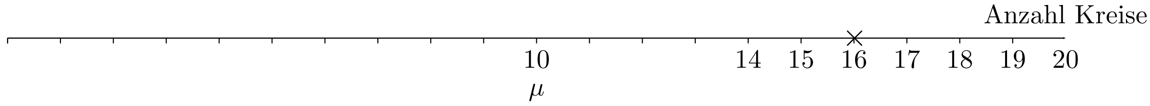
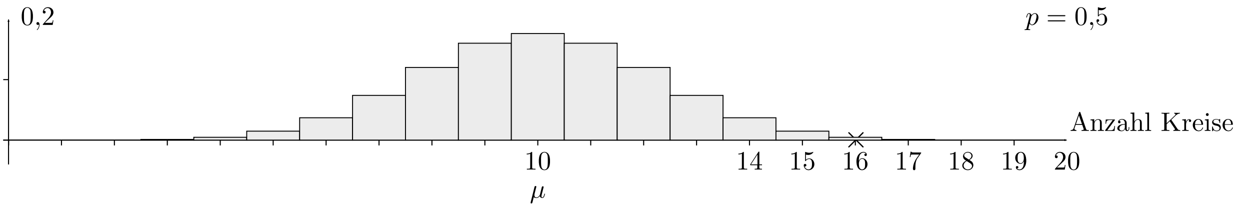
Hypothesentest

↑ Hypothesentest

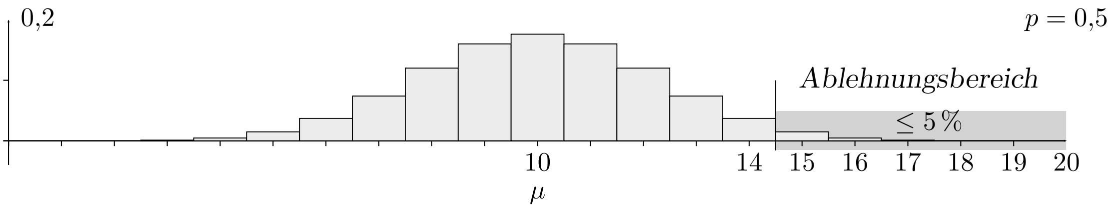
Ein Biologe vermutet, dass neugeborene Küken schon Körner erkennen können und dies nicht erst durch Erfahrung lernen müssen. Er möchte seine Vermutung wissenschaftlich beweisen. Der Biologe legt einem Küken “Körner“ aus Papier vor, je zur Hälfte Kreise und Dreiecke, und lässt das Küken 20mal picken. Eine hohe Anzahl gepickter Kreise spräche für seine Vermutung, eine irrtümliche Folgerung wäre allerdings auch nicht ausgeschlossen.
Das Küken pickt 16mal auf einen Kreis.



Für eine rechnerische Auswertung ist die Wahrscheinlichkeit, mit der Küken Kreise bevorzugen ja nicht bekannt, der Biologe vermutet $p = 0{,}7$ oder $p = 0{,}8$.
Einzig bekannt ist die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$, falls die Küken gleichwahrscheinlich auf Kreise und Dreiecke picken, weil sie es noch nicht gelernt haben, dass Körner rund sind.
Nun ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Pickergebnis unter der Hypothese $p = 0{,}5$ jedoch so klein, dass die Hypothese wohl nicht stimmen und verworfen werden kann.



17 oder 18 Kreise wären unter der Hypothese $p = 0{,}5$ noch unwahrscheinlicher gewesen.
Wissenschaftlich üblich ist es, einen Bereich (hier [15; 20]) mit der Wahrscheinlichkeit von maximal 5 % zu wählen, so dass die Hypothese verworfen wird, wenn das Testergebnis in diesen Bereich fällt.



In diesem Fall beträgt die Irrtumswahrscheinlichkeit (die Hypothese $p = 0{,}5$ abzulehnen, obwohl sie richtig ist) sogar nur $\alpha = 2{,}1\,\%$.

