Unabhängigkeit

Wir werfen dreimal eine Laplace-Münze (0/1).

$$\begin{aligned}\{&(\,0\;\;0\;\;0\,),\\ &(\,0\;\;0\;\;1\,),\\ &(\,0\;\;1\;\;0\,),\\ &(\,0\;\;1\;\;1\,),\\ &(\,1\;\;0\;\;0\,),\\ &(\,1\;\;0\;\;1\,),\\ &(\,1\;\;1\;\;0\,),\\ &(\,1\;\;1\;\;1\,)\}\end{aligned}$$

und betrachten die Ereignisse:

$A =$ "Im 3. Wurf eine 1." mit $P(A) = \frac{1}{2}$,

$B =$ "In den ersten beiden Würfen keine 1." mit $P(B) = \frac{1}{4}$.

Wenn wir nun wissen, dass B eingetroffen ist und nach der Wahrscheinlichkeit von A fragen, so ändert sich mit diesem Zusatzwissen $P(A)$ nicht, A ist von B unabhängig.

$$\begin{aligned}\{&(\,0\;\;0\;\;0\,),\\ &(\,0\;\;0\;\;1\,),\\ &(\,0\;\;1\;\;0\,),\\ &(\,0\;\;1\;\;1\,),\\ &(\,1\;\;0\;\;0\,),\\ &(\,1\;\;0\;\;1\,),\\ &(\,1\;\;1\;\;0\,),\\ &(\,1\;\;1\;\;1\,)\}\end{aligned}$$

Wenn wir umgekehrt wissen, dass A eingetroffen ist und nach der Wahrscheinlichkeit von B fragen, so ändert sich mit diesem Zusatzwissen $P(B)$ nicht, B ist von A unabhängig.

$$\begin{aligned}\{&(\,0\;\;0\;\;0\,),\\ &(\,0\;\;0\;\;1\,),\\ &(\,0\;\;1\;\;0\,),\\ &(\,0\;\;1\;\;1\,),\\ &(\,1\;\;0\;\;0\,),\\ &(\,1\;\;0\;\;1\,),\\ &(\,1\;\;1\;\;0\,),\\ &(\,1\;\;1\;\;1\,)\}\end{aligned}$$

Wir werden noch sehen, dass gilt: A ist von B unabhängig. $\Longrightarrow$ B ist von A unabhängig.

Unabhängigkeit

Wir werfen dreimal eine Laplace-Münze (0/1).

$$\begin{aligned}
\{&(\,0\;\;0\;\;0\,),\\
&(\,0\;\;0\;\;1\,),\\
&(\,0\;\;1\;\;0\,),\\
&(\,0\;\;1\;\;1\,),\\
&(\,1\;\;0\;\;0\,),\\
&(\,1\;\;0\;\;1\,),\\
&(\,1\;\;1\;\;0\,),\\
&(\,1\;\;1\;\;1\,)\}
\end{aligned}$$

und untersuchen die Unabhängigkeit der Ereignisse:

$A =$ "Im 3. Wurf eine 1." mit $P(A) = \frac{1}{2}$,

$C =$ "Das Wurfergebnis wechselt stets."

Unabhängigkeit

Wir werfen dreimal eine Laplace-Münze (0/1).

$$
\begin{aligned}
\{&(\,0\;\;0\;\;0\,),\\
&(\,0\;\;0\;\;1\,),\\
&(\,0\;\;1\;\;0\,),\\
&(\,0\;\;1\;\;1\,),\\
&(\,1\;\;0\;\;0\,),\\
&(\,1\;\;0\;\;1\,),\\
&(\,1\;\;1\;\;0\,),\\
&(\,1\;\;1\;\;1\,)\}
\end{aligned}
$$

und untersuchen die Unabhängigkeit der Ereignisse:

$A =$ "Im 3. Wurf eine 1.

$C =$ "Das Wurfergebnis wechselt stets."

$$
\begin{aligned}
\{&(\,0\;\;0\;\;0\,),\\
&(\,0\;\;0\;\;1\,),\\
&(\,0\;\;1\;\;0\,),\\
&(\,0\;\;1\;\;1\,),\\
&(\,1\;\;0\;\;0\,),\\
&(\,1\;\;0\;\;1\,),\\
&(\,1\;\;1\;\;0\,),\\
&(\,1\;\;1\;\;1\,)\}
\end{aligned}
$$

$P(C) = \frac{1}{4}$

$P(C)$ ändert sich nicht, wenn davon ausgegangen wird, dass A eingetreten ist.

Unabhängigkeit

Wir werfen dreimal eine Laplace-Münze (0/1).

$$\begin{aligned}
\{&(\,0\ \ 0\ \ 0\,),\\
&(\,0\ \ 0\ \ 1\,),\\
&(\,0\ \ 1\ \ 0\,),\\
&(\,0\ \ 1\ \ 1\,),\\
&(\,1\ \ 0\ \ 0\,),\\
&(\,1\ \ 0\ \ 1\,),\\
&(\,1\ \ 1\ \ 0\,),\\
&(\,1\ \ 1\ \ 1\,)\}
\end{aligned}$$

und untersuchen die Unabhängigkeit der Ereignisse:

$A =$ "Im 3. Wurf eine 1."

$D =$ "Das Summe der Wurfergebnisse beträgt mindestens 2."

