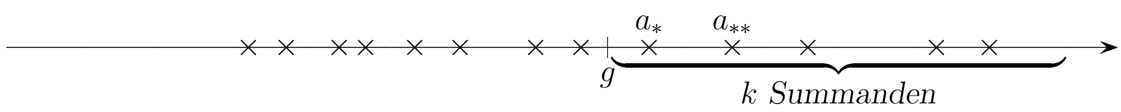
# Tschebyschow'sche Ungleichung $\quad P(\,|\,X - E(X)\,| \geq \alpha) \;\leq\; \dfrac{V(X)}{\alpha^2}$

Sie schätzt grob die Wahrscheinlichkeit ab, mit der das Ergebnis eines Zufallsversuchs um mehr als eine vorgegebene Zahl $\alpha$ vom Erwartungswert $\mu = E(X)$ abweicht.

Die Begründung der Ungleichung beruht auf einer simplen Abschätzung der Summe einer Reihe mit positiven Summanden: $\quad s \;=\; a_1 + a_2 + a_3 + \;...\; + a_n$.




Wenn für eine beliebig vorgegebene Zahl $g$ insgesamt $k$ Summanden größer oder gleich $g$ sind, dann gilt: $\quad k \cdot g \leq s$.

Hierbei fallen die Summanden kleiner als $g$ unter den Tisch,
die größeren werden nach unten grob durch $g$ abgeschätzt.

Sei nun $\qquad \underbrace{(X(\omega_1) - \mu)^2}_{a_1} \cdot p_1 + \underbrace{(X(\omega_2) - \mu)^2}_{a_2} \cdot p_2 + \;...\; + \underbrace{(X(\omega_n) - \mu)^2}_{a_n} \cdot p_n \;=\; V(X)$

oder kürzer: $\qquad a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \;...\; + a_n \cdot p_n \;=\; V(X)$

Wir lassen zunächst alle Summanden weg, für die $a_i$ kleiner als g ist, dann gilt:

$$\underbrace{a_* \cdot p_* \;+\; a_{**} \cdot p_{**} \;+\; ...}_{\textit{alle Summanden mit } a_i \geq g} \qquad \leq \;\; V(X)$$

$$\Longrightarrow \qquad g \cdot p_* \;+\; g \cdot p_{**} \;+\; ... \qquad \leq \;\; V(X)$$

$$\Longrightarrow \qquad g\,(\underbrace{p_* \;+\; p_{**} \;+\; ...}_{\substack{\textit{Wahrscheinlichkeit} \\ \textit{für die } a_i \geq g \textit{ ist, d.h.} \\ P(\,(X(\omega) - \mu)^2 \geq g)}}) \qquad \leq \;\; V(X)$$

$$\Longrightarrow \qquad P(\,(X(\omega) - \mu)^2 \geq g) \qquad \leq \;\; \frac{V(X)}{g}$$

Die Schreibweise kann noch vereinfacht werden, falls $g = \alpha^2$ gesetzt wird:

$$(X(\omega) - \mu)^2 \;\;\geq\;\; \alpha^2$$

$$\Longleftrightarrow \;\; |\,X(\omega) - \mu\,| \;\;\geq\;\; \alpha$$

Insgesamt erhalten wir: $\qquad P(\,|\,X - \mu\,| \geq \alpha) \;\leq\; \dfrac{V(X)}{\alpha^2}$

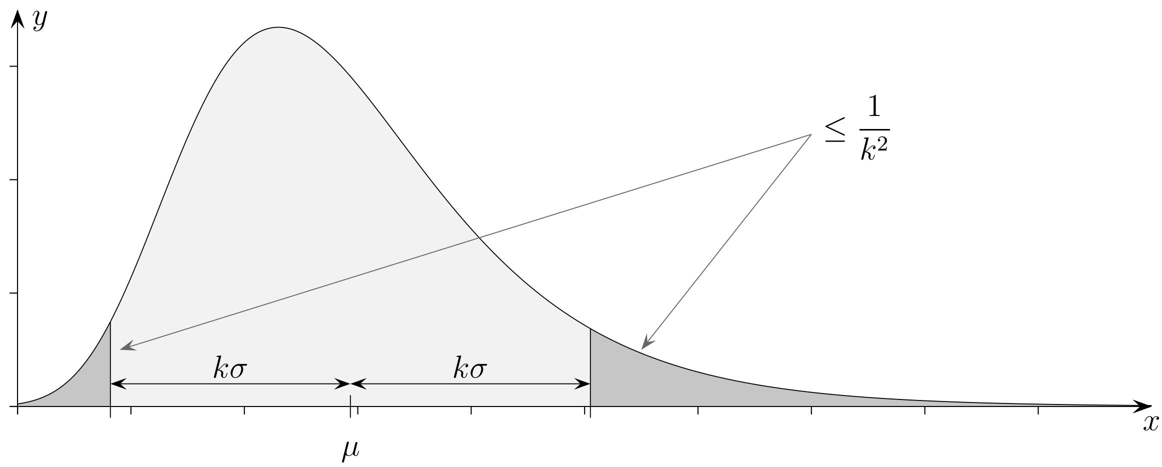
# Tschebyschow'sche Ungleichung

Die Tschebyschow-Ungleichung

$$P(\mid X-\mu\mid \geq \alpha) \;\leq\; \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

nimmt eine einprägsame Form an, wenn für $\alpha$ ein Vielfaches von $\sigma$ eingesetzt wird.
$V(X)$ kürzt sich dann heraus.