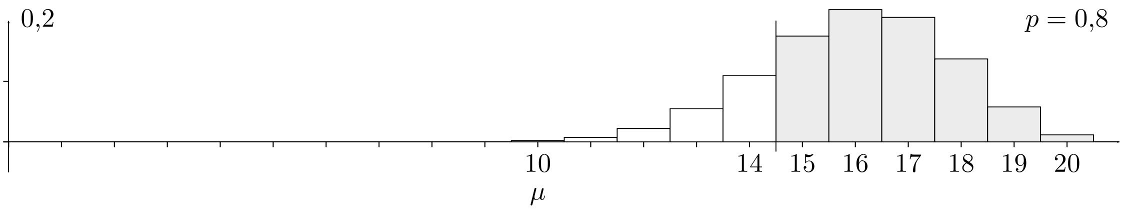
Sprechweisen:
Die Hypothese $p = 0{,}5$ heißt Nullhypothese H_0 (es liegt nichts Besonderes vor),
die Gegenhypothese H_1 wäre $p > 0{,}5$.
Fällt das Testergebnis in den Ablehnungsbereich, so liegt eine signifikante Abweichung vor oder die Abweichung ist auf dem 5 %-Niveau gesichert.
α ist der Fehler 1. Art.

Hypothese Annahme, unbewiesene Voraussetzung

↑ Hypothesentest   Fortsetzung

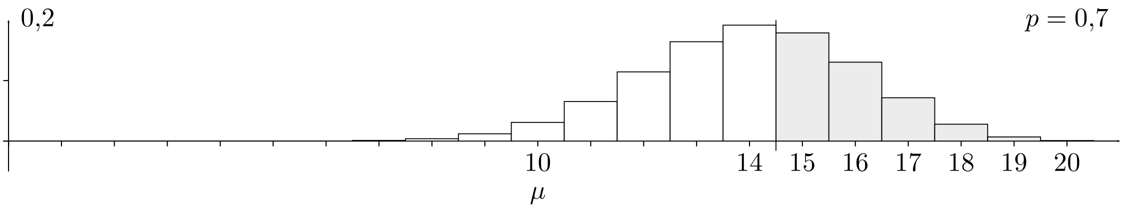
Der Biologe fragt sich, mit welcher Wahrscheinlichkeit β die Begabung der Küken nicht erkannt wird. Würden sie z. B. die Kreise mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}8$ bevorzugen, so wäre:

$\beta = P(X < 15) = 0{,}196$



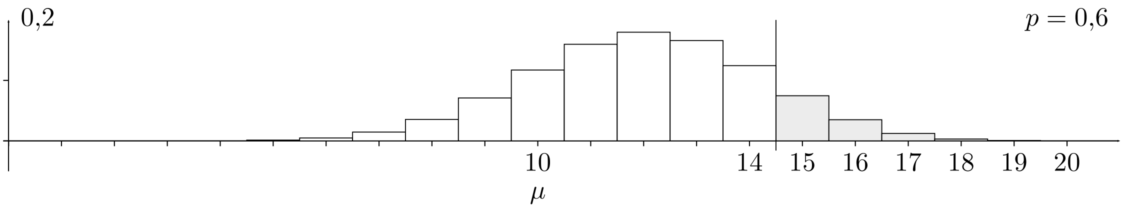
Mit der Annahme $p = 0{,}7$ wäre:

$\beta = P(X < 15) = 0{,}583$



Mit der Annahme $p = 0{,}6$ wäre:

$\beta = P(X < 15) = 0{,}874$



Je mehr sich die Wahrscheinlichkeit p dem Wert 0,5 nähert, um so größer wird der Fehler β.
Er lässt sich daher nur ermitteln, wenn die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeit bekannt ist.

β heißt auch Fehler 2. Art.

