -p_{32} & (1-p_{33}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

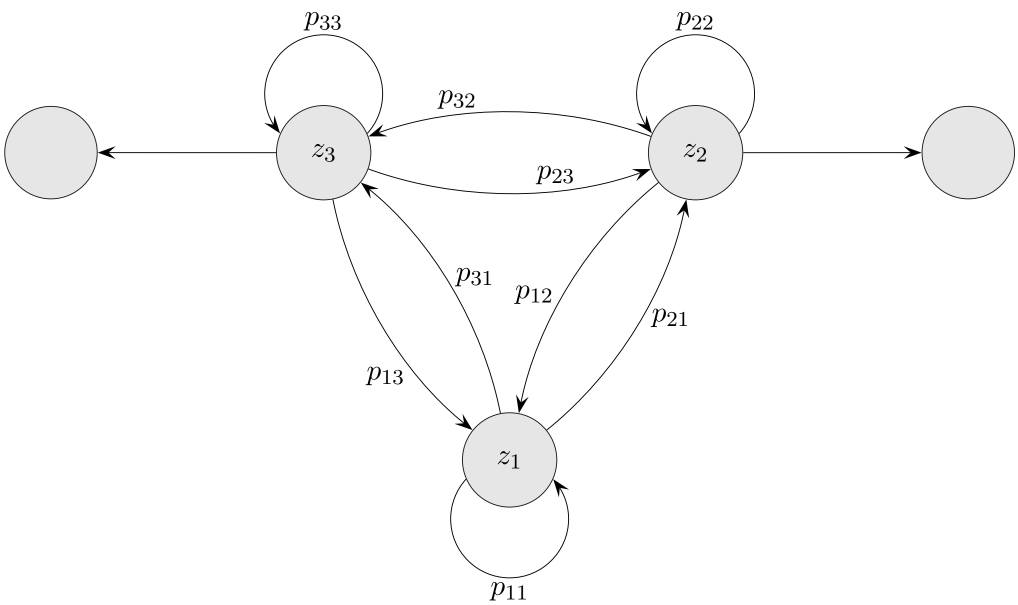
Für den Start in z_2 gilt:

$$\begin{aligned} t_{12} &= p_{11}t_{12} + p_{12}t_{22} + p_{13}t_{32} \\ t_{22} &= 1 + p_{21}t_{12} + p_{22}t_{22} + p_{23}t_{32} \\ t_{32} &= p_{31}t_{12} + p_{32}t_{22} + p_{33}t_{32} \end{aligned} \iff \begin{aligned} (1-p_{11})t_{12} - p_{12}t_{22} - p_{13}t_{32} &= 0 \\ -p_{21}t_{12} + (1-p_{22})t_{22} - p_{23}t_{32} &= 1 \\ -p_{31}t_{12} - p_{32}t_{22} + (1-p_{33})t_{32} &= 0 \end{aligned}$$

Analoges gilt für z_3, zusammengefasst:

$$\begin{pmatrix} (1-p_{11}) & -p_{12} & -p_{13} \\ -p_{21} & (1-p_{22}) & -p_{23} \\ -p_{31} & -p_{32} & (1-p_{33}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-p_{11}) & -p_{12} & -p_{13} \\ -p_{21} & (1-p_{22}) & -p_{23} \\ -p_{31} & -p_{32} & (1-p_{33}) \end{pmatrix}^{-1}$$



Die Lösungen der auftretenden Gleichungen wie z. B.

$$\begin{pmatrix} (1-p_{11}) & -p_{12} & -p_{13} \\ -p_{21} & (1-p_{22}) & -p_{23} \\ -p_{31} & -p_{32} & (1-p_{33}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

können dem Graphen entnommen werden.

Mason entdeckte dies 1956 bei der Untersuchung eines Signalflusses durch eine Schaltung.
In einem Signalflussdiagramm stellen die Knoten Bearbeitungseinheiten dar, die die eingehenden Signale (aus $\mathbb{R}$) in einer bestimmten Form verarbeiten und das Ergebnis dann an die weiterführenden Kanten senden. Statt der 1 auf der rechten Seite wird für ein ausgehendes Signal u verwendet, das dann in der Mason-Formel als Faktor im Zähler erscheint. Ansonsten sind die Rechnungen identisch.

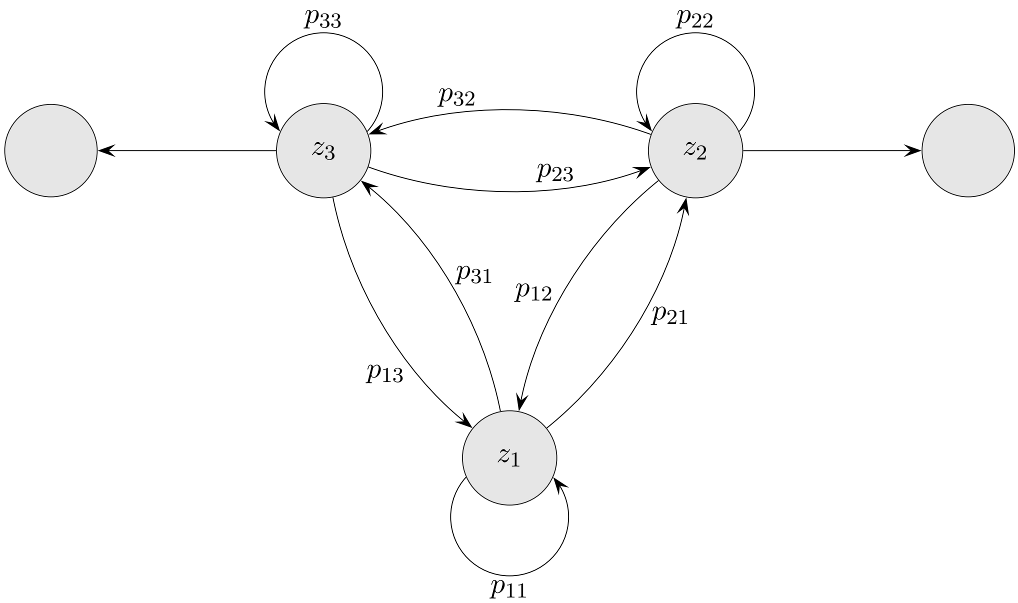
Nach der Cramerschen Regel gilt z. B.

$$t_{31} = \frac{\begin{vmatrix} (1-p_{11}) & -p_{12} & 1 \\ -p_{21} & (1-p_{22}) & 0 \\ -p_{31} & -p_{32} & 0 \end{vmatrix}}{\det G} \qquad \text{mit} \qquad \det G = \begin{vmatrix} (1-p_{11}) & -p_{12} & -p_{13} \\ -p_{21} & (1-p_{22}) & -p_{23} \\ -p_{31} & -p_{32} & (1-p_{33}) \end{vmatrix}$$