$$P(\mid X-\mu\mid \geq k\sigma) \;\leq\; \frac{1}{k^2}$$



# Gesetz der großen Zahlen

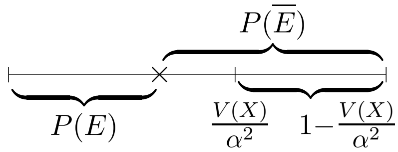
Jakob Bernoulli (1654-1705)

Die äquivalente unmittelbar einsichtige Formulierung der Tschebyschow-Ungleichung

$$P(\,|\,X - \mu\,| \geq \alpha) \;\leq\; \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

für das Gegenereignis lautet:

$$P(\,|\,X - \mu\,| < \alpha) \;\geq\; 1 - \frac{V(X)}{\alpha^2}$$




Für eine Binomialverteilung $(\mu = n \cdot p,\; V(X) = n \cdot p \cdot q)$ mit $\alpha = n \cdot \varepsilon$ ergibt das:

$$P(\,|\,X - n \cdot p\,| < n \cdot \varepsilon) \;\geq\; 1 - \frac{n \cdot p \cdot q}{(n \cdot \varepsilon)^2}$$

oder

$$P(\,|\,\frac{X}{n} - p\,| < \varepsilon) \;\geq\; 1 - \frac{p \cdot q}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Diese Ungleichung belegt mathematisch exakt das intuitiv Angenommene:
Die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit nur um einen beliebig kleinen Wert $\varepsilon$ von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit $p$ abweicht, strebt mit wachsendem Stichprobenumfang $n$ gegen 1.

Das ist der Inhalt des Gesetzes der großen Zahlen, das Jakob Bernoulli um 1685 gefunden hat.
Tschebyschow lebte von 1821 bis 1894.

# Tschebyschow'sche Ungleichung und Binomialverteilung

$$P(\mid X - E(X) \mid \geq a) \;\leq\; \frac{V(X)}{a^2}$$

Falls eine Binomialverteilung mit $\mu = E(X) = np$ und $V(X) = npq$ vorliegt, geht die Ungleichung über in:

$$P(\mid \frac{X}{n} - p \mid \geq \frac{a}{n}) \;\leq\; \frac{V(X)}{a^2}$$

$$P(\mid \frac{X}{n} - p \mid \geq b) \;\leq\; \frac{V(X)}{(n \cdot b)^2}$$

$$P(\mid \frac{X}{n} - p \mid \geq b) \;\leq\; \frac{npq}{(n \cdot b)^2} \;=\; \frac{pq}{n \cdot b^2} \;\leq\; \frac{1}{4nb^2}$$

beachte: $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$

und damit

$$P(\mid \frac{X}{n} - p \mid < b) \;\geq\; 1 - \frac{pq}{n \cdot b^2} \;\geq\; 1 - \frac{1}{4nb^2}$$

Ein Würfel wird 1000 Mal geworfen. Finde die zum Erwartungswert symmetrischen Grenzen, innerhalb derer die Anzahl der Augen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % liegt.

Ein Würfel wird 1000 Mal geworfen. Finde die zum Erwartungswert symmetrischen Grenzen, innerhalb derer die Anzahl der Augen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % liegt.

$$P(\mid X - \mu \mid < k\sigma) \;\geq\; 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\begin{aligned}
\mu \;&=\; 1000 \cdot \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 1000 \cdot \frac{35}{12} = 3500 \\
V(X) \;&=\; 1000 \cdot \frac{1}{6}\big((m-1)^2 + (m-2)^2 + (m-3)^2 + (m-4)^2 + (m-5)^2 + (m-6)^2\big) \\
&=\; 1000 \cdot \frac{35}{12} \\
\sigma \;&=\; \sqrt{V(X)} = 54{,}006
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{k^2} \;&=\; 0{,}99 \\
k \;&=\; 10
\end{aligned}$$

$$\mid X - \mu \mid \;<\; k\sigma \quad \Longleftrightarrow$$

$$\mu - k\sigma \;<\; X < \mu + k\sigma$$

$$2960 \;\leq\; X \leq 4040$$

mit der Normalverteilung

$$\begin{aligned}
P(\mu - z\,\sigma \leq X \leq \mu + z\,\sigma) = \Phi(z) \;-\; \Phi(-z) = 2\,\Phi(z) - 1 \;&=\; 0{,}99 \\
\Phi(z) \;&=\; 0{,}995 \\
z \;&=\; \Phi^{-1}(0{,}995) \\
z \;&=\; 2{,}576
\end{aligned}$$

$$3361 \;\leq\; X \leq 3639$$