Vier-Felder-Tafel

Für die Personen in einer Klasse liegen folgende Anzahlen (absolute Häufigkeiten) vor:

	< 16 Jahre	*≥ 16 Jahre*	*Summe*
weiblich	6	12	18
männlich	2	4	6
Summe	8	16	24

Eine Person wird zufällig ausgewählt.
Ermittle die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

Die Person ist

a) unter 16 Jahren,

b) männlichen Geschlechts,

c) unter 16 Jahren und weiblich,

d) weiblich oder jünger als 16 Jahre,

e) männlich, wenn sie unter 16 Jahre alt ist,

f) weiblich, wenn sie unter 16 Jahren alt ist,

g) weiblich, wenn sie mindestens 16 Jahre alt ist.

Vier-Felder-Tafel

Für die Personen in einer Klasse liegen folgende Anzahlen (absolute Häufigkeiten) vor:

	< 16 Jahre	*≥ 16 Jahre*	*Summe*
weiblich	6	12	18
männlich	2	4	6
Summe	8	16	24

Eine Person wird zufällig ausgewählt.
Ermittle die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

Die Person ist

a) unter 16 Jahren, $\frac{8}{24} = \frac{1}{3} = 33{,}3\,\%$

b) männlichen Geschlechts, $\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 25{,}0\,\%$

c) unter 16 Jahren und weiblich, $\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 25{,}0\,\%$

d) weiblich oder jünger als 16 Jahre, $\frac{18+2}{24} = \frac{5}{6} = 83{,}3\,\%$

e) männlich, wenn sie unter 16 Jahre alt ist, $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25{,}0\,\%$

f) weiblich, wenn sie unter 16 Jahren alt ist, $\frac{1}{3} = \frac{3}{4} = 75{,}0\,\%$

g) weiblich, wenn sie mindestens 16 Jahre alt ist. $\frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 75{,}0\,\%$

Beachte, dass die bedingten Wahrscheinlichkeiten unter f) und g) übereinstimmen.
Der Grund wird uns im Folgenden beschäftigen.

Unabhängigkeit

	A	$\overline{A}$	*Summe*
B	a	b	$a+b$
$\overline{B}$	c	d	$c+d$
Summe	$a+c$	$b+d$	$s=a+b+c+d$

Wir bezeichnen mit $P(A \mid B)$ die Wahrscheinlichkeit von A unter der Annahme, dass B eingetroffen ist (bedingte Wahrscheinlichkeit), alternative Schreibweise $P_B(A)$.

Beispiele: $P(A \mid B) = \dfrac{a}{a+b}$, $\quad P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{b}{b+d}$

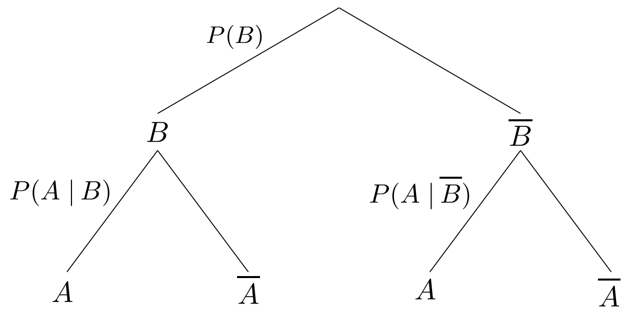
A ist von B unabhängig, falls gilt:

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= P(A \mid \overline{B}) \\ \frac{a}{a+b} &= \frac{c}{c+d} \\ ad &= bc \end{aligned}$$

mit $(a+b)(c+d)$ multiplizieren und vereinfachen

Wenn A von B unabhängig ist, dann ist auch B von A unabhängig (Ansatz führt auch auf $ad = bc$).

In einem Pfaddiagramm ist die Unabhängigkeit von A und B an gleichen Teilbäumen zu erkennen.



A ist von B unabhängig, falls gilt:

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= P(A) \\ \frac{a}{a+b} &= \frac{a+c}{s} \\ ad &= bc \end{aligned}$$

mit $(a+b)s$ multiplizieren und vereinfachen, $s = a+b+c+d$

Aus $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$ folgt $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

A und B sind unabhängig, falls $P(A \mid B) = P(A)$ ist,
d. h. wenn gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Von den vielen äquivalenten Formulierungen für Unabhängigkeit wird überwiegend
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ für die Definition verwendet.

Für die Vier-Felder-Tafel heißt das:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\ \frac{a}{s} &= \frac{a+c}{s} \cdot \frac{a+b}{s} \qquad \text{mit } s^2 \text{ multiplizieren und vereinfachen führt zu} \\ ad &= bc \end{aligned}$$

$ad = bc$ könnte als Kreuzbedingung bezeichnet werden.

Erläutere die Definition für das 2malige Werfen eines Würfels und den Ereignissen:
$A =$ „Im 1. Wurf eine 6.“
$B =$ „Im 2. Wurf eine 6.“