Unabhängigkeit

Wir werfen dreimal eine Laplace-Münze (0/1).

$$\begin{array}{l}\{(\,0\;\;0\;\;0\,),\\ \;(\,0\;\;0\;\;1\,),\\ \;(\,0\;\;1\;\;0\,),\\ \;(\,0\;\;1\;\;1\,),\\ \;(\,1\;\;0\;\;0\,),\\ \;(\,1\;\;0\;\;1\,),\\ \;(\,1\;\;1\;\;0\,),\\ \;(\,1\;\;1\;\;1\,)\}\end{array}$$

und untersuchen die Unabhängigkeit der Ereignisse:

$A =$ "Im 3. Wurf eine 1.

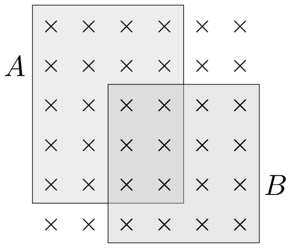
$D =$ "Das Summe der Wurfergebnisse beträgt mindestens 2."

$$\begin{array}{l}\{(\,0\;\;0\;\;0\,),\\ \;(\,0\;\;0\;\;1\,),\\ \;(\,0\;\;1\;\;0\,),\\ \;(\,0\;\;1\;\;1\,),\\ \;(\,1\;\;0\;\;0\,),\\ \;(\,1\;\;0\;\;1\,),\\ \;(\,1\;\;1\;\;0\,),\\ \;(\,1\;\;1\;\;1\,)\}\end{array}$$

$P(D) = \frac{1}{2}$

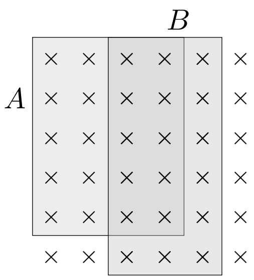
Wenn wir davon ausgehen, dass A vorliegt, gilt $P_A(D) = \frac{3}{4}$, alternative Schreibweise $P(D\,|\,A) = \frac{3}{4}$.
A und D sind stochastisch abhängig.

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$



$$P(A) = \frac{20}{36}, \quad P(B) = \frac{16}{36}, \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{6}{16} \neq P(A) \iff P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$$

Die Information, dass B eingetroffen ist, führt zu einer veränderten Wahrscheinlichkeit von A.



$$P(A) = \frac{20}{36}, \quad P(B) = \frac{18}{36}, \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{10}{18} = P(A) \iff P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

Die Information, dass B eingetroffen ist, verändert nicht die Wahrscheinlichkeit von A.
A und B sind stochastisch unabhängig.

$$P(B) = \frac{1}{2}, \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{10}{20} = P(B) \iff P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

Die Information, dass A eingetroffen ist, verändert nicht die Wahrscheinlichkeit von B.
Der Anteil von A an allen Ergebnissen bleibt gleich, wenn wir uns auf B beschränken und hiervon den Anteil der Ergebnisse von A betrachten, die in B enthalten sind.

Man beachte die Symmetrie der Bedingung $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$ für Unabhängigkeit.

Unabhängigkeit und Vier-Felder-Tafel

Unabhängigkeit von A und B bedeutet:
Der Anteil von A an allen Ergebnissen bleibt gleich, wenn wir uns auf B beschränken und hiervon den Anteil der Ergebnisse von A betrachten, die in B enthalten sind.

Für eine Vier-Felder-Tafel

	A	$\overline{A}$	*Summe*
B	a	b	$a+b$
$\overline{B}$	c	d	$c+d$
Summe	$a+c$	$b+d$	$s=a+b+c+d$

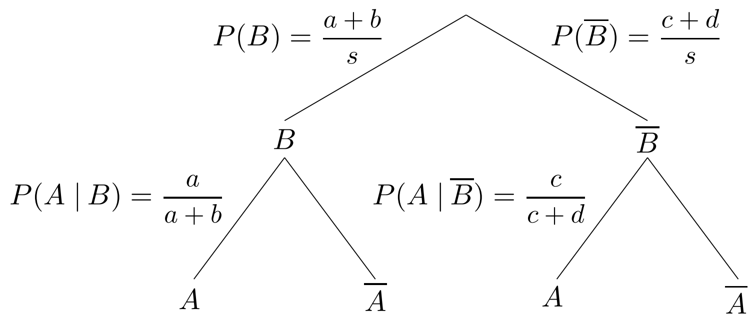
heißt das:

A und B sind unabhängig, falls gilt:

$$\begin{aligned} P_B(A) &= P(A) \\ \frac{a}{a+b} &= \frac{a+c}{s} \qquad \Longleftrightarrow \qquad as=(a+b)(a+c) \qquad \Longleftrightarrow \qquad ad=cb \end{aligned}$$

Unabhängigkeit und Pfaddiagramm

	A	$\overline{A}$	*Summe*
B	a	b	$a+b$
$\overline{B}$	c	d	$c+d$
Summe	$a+c$	$b+d$	$s=a+b+c+d$



A und B sind unabhängig, falls gilt (Teilbäume stimmen überein):

$$P(A\mid B) = P(A\mid \overline{B})$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \quad \Longleftrightarrow \quad a(c+d)=c(a+b) \quad \Longleftrightarrow \quad ad=cb$$

siehe vorige Seite