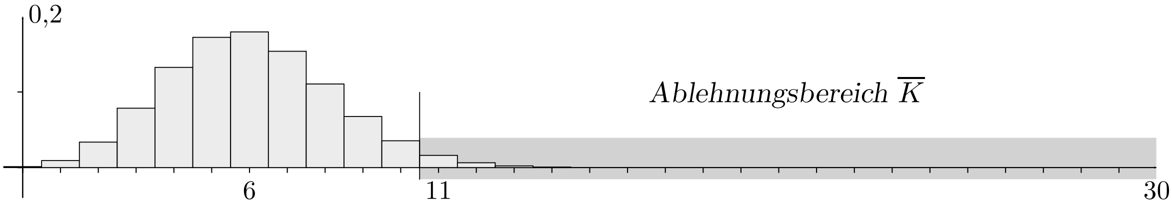
Zusammengefasst:
Um eine Hypothese zu beweisen zeigt man, dass die Gegenhypothese wegen eines Testergebnisses äußerst unwahrscheinlich ist.

↑ Hypothesentest zusammengefasst

rechtsseitiger Test

Nullhypothese $H_0: p \leq p_0$ Gegenhypothese $H_1: p > p_0$

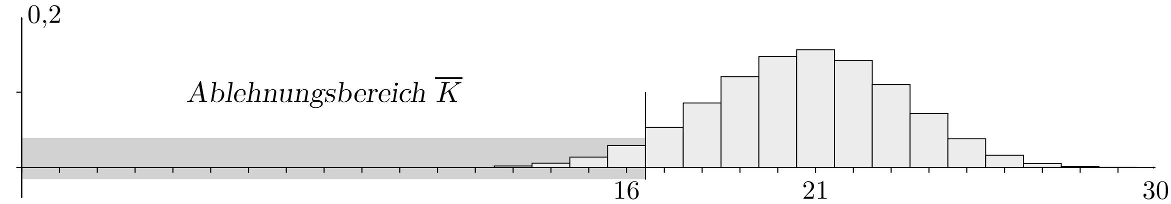
Behauptung: Ein bestimmtes Medikament verursacht höchstens bei 20 % der Patienten Nebenwirkungen. Wir bezweifeln dies und testen die Nullhypothese auf dem 5 %-Niveau. Die Stichprobenlänge sei $n = 30$.



linksseitiger Test

Nullhypothese $H_0: p \geq p_0$ Gegenhypothese $H_1: p < p_0$

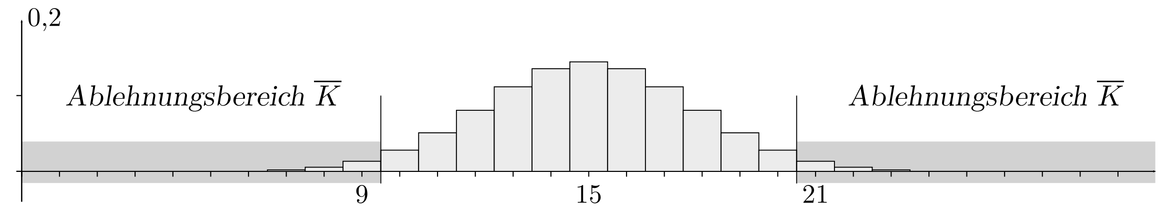
Behauptung: Mindestens 70 % der gelieferten Gurken erfüllen die europäische Krümmungsnorm. Wir vermuten das Gegenteil und testen auf dem 5 %-Niveau.



zweiseitiger Test (die obigen Tests sind einseitig)

Nullhypothese $H_0: p = p_0$ Gegenhypothese $H_1: p \neq p_0$

Bei der zufälligen Farbgebung sollen 50 % der Serienprodukte eine helle Tönung besitzen. Wir wollen Abweichungen aufdecken.



↑ Hypothesentest Ergänzungen

Beim Testen einer Nullhypothese hofft man, eine bestimmte Wahrscheinlichkeit aufgrund eines Testergebnisses ausschließen zu können. Mehr kann mit einem Signifikanztest nicht erreicht werden. Welche Hypothese als Nullhypothese getestet wird, hängt von der Zielsetzung ab.

Fehler 1. Art
Die Nullhypothese ist richtig, sie wird jedoch verworfen, da das Stichprobenergebnis zufällig im Ablehnungsbereich liegt.
Die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers wird durch die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = P(\overline{K})$ erfasst.