Die Berechnung der Determinanten führt zu Pfaden und Schleifen im Graphen.

$$t_{31} = \frac{\sum \left[P(\text{direkter Pfad von 1 nach 3})(1 - \sum S_k^* + \sum S_k^* S_m^* - \ldots +) \right],\ \ S_i^* \text{ jeweils disjunkt zum Pfad}}{1 - \sum S_k + \sum S_k S_m - \sum S_k S_m S_n + \sum S_k S_m S_n S_p - \ldots +,\ \ \text{disjunkte Schleifenprodukte}}$$

↑ Mason-Regel



Stellen wir zunächst den Bezug der Determinante

$$\det G \;=\; \begin{vmatrix} (1-p_{11}) & -p_{12} & -p_{13} \\ -p_{21} & (1-p_{22}) & -p_{23} \\ -p_{31} & -p_{32} & (1-p_{33}) \end{vmatrix}$$

zum Graphen her und erinnern an die Definition einer Determinante.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \;=\; a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

Aus jeder Spalte und Zeile ist ein Element zu entnehmen.
Das Vorzeichen lassen wir zunächst außer Acht.

$$\begin{vmatrix} (1-p_{11}) & -p_{12} & -p_{13} \\ -p_{21} & (1-p_{22}) & -p_{23} \\ -p_{31} & -p_{32} & (1-p_{33}) \end{vmatrix}$$ ergibt die Schleife $p_{31}p_{23}p_{12}$.

$$\begin{vmatrix} (1-p_{11}) & -p_{12} & -p_{13} \\ -p_{21} & (1-p_{22}) & -p_{23} \\ -p_{31} & -p_{32} & (1-p_{33}) \end{vmatrix}$$ ergibt die Schleife $p_{31}p_{13}$ und das Schleifenpaar $p_{31}p_{13}p_{22}$.

Die Berechnung der Diagonalelemente liefert den Summand 1, die Schleifen p_{11}, p_{22}, p_{33} mit negativem Vorzeichen, die disjunkten Schleifenpaare $p_{11}p_{22}$, $p_{11}p_{33}$, $p_{22}p_{33}$ und das Schleifentripel $p_{11}p_{22}p_{33}$.

Für die Bestimmung des Vorzeichens eines Summanden betrachten wir die an 1. Stelle stehenden (schwarzen) Zeilenindizes. Also z. B. für $a_{11}a_{32}a_{23}$ (1,3,2). Diese Reihenfolge geht in (1,2,3) über, indem 2 Zahlen vertauscht werden (1 Transposition).
Für (2,3,1) werden 2 Transpositionen benötigt. Das Vorzeichen der Determinantensummanden wird durch

$(-1)^{\text{Anzahl der benötigten Transpositionen}}$ bestimmt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei eine Schleife (losgelöst vom Beispiel) durch $p_{31}p_{43}p_{54}p_{15}$ gegeben, d. h. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Hier sind 3 Transpositionen erforderlich. Mit den 4 negativen Vorzeichen der $p_{j,i}$ bleibt ein Minus übrig. Der regelmäßige Aufbau der zu Schleifen gehörenden Permutationen garantiert das negative Vorzeichen. Dann wird auch ersichtlich, dass zu disjunkten Schleifenpaaren das Vorzeichen $(-1)\cdot(-1) = 1$ gehört, bei Tripeln $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$, usw.

Der Nenner der Mason-Regel

$$1 - \sum S_k + \sum S_k S_m - \sum S_k S_m S_n + \sum S_k S_m S_n S_p - \ldots +$$

dürfte nun verständlich sein.
Umgekehrt sind alle Summanden in der Determinante enthalten.

Der Zähler hat die Form (hier wird t_{43} beim Start in z_3 ermittelt):

$$\begin{vmatrix} (1-p_{11}) & -p_{12} & -p_{13} & 0 & -p_{15} \\ -p_{21} & (1-p_{22}) & -p_{23} & 0 & -p_{25} \\ -p_{31} & -p_{32} & (1-p_{33}) & 1 & -p_{35} \\ -p_{41} & -p_{42} & -p_{43} & 0 & -p_{45} \\ -p_{51} & -p_{52} & -p_{53} & 0 & (1-p_{55}) \end{vmatrix}$$

Es entstehen Terme wie (beachte $p_{34} = 1$ und $(-1)^{\text{Anzahl der benötigten Transpositionen}}$):

$$\underbrace{(-1)^1(-p_{43})p_{34}}_{p_{43}} \begin{vmatrix} (1-p_{11}) & -p_{12} & -p_{15} \\ -p_{21} & (1-p_{22}) & -p_{25} \\ -p_{51} & -p_{52} & (1-p_{55}) \end{vmatrix} \quad \text{oder}$$

$$\underbrace{(-1)^2(-p_{13})(-p_{41})p_{34}}_{p_{13}p_{41}} \begin{vmatrix} (1-p_{22}) & -p_{25} \\ -p_{52} & (1-p_{55}) \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \underbrace{(-1)^3(-p_{53})(-p_{15})(-p_{41})p_{34}}_{p_{53}p_{15}p_{41}}(1-p_{22})$$

Das erklärt den Zähler.
P(direkter Pfad (Knoten werden nicht mehrfach passiert) von 3 nach 4)$\left(1 - \sum S_k^* + \sum S_k^* S_m^* - \ldots +\right)$
S_i^* wie im Nenner, jedoch disjunkt zum Pfad. (Bei mehreren Pfaden sind die Terme zu summieren.)

↑ Mason-Regel

Die komprimierte Formulierung der Mason-Regel

$$t_{ji} \;=\; \frac{\sum\Big[P(\text{direkter Pfad von } i \text{ nach } j)\big(1-\sum S_k^* + \sum S_k^* S_m^* - \ldots +\big)\Big],\;\; S_i^* \text{ jeweils disjunkt zum Pfad}}{1-\sum S_k + \sum S_k S_m - \sum S_k S_m S_n + \sum S_k S_m S_n S_p - \ldots +,\;\; \text{disjunkte Schleifenprodukte}}$$

lautet:

