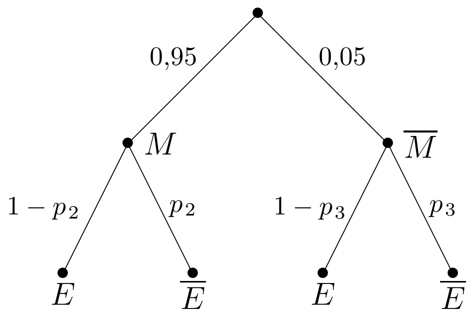
Stochastische Unabhängigkeit

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Waschmaschine defekt ist, beträgt 0,088. Für einen Defekt gibt es zwei Gründe: eine defekte Mechanik (tritt mit Wahrscheinlichkeit 0,05 auf) und eine defekte Elektronik. Beide Defekte treten gleichzeitig mit der Wahrscheinlichkeit 0,002 auf. Wir wollen untersuchen, ob die beiden Defekte unabhängig voneinander sind.



$\overline{M}$ defekte Mechanik

$\overline{E}$ defekte Elektronik

$P(\text{“Waschmaschine defekt“}) = P(\overline{M} \cup \overline{E}) = 0{,}088$

$P(\text{“Mechanik und Elektronik defekt“}) = P(\overline{M} \cap \overline{E}) = 0{,}002$

Die Defekte sind unabhängig, falls $p_2 = p_3$ ist.
p_2 und p_3 können wir mit Hilfe des Baumdiagramms ermitteln.

$0{,}05 \cdot p_3 = 0{,}002 \quad \Longrightarrow \quad p_3 = 0{,}04$

$1 - 0{,}088 = 0{,}95 \cdot (1 - p_2) \quad \Longrightarrow \quad p_2 = 0{,}04$

Die Wahrscheinlichkeit für eine defekte Elektronik wird also nicht durch eine defekte Mechanik beeinflusst.

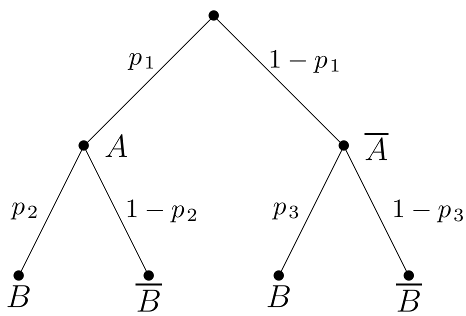
Für die Unabhängigkeit zweier Ereignisse gibt es ein einfaches Kriterium.
Denken wir an das zweifache Werfen eines Würfels und an die Ereignisse:

A im ersten Wurf tritt eine 1 auf,
B im zweiten Wurf tritt eine 2 auf,
$A \cap B$ im ersten Wurf tritt eine 1 auf und im zweiten eine 2

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B bleibt unabhängig vom Ergebnis des ersten Wurfs $\dfrac{1}{6}$.
Es ist $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Wir zeigen nun, dass $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ äquivalent zu $p_2 = p_3$ ist und somit die Unabhängigkeit zweier Ereignisse A und B charakterisiert.

$$\begin{array}{llcll}
\text{Mit} & P(A) & = & p_1 & \\
 & P(B) & = & p_1 p_2 + (1-p_1)\,p_3 & \\
 & P(A \cap B) & = & p_1 p_2 & \text{folgt :} \\
\hline
 & P(A \cap B) & = & P(A) \cdot P(B) & \\
\Longleftrightarrow & p_1 p_2 & = & p_1^2 p_2 + (1-p_1)\,p_3 p_1 & \mid p_1 > 0 \\
\Longleftrightarrow & \ldots & & & \mid p_1 < 1 \\
\Longleftrightarrow & p_3 & = & p_2 &
\end{array}$$



Definition: Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig, falls $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ist.

Stochastische Unabhängigkeit

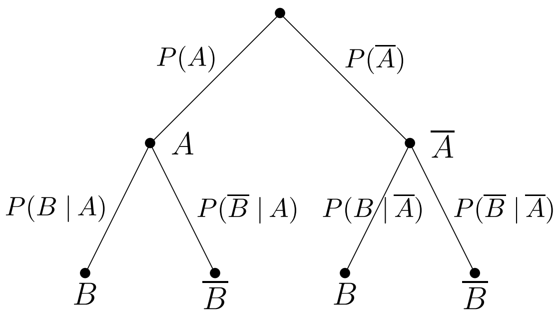
Die Bezeichnungen der Wahrscheinlichkeiten in einem Baumdiagramm lassen sich verbessern:
Sei z. B. $P(B \mid A)$ die (bedingte) Wahrscheinlichkeit von B unter der Annahme, dass A eingetreten ist. Es ist dann $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$ und mit dem Vorigen sind die Ereignisse A und B genau dann unabhängig, falls $P(B \mid A) = P(B)$ ist, falls das Eintreten von A für die Wahrscheinlichkeit von B ohne Belang ist.

Aus $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$ folgt

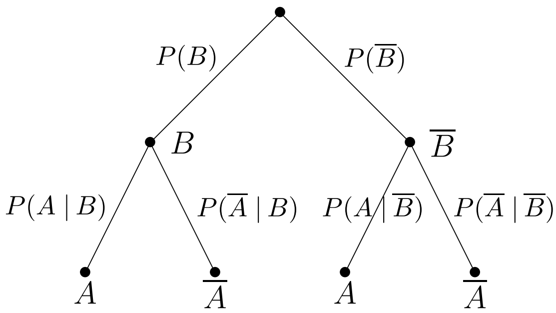
$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

und aus Symmetriegründen gilt dann auch

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



Ein Blick auf das Diagramm bringt die Erkenntnis, dass dieser Sachverhalt uns schon geläufig ist.
Aus der sogenannten Umkehrung des Baumdiagramms ist er direkt abzulesen. Die Wahrscheinlichkeiten für dieses Diagramm werden in naheliegender Weise berechnet.



Beweise die Äquivalenz der Aussagen:

a) A und B sind unabhängig.

b) A und $\overline{B}$ sind unabhängig.

c) $\overline{A}$ und $\overline{B}$ sind unabhängig.