Fehler 2. Art
Die Nullhypothese ist falsch. Dies wird jedoch nicht erkannt, da das Stichprobenergebnis zufällig im Nicht-Ablehnungsbereich liegt.
Die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers β kann nur ermittelt werden, wenn die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit bekannt ist.

Beim zweiseitigen Test besteht der Ablehnungsbereich aus zwei Bereichen mit jeweils halbem Signifikanzniveau.

Die Entscheidungsregel beinhaltet, für welche Stichprobenergebnisse die Nullhypothese abzulehnen ist.

Der Ablehnungsbereich wird auch als Verwerfungsbereich oder als kritischer Bereich bezeichnet.

Der Nicht-Ablehnungsbereich wird manchmal irreführenderweise als Annahmebereich bezeichnet. Ein Stichprobenergebnis, das in diesen Bereich fällt, sagt nichts über die Gültigkeit der Nullhypothese aus, es kann aufgrund vieler anderer Trefferwahrscheinlichkeiten zustande gekommen sein.

Mit einem Hypothesentest (Signifikanztest) (z.B. $H_1: \; p \geq p_0$) kann - wie schon oben gesagt - keine zugrundeliegende Wahrscheinlichkeit bewiesen, sondern es können nur Wahrscheinlichkeiten ausgeschlossen werden. Dazu wird ein Bereich (der Ablehnungsbereich) konstruiert, in den ein Stichprobenergebnis bei Gültigkeit von H_0 nur mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit (dem Signifikanzniveau) fallen würde.
Tritt dies nun doch ein, betrachten wir H_0 als praktisch widerlegt und damit gilt die Gegenhypothese H_1 als praktisch sicher (mit einer gewissen Irrtumswahrscheinlichkeit).

Um eine vermutete Wahrscheinlichkeit statistisch zu belegen, sind aufwändigere Verfahren (Stichwort: Konfidenzintervall) erforderlich.

Es sei noch einmal hervorgehoben, dass die Idee eines Signifikanztests, wie die meisten Ideen in der Mathematik, bei geeigneter Blickrichtung unmittelbar einleuchtend ist: Eine Frau begegnet ihrem Ex an verschiedenen, weit entfernt liegenden Orten. Wenn Sie den Zufall zugrunde legt (Nullhypothese), erscheint ihr dieses Geschehen sehr unwahrscheinlich. In ihr keimt der Verdacht, dass ihr Ex sie verfolgt.

↑ Übungen

1. Ein Lieferant behauptet, dass der Anteil der Premium-Qualität in seiner Lieferung über 80 % sei. Wir, die Abnehmer, wollen dies als Lüge entlarven (5 %-Niveau, $n = 200$).

   Wir testen also die Nullhypothese $H_0\colon\ p > 80\,\%$.
   Es liegt daher ein linksseitiger Test vor.
   $P_{0{,}8}^{200}(X \le k_{\max}) \le 5\,\% \quad \Longrightarrow \quad k_{\max} = 150$
   $\overline{A} = \{\,0,\,\ldots,\,150\}$ (Ablehnungsbereich für die Nullhypothese)

   Fehler 2. Art (unser Nachweis misslingt, H_0 liegt nicht vor, wir erkennen es jedoch nicht), das Stichprobenergebnis fällt in den Nichtablehnungsbereich, z. B. für

   1) $p = 72\,\%$
   $\beta = P_{0{,}72}^{200}(X \ge 151) = \ 15{,}3\,\%$

   2) $p = 76\,\%$
   $\beta = P_{0{,}76}^{200}(X \ge 151) = \ 60{,}3\,\%$

   $\overline{A} = \{\,0,\,\ldots,\,150\}$ erhalten wir auch durch die Approximation mit der Normalverteilung:

   $$P(\,X \le k_{\max}) \approx \Phi\Big(\frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\Big) \le \ 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad k_{\max} = \ 150$$

2. Als Lieferant sind wir überzeugt, dass der Anteil der Premium-Qualität in unserer Lieferung über 80 % ist. Wir wollen die Abnehmer hiervon überzeugen (5 %-Niveau, $n = 200$).