$$t_{ji} \;=\; \frac{\sum\limits_k P_k \Delta_k}{\Delta}$$

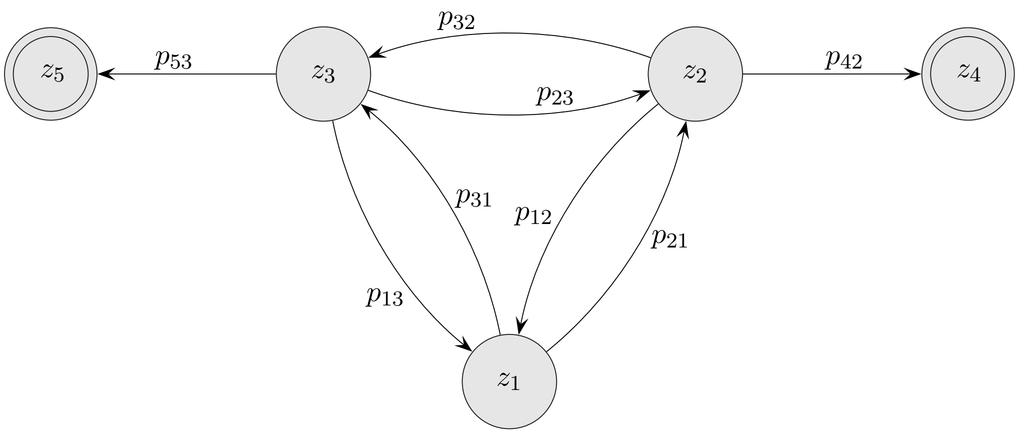
Für $i = j$ reduziert sich dies auf

$$t_{ii} \;=\; \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

wie der Herleitung unmittelbar zu entnehmen ist.
Es gibt nur einen direkten Pfad von i nach i (man ist schon dort) und die Wahrscheinlichkeit ist $P_i = 1$.

↑ Mittelwerts- und Mason-Regel

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erfolgt die Absorption in z_4 beim Start in z_1?



Mittelwertsregel:

$$\begin{aligned} a_1 &= p_{21}\,a_2 \;+\; p_{31}\,a_3 \\ a_2 &= p_{12}\,a_1 \;+\; p_{32}\,a_3 \;+\; p_{42}\,a_4 \\ a_3 &= p_{13}\,a_1 \;+\; p_{23}\,a_2 \\ a_4 &= 1 \end{aligned}$$

Mason-Regel

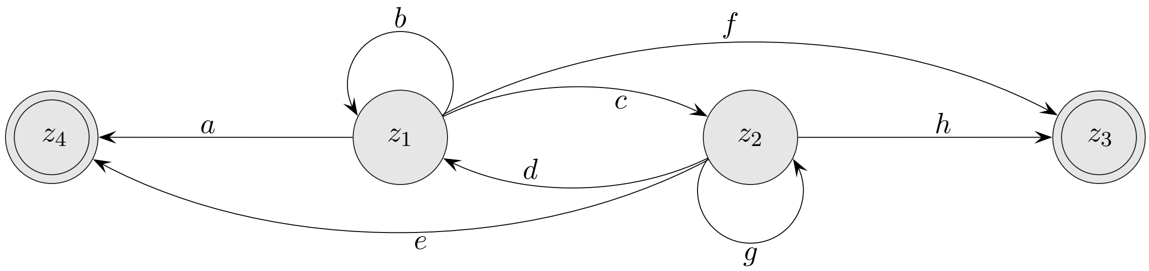
$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + p_{12}\,z_2 \;+\; p_{13}\,z_3 \\ z_2 &= p_{21}\,z_1 \;+\; p_{23}\,z_3 \\ z_3 &= p_{31}\,z_1 \;+\; p_{32}\,z_2 \\ z_4 &= p_{42}\,z_2 \end{aligned}$$

$$a_1 = z_4 = \frac{p_{42}\,p_{21} + p_{42}\,p_{23}\,p_{31}}{1 - p_{32}\,p_{23} - p_{12}\,p_{21} - p_{12}\,p_{23}\,p_{31} - p_{13}\,p_{31} - p_{13}\,p_{32}\,p_{21}}$$

Die Absorptionswahrscheinlichkeiten stimmen (natürlich) nach beiden Rechnungen überein.
Mit den beiden Gleichungssystemen und der Cramerschen Regel ist dies an einer transponierten Koeffizientenmatrix (mit gleicher Determinante) zu erkennen.

↑ Mason-Regel Beispiel

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erfolgt die Absorption in z_3 beim Start in z_1
und wie groß ist dann die Verweildauer in z_1 und in z_2?

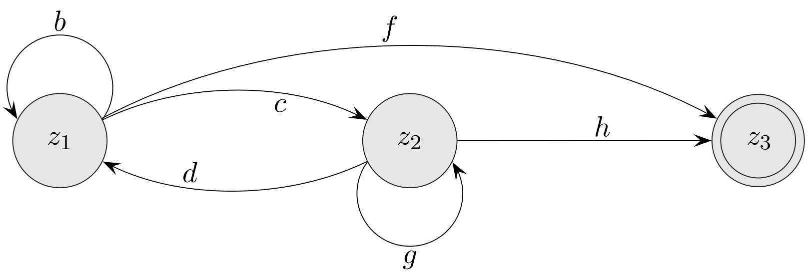


$$z_3 = \frac{ch + f(1-g)}{\Delta} \qquad \text{mit} \qquad \Delta = 1 - b - g - cd + bg$$

$$z_1 = \frac{1-g}{\Delta}$$

$$z_2 = \frac{c}{\Delta}$$

Für die Berechnung ist nur der Teilgraph



relevant.

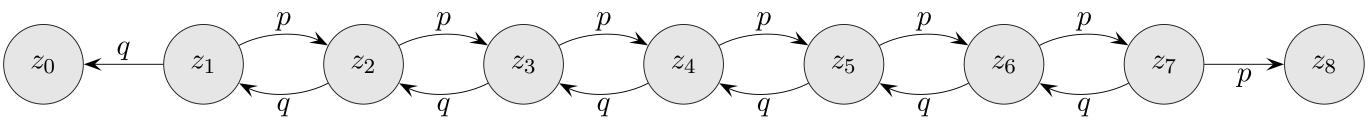
Beachte:

$z_4 = 1 - z_3$

$z_3 = f \cdot z_1 + h \cdot z_2$ (Flussregel)

↑ Mason-Regel Asymmetrische Irrfahrt

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erfolgt die Absorption in z_8 beim Start in z_4?



$$t_{84} = \frac{p^4(1-2qp)}{\Delta} \qquad \text{mit} \qquad \Delta = (1 - 6qp + 10q^2p^2 - 4p^3q^3)$$

Die Gleichungen gemäß der Flussregel lauten:

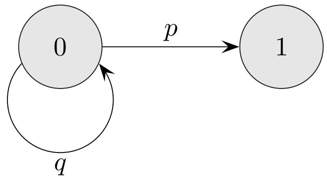
$$\begin{aligned}
z_8 &= \quad p\,z_7 \\
z_7 &= \quad p\,z_6 \\
z_6 &= \quad p\,z_5 \;+\; q\,z_7 \\
z_5 &= \quad p\,z_4 \;+\; q\,z_6 \\
z_4 &= 1 + p\,z_3 \;+\; q\,z_5 \\
z_3 &= \quad p\,z_2 \;+\; q\,z_4 \\
z_2 &= \quad p\,z_1 \;+\; q\,z_3 \\
z_1 &= \quad q\,z_2
\end{aligned}$$

Mit einem CAS erhalten wir:

$$t_{84} = \frac{p^4}{2q^2p^2 + 1 - 4qp}$$

Die Ergebnisse stimmen (natürlich) überein.