   Wir testen also im Beisein der Abnehmer die Nullhypothese $H_0\colon\ p \le 80\,\%$.
   Es liegt daher ein rechtsseitiger Test vor.
   $P_{0{,}8}^{200}(X \ge k_{\min}) \le 5\,\% \quad \Longrightarrow \quad k_{\min} = 170$
   $\overline{A} = \{\,170,\,\ldots,\,200\}$ (Ablehnungsbereich für die Nullhypothese)

   Fehler 2. Art (unser Nachweis misslingt, H_0 liegt nicht vor, wir erkennen es jedoch nicht), das Stichprobenergebnis fällt in den Nichtablehnungsbereich, z. B. für

   1) $p = 88\,\%$
   $\beta = P_{0{,}88}^{200}(X \le 169) = \ 8{,}2\,\%$

   2) $p = 90\,\%$
   $\beta = P_{0{,}9}^{200}(X \le 169) = 1{,}0\,\%$

   $\overline{A} = \{\,170,\,\ldots,\,200\}$ erhalten wir auch durch die Approximation mit der Normalverteilung:

   $$P(\,X \ge k_{\min}) \approx 1 - \Phi\Big(\frac{k-1+0{,}5-\mu}{\sigma}\Big) \le \ 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad k_{\min} = \ 170$$

3. Das Kopiergerät wurde repariert. Die mit der Reparatur beauftragte Firma behauptet, dass die Ausschussquote jetzt nur noch höchstens 6 % beträgt. Wir möchten das Gegenteil anhand 200 Kopien nachweisen und nehmen dabei eine Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % in Kauf.
   Beschreibe und begründe einen hierfür geeigneten Test und gib die zugehörige Entscheidungsregel an.

$P_{0,6}^{200}(X \geq k_{\min}) \leq 5\,\% \quad \Longrightarrow \quad k_{\min} = 19$
$\overline{A} = \{\,19, \ldots, 200\}$

Gib an, ob die folgenden Aussagen zum Hypothesentest (Signifikanztest) wahr oder falsch sind.

a) Die Nullhypothese ist die Vermutung, die man testen möchte.

b) Durch den Test findet man heraus, ob die Nullhypothese wahr ist.

c) Wenn das Stichprobenergebnis außerhalb des Nicht-Ablehnungsbereich liegt, wird die Nullhypothese verworfen.

d) Die Irrtumswahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass man die Nullhypothese beibehält, obwohl sie falsch ist.

e) Die Irrtumswahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Zufallsvariable bei gültiger Nullhypothese in den Ablehnungsbereich fällt.

f) Das Signifikanzniveau gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Nullhypothese falsch ist.

Gib an, ob die folgenden Aussagen zum Hypothesentest (Signifikanztest) wahr oder falsch sind.

a) Die Nullhypothese H_0 ist die Vermutung, die man testen möchte. falsch

Die Alternativhypothese (H_1) wird getestet.

b) Durch den Test findet man heraus, ob die Nullhypothese wahr ist. falsch

Fällt das Stichprobenergebnis in den Nicht-Ablehnungsbereich
(häufig verwirrend Annahmebereich genannt),
kann nicht angenommen werden, dass H_0 zutrifft.

c) Wenn das Stichprobenergebnis außerhalb des Nicht-Ablehnungsbereich liegt,
wird die Nullhypothese verworfen. richtig

Das ist der Sinn des Hypothesentests.
Das Stichprobenergebnis liegt dann im Ablehnungsbereich.
Es liegt eine signifikante Abweichung - vorausgesetzt H_0 trifft zu - vor.

d) Die Irrtumswahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass man die Nullhypothese
beibehält, obwohl sie falsch ist. falsch

Die Irrtumswahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit an,
mit der man H_0 verwirft, obwohl sie richtig ist (Fehler 1. Art).

e) Die Irrtumswahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Zufallsvariable
bei gültiger Nullhypothese in den Ablehnungsbereich fällt. richtig

f) Das Signifikanzniveau gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Nullhypothese falsch ist. falsch

Das Signifikanzniveau ist die maximal mögliche Irrtumswahrscheinlichkeit dafür,
dass man H_0 verwirft, obwohl sie richtig ist (Fehler 1. Art).