↑ Warten auf den ersten Treffer

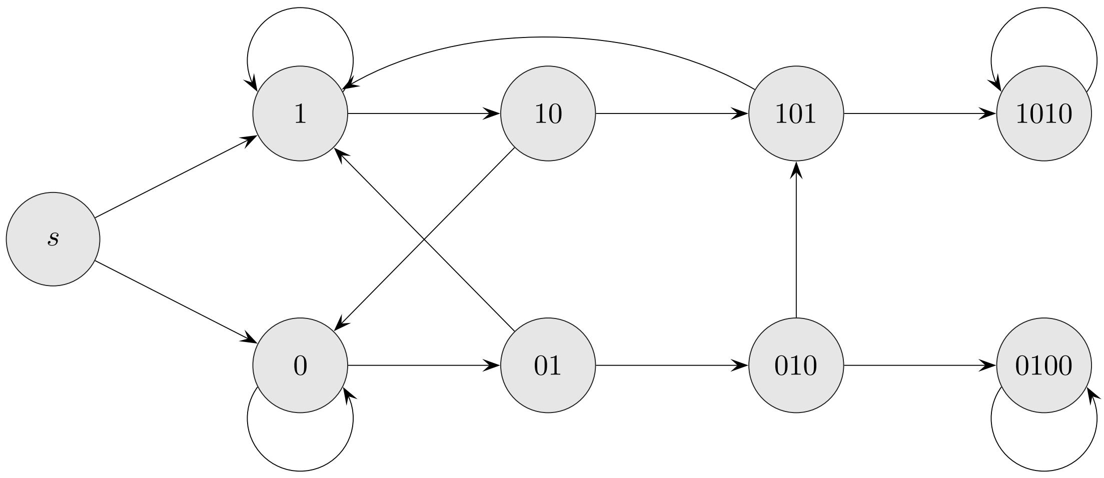


X sei die Anzahl der Übergänge bis zur Absorption.
Dem Graphen kann die geometrische Verteilung $p_k = q^{k-1}p,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$
unmittelbar abgelesen werden.

$$E(X) = t_{00} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

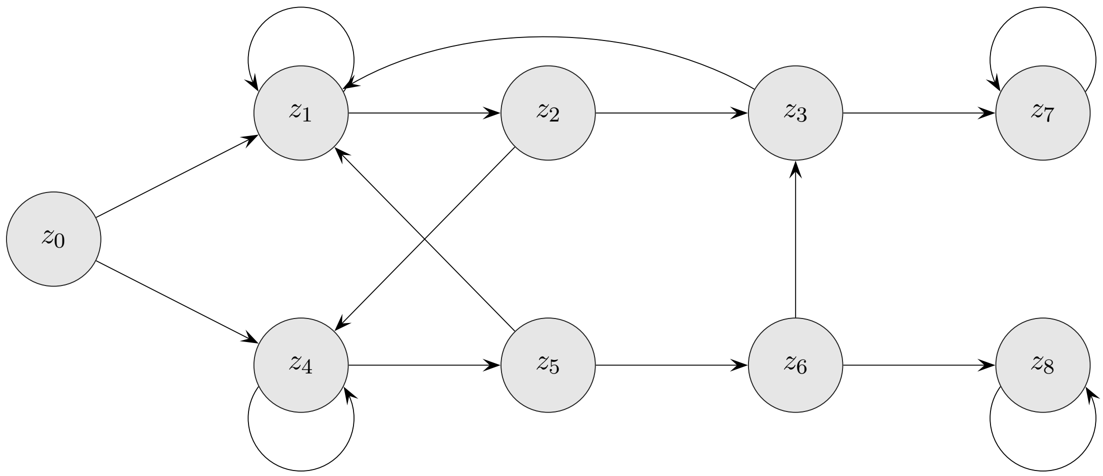
$$t_{10} = \frac{p}{1-q} = 1 \quad \text{(Wahrscheinlichkeit, beim Start in 0 in 1 absorbiert zu werden)}$$

↑ Konkurrierende Muster beim Werfen einer Münze



Mit welcher Wahrscheinlichkeit erfolgt die Absorption in 1010 beim Start in s?

↑ Konkurrierende Muster beim Werfen einer Münze



Mit welcher Wahrscheinlichkeit erfolgt die Absorption in z_7 beim Start in z_0?

Schleifen:

z_1

z_4

$z_1 z_2 z_3 z_1$

$z_1 z_2 z_4 z_5 z_6 z_3 z_1$

$z_1 z_2 z_4 z_5 z_1$

disjunkte Schleifenpaare:

$z_1, \ z_4$

$z_1 z_2 z_3 z_1, \ z_4$

Pfade mit disjunkten Schleifen:

$z_0 z_1 z_2 z_3 z_7, \ z_4$

$z_0 z_1 z_2 z_4 z_5 z_6 z_3 z_7$

$z_0 z_4 z_5 z_6 z_3 z_7, \ z_1$

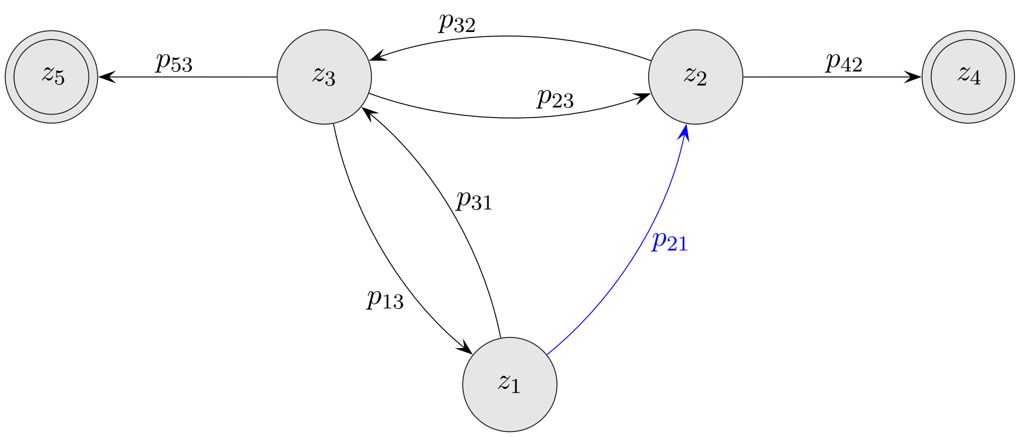
$z_0 z_4 z_5 z_1 z_2 z_3 z_7$

$$t_{70} = \frac{9}{14}$$

$$t_{80} = \frac{5}{14}$$

↑ Mason-Regel und erzeugende Funktion

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erfolgt die Absorption in z_4 beim Start in z_2?



$p_{21} = \frac{1}{2}, \quad p_{31} = \frac{1}{2}, \quad p_{32} = \frac{2}{3}, \quad p_{42} = \frac{1}{3}, \quad p_{13} = \frac{1}{2}, \quad p_{23} = \frac{1}{4} \quad p_{53} = \frac{1}{4}$

Mit der Mason-Regel:

$$z_4 = \frac{p_{42}(1 - p_{31}p_{13})}{1 - p_{23}p_{32} - p_{31}p_{13} - p_{21}p_{32}p_{13}} = \frac{3}{5}$$

Uns interessiert weiter die Wahrscheinlichkeit, dass die Absorption in z_4 beim Start in z_2 erfolgt und der blaue Pfad von z_1 nach z_2 keinmal, einmal, zweimal usw. durchlaufen wird.
Diese Ergebnisse können in der erzeugenden Funktion

$$g(s) = P(X = 0) + P(X = 1)s + P(X = 2)s^2 + P(X = 3)s^3 + \ldots$$

festgehalten werden.
Der Term von $g(s)$ kann unmittelbar angegeben werden.
Hierzu ist lediglich p_{21} durch $p_{21}s$ mit der Variablen s zu ersetzen.
$p_{21}s$ betrachten wir als (variable) Wahrscheinlichkeit.
Die Absorptionswahrscheinlichkeit beträgt nun (nach der Mason-Regel)

$$g(s) = \frac{p_{42}(1 - p_{31}p_{13})}{1 - p_{23}p_{32} - p_{31}p_{13} - p_{21}s\, p_{32}p_{13}} = \frac{3}{7 - 2s}$$

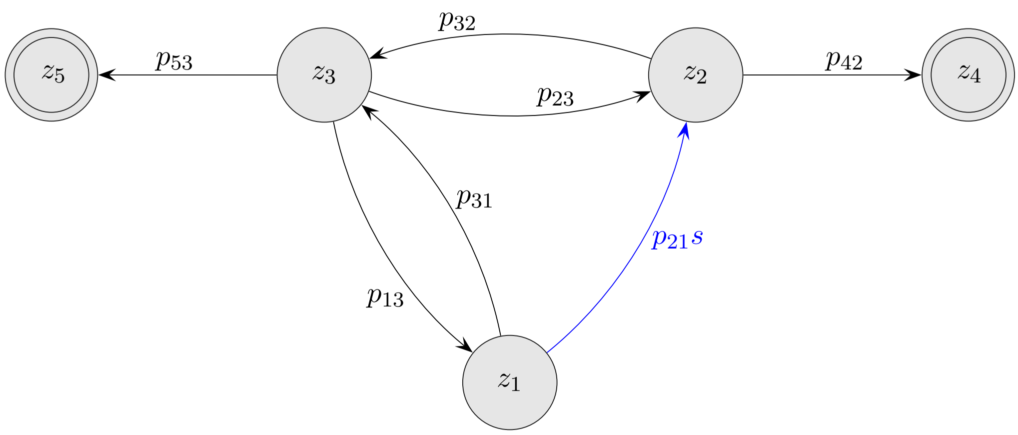
Mit der (eindeutigen) Taylor-Entwicklung erhalten wir das Gewünschte.

$$\frac{3}{7 - 2s} = \frac{3}{7} + \frac{6}{49}s + \frac{12}{343}s^2 + \frac{24}{2401}s^3 + \ldots \qquad \text{beachte:} \quad g(1) = \frac{3}{5}$$

Bei einer Übergangswahrscheinlichkeit von $p_{21}s$ und einer Absorption in z_4 wird der blaue Pfad z. B. mit einem Anteil von $1\,\% \cdot s^3$ dreimal durchlaufen. Bei einer Übergangswahrscheinlichkeit von p_{21} ($s = 1$) sind es $1\,\%$.

↑ Mason-Regel und erzeugende Funktion

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erfolgt die Absorption in z_5 beim Start in z_2?



$p_{21} = \frac{1}{2}, \quad p_{31} = \frac{1}{2}, \quad p_{32} = \frac{2}{3}, \quad p_{42} = \frac{1}{3}, \quad p_{13} = \frac{1}{2}, \quad p_{23} = \frac{1}{4} \quad p_{53} = \frac{1}{4}$

Die Absorptionswahrscheinlichkeit beträgt nun

$$h(s) = \frac{p_{32}p_{53}}{1 - p_{23}p_{32} - p_{31}p_{13} - p_{21}s\,p_{32}p_{13}} = \frac{2}{7-2s}$$

$$\frac{2}{7-2s} = \frac{2}{7} + \frac{4}{49}s + \frac{8}{343}s^2 + \frac{16}{2401}s^3 + \ldots \qquad \text{beachte:} \quad h(1) = \frac{2}{5}$$

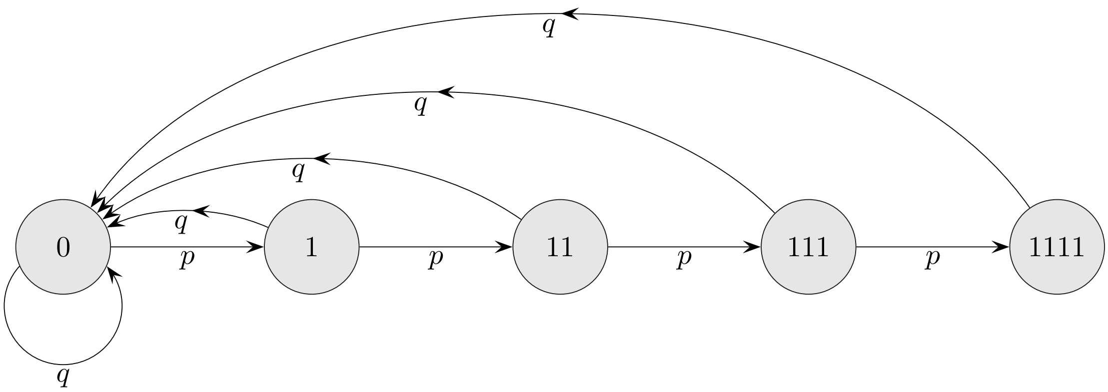
Die erzeugende Funktion für die Absorption (in z_4 oder z_5) lautet:

$$G(s) = \frac{3}{7-2s} + \frac{2}{7-2s} = \frac{5}{7-2s} = \frac{5}{7} + \frac{10}{49}s + \frac{20}{343}s^2 + \frac{40}{2401}s^3 + \ldots$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{7}$ wird der blaue Pfad gemieden.

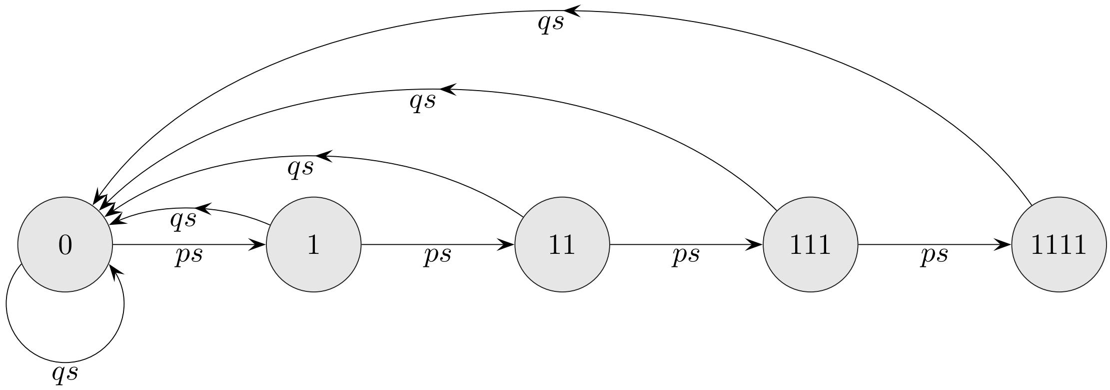
↑ Wartezeit in einem Bernoulli-Prozess

Wir betrachten einen Bernoulli-Prozess, der jede Sekunde das Zeichen 1 oder 0
mit den Wahrscheinlichkeiten p und q erzeugt.
Der Prozess wird beim ersten Auftreten von 1111 gestoppt.
Wie groß ist die mittlere Laufzeit für $p = \frac{1}{2}$?



↑ Wartezeit in einem Bernoulli-Prozess

Wir betrachten einen Bernoulli-Prozess, der jede Sekunde das Zeichen 1 oder 0 mit den Wahrscheinlichkeiten p und q erzeugt.
Der Prozess wird beim ersten Auftreten von 1111 gestoppt.
Wie groß ist die mittlere Laufzeit für $p = \frac{1}{2}$?



Die erzeugende Funktion lautet (Mason-Formel):

$$g(s) = \frac{p^4s^4}{1 - qs - pqs^2 - p^2qs^3 - p^3qs^4}$$

$$g(s) = \frac{1}{16}s^4 + \frac{1}{32}s^5 + \frac{1}{32}s^6 + \frac{1}{32}s^7 + \frac{1}{32}s^8 + \frac{15}{512}s^9 + \ldots \qquad \text{für } p = \frac{1}{2} \qquad \text{CAS}$$

$\mu = g'(1) = 30$

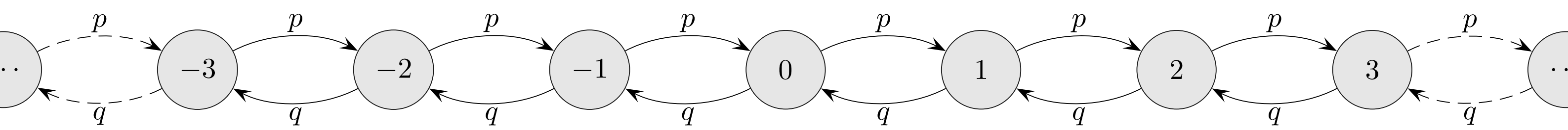
$\sigma^2 = g'(1) + g''(1) - g'(1)^2 = 734$

$\sigma \approx 27$

Durch die große Streuung sind Wurfzahlen von 4 bis 60 keine Seltenheit.

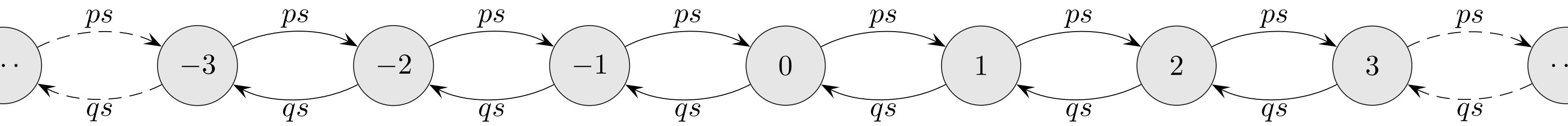
Erste Rückkehr zum Ursprung bei der asymmetrischen Irrfahrt

Ein Teilchen startet im Zustand 0 und springt jede Sekunde einen Schritt nach links oder rechts mit Wahrscheinlichkeit q bzw. p. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit nach 0 zurückzukehren?



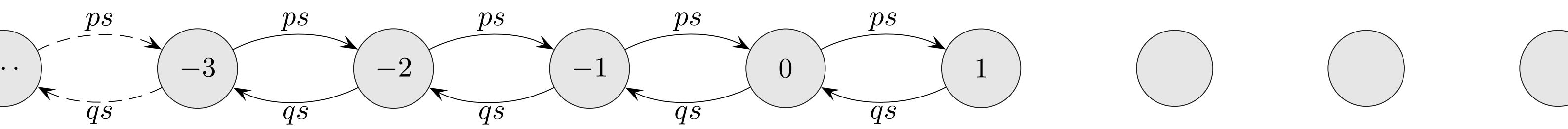
↑ Erste Rückkehr zum Ursprung bei der asymmetrischen Irrfahrt

Ein Teilchen startet im Zustand 0 und springt jede Sekunde einen Schritt nach links oder rechts mit Wahrscheinlichkeit q bzw. p. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit nach 0 zurückzukehren?



Um die erzeugende Funktion für diese Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, fügen wir den Übergangswahrscheinlichkeiten die Variable s als Faktor hinzu.

Sei $\varphi(s)$ die Wahrscheinlichkeit von 0 nach 1 zu gelangen (1 ist absorbierend).

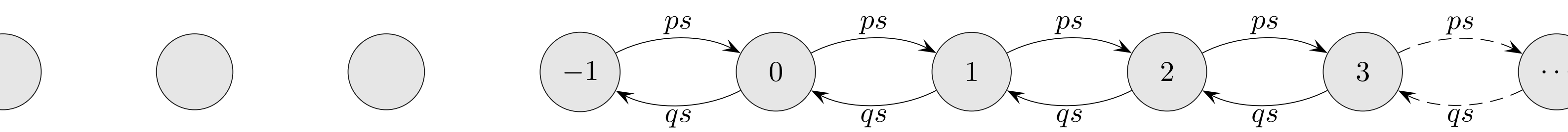


$$\begin{aligned} \varphi(s) &= ps + qs\,\varphi^2(s) \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4pqs^2}}{2qs} \\ &= \frac{1 - \sqrt{1-4pqs^2}}{2qs} \end{aligned}$$

beachte: $\varphi(s)$ ist auch die Wahrscheinlichkeit von -1 nach 0 zu gelangen.

Minuszeichen wegen $\varphi(s) = 0$ für $p = 0$

Sei $\psi(s)$ die Wahrscheinlichkeit von 0 nach -1 zu gelangen (-1 ist absorbierend).



$$\psi(s) = \frac{1 - \sqrt{1-4pqs^2}}{2ps}$$

p mit q vertauscht

$$\begin{aligned} g(s) &= qs\,\varphi(s) + ps\,\psi(s) \\ &= 1 - \sqrt{1-4pqs^2} \end{aligned}$$

$\psi(s)$ ist auch Wahrscheinlichkeit von 1 nach 0 zu gelangen.

$$g(1) = 1 - \sqrt{1-4pq} = 1 - |\,p-q\,|$$

Nur für $p = \frac{1}{2}$ ist die Rückkehr nach 0 sicher.

$$g(s) = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{8}s^4 + \frac{1}{16}s^6 + \frac{5}{128}s^8 + \ldots$$

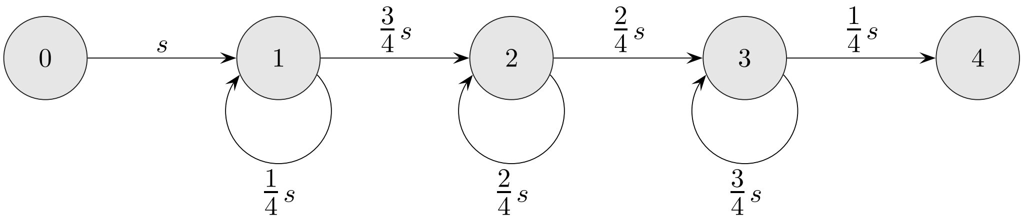
für $p = \frac{1}{2}$, $g(s) = 1 - \sqrt{1-s^2}$, $\mu = g'(1) = \infty$ (!)

↑ Wartezeit bis zu einer vollständigen Serie

Aus einer Urne mit 4 nummerierten Kugeln wird zufällig jeweils eine gezogen und wieder zurückgelegt. Dies wird solange wiederholt, bis jede Kugel mindestens einmal gezogen wurde. Wie lange dauert es im Schnitt, bis jede Kugel mindestens einmal gezogen wurde?

↑ Wartezeit bis zu einer vollständigen Serie

Aus einer Urne mit 4 nummerierten Kugeln wird zufällig jeweils eine gezogen und wieder zurückgelegt. Dies wird solange wiederholt, bis jede Kugel mindestens einmal gezogen wurde. In der Grafik geben die Zustände 0 bis 4 die Anzahl der gesammelten Nummern an.
Wie lange dauert es im Schnitt, bis jede Kugel mindestens einmal gezogen wurde?



Die erzeugende Funktion lautet (Mason-Formel):

$$g(s) = \frac{\frac{6}{64}s^4}{1 - \frac{6}{4}s + \frac{11}{16}s^2 - \frac{6}{64}s^3} = \frac{3s^4}{32 - 48s + 22s^2 - 3s^3}$$

$$g(s) = \frac{3}{32}s^4 + \frac{9}{64}s^5 + \frac{75}{512}s^6 + \ldots$$

$\mu = g'(1) = \frac{25}{3} \approx 8{,}3$

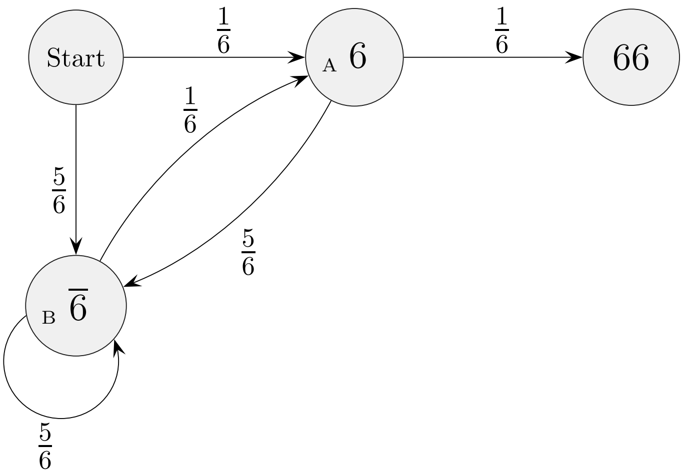
$\sigma^2 = g'(1) + g''(1) - g'(1)^2 = \frac{130}{9}$

$\sigma = 3{,}8$

Wurfzahlen von 4 bis 16 sind mit großer Sicherheit zu erwarten.

↑ Doppelte Sechs würfeln

Wie groß ist die durchschnittliche Anzahl an Würfen, bis das erste Mal zwei aufeinander folgende Sechsen auftauchen?



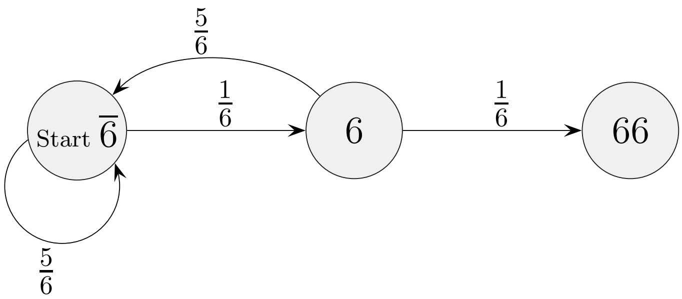
Sei A die erwartete Anzahl an Würfen, wenn gerade eine 6 geworfen wurde und B die erwartete Anzahl, wenn gerade keine 6 geworfen wurde. Dann gilt

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6}(1+B) \\ B &= \frac{1}{6}(1+A) + \frac{5}{6}(1+B) \end{aligned} \qquad \text{vereinfacht} \qquad \begin{aligned} 6A - 5B &= 6 \\ B - A &= 6 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich sofort $A = 36$ und $B = 42$ und für den Erwartungswert insgesamt

$$\frac{5}{6}(42+1) + \frac{1}{6}(36+1) = 42$$

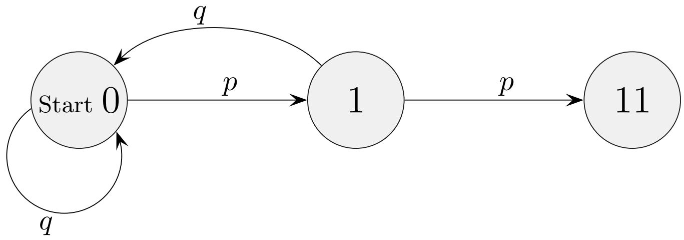
Das Ergebnis stimmt mit B überein, da wir mit der Annahme, keine 6 gewürfelt zu haben, starten können.



Die erzeugende Funktion lautet $f(s) = \dfrac{s^2}{36 - 30s - 5s^2}$. $\qquad \dfrac{(1-ps)p^2s^2}{1 - s + p^2qs^3} = \dfrac{p^2s^2}{1 - qs - pqs^2}, \ p = \dfrac{1}{6}$

Die Standardabweichung beträgt 40,6,
siehe Erzeugende Funktionen.

↑ Warten auf den ersten Doppeltreffer, alternativ



Die möglichen Pfade werden in drei disjunkte Teilmengen gemäß des jeweiligen Pfadanfangs unterteilt. $(0\dots 11)$ ist ein Pfad, dem ein bestehender Pfad 0 hinzugefügt wurde. $(10\dots 11)$ ist ein Pfad, dem ein bestehender Pfad 10 hinzugefügt wurde.

$\Omega = \{\dots 11 \mid 11 \text{ taucht erstmalig im Pfad auf}\} = \{0\dots 11\} \cup \{10\dots 11\} \cup \{11\}$ Schreibweise vereinfacht

Erwartungswert

$$\mu = E(X) = \sum_{\omega_i \in \Omega} \omega_i X_i, \quad X_i \text{ Anzahl der Schritte des Pfades } \omega_i \text{ bis zur Absoption in 11}$$

$$= \sum_{\omega_i \in \Omega} q\omega_i(X_i + 1) + \sum_{\omega_i \in \Omega} pq\omega_i(X_i + 2) + p^2 \cdot 2$$

$$\mu = q(\mu + 1) + pq(\mu + 2) + p^2 \cdot 2, \qquad \sum_{\omega_i \in \Omega} q\omega_i(X_i + 1) = q\big(\sum_{\omega_i \in \Omega} \omega_i X_i + \sum_{\omega_i \in \Omega} \omega_i\big) = q(\mu + 1)$$

$$\Longrightarrow \quad \mu = \tfrac{1+p}{p^2}$$

$$p = \frac{1}{6}, \quad \mu = 42$$

Die Varianz kann mit $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$ ermittelt werden (wird dreimal verwendet).

$$E(X^2) = \sum_{\omega_i \in \Omega} q\omega_i(X_i + 1)^2 + \sum_{\omega_i \in \Omega} pq\omega_i(X_i + 2)^2 + p^2 \cdot 2^2$$

$$= \sum_{\omega_i \in \Omega} q\omega_i(X_i^2 + 2X_i + 1) + \sum_{\omega_i \in \Omega} pq\omega_i(X_i^2 + 4X_i + 4) + p^2 \cdot 4$$

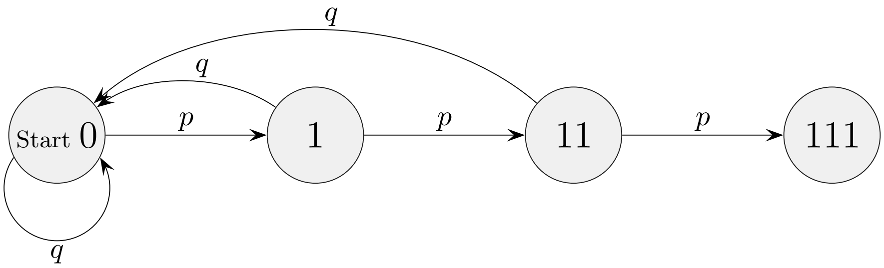
$$= qV(X) + 2q\mu + q + pqV(X) + 4pq\mu + 4pq + p^2 \cdot 4 + \underbrace{q\mu^2 + pq\mu^2}_{\text{wird ergänzt, damit } V(X) \text{ eingefügt werden kann}}$$

auf beiden Seiten μ^2 subtrahiert, ergibt links $V(X)$

$$V(X)(1 - q - pq) = (2 + 4p)q\mu + (1 + 4p)q + 4p^2 + (q + pq - 1)\mu^2$$

$$V(X) = \frac{1 + 2p - 2p^2 - p^3}{p^4} \qquad \text{vereinfacht} \qquad p = \frac{1}{6}, \quad \sigma = 40{,}6$$

↑ Warten auf den ersten Dreifachtreffer



Die möglichen Pfade werden in vier disjunkte Teilmengen gemäß des jeweiligen Pfadanfangs unterteilt. $(0\ldots111)$ ist ein Pfad, dem ein bestehender Pfad 0 hinzugefügt wurde. $(10\ldots111)$ ist ein Pfad, dem ein bestehender Pfad 10 hinzugefügt wurde, ...

$$\Omega = \{\ldots 111 \mid 111 \text{ taucht erstmalig im Pfad auf}\} = \{0\ldots111\} \cup \{10\ldots111\} \cup \{110\ldots111\} \cup \{111\}$$

Schreibweise vereinfacht

Erwartungswert

$$\mu = E(X) = \sum_{\omega_i \in \Omega} \omega_i X_i, \quad X_i \text{ Anzahl der Schritte des Pfades } \omega_i \text{ bis zur Absoption in 111}$$

$$= \sum_{\omega_i \in \Omega} q\omega_i(X_i+1) + \sum_{\omega_i \in \Omega} pq\omega_i(X_i+2) + \sum_{\omega_i \in \Omega} p^2q\omega_i(X_i+3) + p^3 \cdot 3$$

$$\mu = q(\mu+1) + pq(\mu+2) + p^2q(\mu+3) + p^3 \cdot 3, \qquad \sum_{\omega_i \in \Omega} pq\omega_i(X_i+2) = \ldots = pq(\mu+2)$$

$$\Longrightarrow \quad \mu = \frac{1+p+p^2}{p^3}$$

$$p = \frac{1}{6}, \quad \mu = 258$$

Die Varianz kann mit $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$ ermittelt werden (wird viermal verwendet).

$$E(X^2) = \sum_{\omega_i \in \Omega} q\omega_i(X_i+1)^2 + \sum_{\omega_i \in \Omega} pq\omega_i(X_i+2)^2 + \sum_{\omega_i \in \Omega} p^2q\omega_i(X_i+3)^2 + p^3 \cdot 3^2$$

$$= \sum_{\omega_i \in \Omega} q\omega_i(X_i^2+2X_i+1) + \sum_{\omega_i \in \Omega} pq\omega_i(X_i^2+4X_i+4) + \sum_{\omega_i \in \Omega} p^2q\omega_i(X_i^2+6X_i+9) + p^3 \cdot 9$$

$$= qV(X) + 2q\mu + q + pqV(X) + 4pq\mu + 4pq + p^2qV(X) + 6p^2q\mu + 9p^2q + p^3 \cdot 9 + \underbrace{q\mu^2 + pq\mu^2 + p^2q\mu^2}_{\text{wird ergänzt, damit } V(X) \text{ eingefügt werden kann}}$$

auf beiden Seiten μ^2 subtrahiert, ergibt links $V(X)$

$$V(X)(1-q-pq-p^2q) = (2+4p+6p^2)q\mu + (1+4p+9p^2)q + 9p^3 + (q+pq+p^2q-1)\mu^2$$

$$V(X) = \frac{1+2p+3p^2-3p^3-2p^4-p^5-9p^6}{p^6} \qquad \text{vereinfacht} \qquad p = \frac{1}{6}, \quad \sigma = 255{,}7$$