Die Inhaberin einer Losbude beschäftigt einen Angestellten, der Besucher des Volksfests anspricht, um diese zum Kauf von Losen zu animieren. Sie ist mit der Erfolgsquote des Angestellten unzufrieden.
Die Inhaberin möchte dem Angestellten das Gehalt kürzen, wenn weniger als 15 % der angesprochenen Besucher Lose kaufen. Die Entscheidung über die Gehaltskürzung soll mithilfe eines Signifikanztests auf der Grundlage von 100 angesprochenen Besuchern getroffen werden. Dabei soll möglichst vermieden werden, dem Angestellten das Gehalt zu Unrecht zu kürzen. Geben Sie die entsprechende Nullhypothese an und ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel auf dem Signifikanzniveau von 10 %.
Abitur Bayern 2019

Die Inhaberin einer Losbude beschäftigt einen Angestellten, der Besucher des Volksfests anspricht, um diese zum Kauf von Losen zu animieren. Sie ist mit der Erfolgsquote des Angestellten unzufrieden.
Die Inhaberin möchte dem Angestellten das Gehalt kürzen, wenn weniger als 15 % der angesprochenen Besucher Lose kaufen. Die Entscheidung über die Gehaltskürzung soll mithilfe eines Signifikanztests auf der Grundlage von 100 angesprochenen Besuchern getroffen werden. Dabei soll möglichst vermieden werden, dem Angestellten das Gehalt zu Unrecht zu kürzen. Geben Sie die entsprechende Nullhypothese an und ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel auf dem Signifikanzniveau von 10 %.
Abitur Bayern 2019

Nullhypothese: Mindestens 15 % der angesprochenen Besucher kaufen Lose.

$$P_{0,15}^{100}(X \leq k_{\max}) \leq 10\,\% \quad \Longrightarrow \quad k_{\max} = 10$$

$$\overline{A} = \{0, \ldots, 10\}$$

Mit der Nullhypothese: Weniger als 15 % der angesprochenen Besucher kaufen Lose.
wäre folgerichtig:

$$P_{0,15}^{100}(X \geq k_{\min}) \leq 10\,\% \quad \Longrightarrow \quad k_{\min} = 21$$

$$\overline{A} = \{21, \ldots, 100\}$$

Es kann jedoch keine Entscheidung über die Gehaltskürzung getroffen werden, wenn das Stichprobenergebnis nicht im Ablehnungsbereich liegt.

Ein Angeklagter steht vor Gericht. Der Staatsanwalt ist von seiner Schuld überzeugt.
Im Prozess gilt zunächst die Unschuldsvermutung (Nullhypothese H_0) des Angeklagten.
Unter dieser Annahme erscheinen die vorgelegten Beweise höchst unwahrscheinlich. Der Staatsanwalt ist der Ansicht, die Schuld damit nachgewiesen zu haben. Es kann jedoch sein, dass der Angeklagte unschuldig ist und für schuldig befunden wird (Fehler 1. Art, die Nullhypothese wird verworfen) oder der Angeklagte schuldig ist und freigesprochen wird (Fehler 2. Art).

1. Stelle dir die Frage: Was soll statistisch bewiesen werden?
   Z.B. lautet die Antwort: $p < 0{,}04$.
   Diese Hypothese kann nur indirekt nachgewiesen werden.
   Die Gegenhypothese $p \geq 0{,}04$ - Nullhypothese H_0 genannt - soll sich als unwahrscheinlich erweisen, so hoffen wir.

2. Wir konstruieren ein Ereignis (den Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0, \ldots, k\}$), das unter der Voraussetzung der Nullhypothese $p \geq 0{,}04$ sehr unwahrscheinlich ist. Wenn nun das Stichprobenergebnis, wie erhofft, in diesen Ablehnungsbereich fällt, kann die Nullhypothese abgelehnt werden.

3. Das Stichprobenergebnis kann, obwohl $p < 0{,}04$ (Gegenhypothese der Nullhypothese) zutrifft, zufallsbedingt nicht in den Ablehnungsbereichs fallen. Dann wird die richtige zugrundeliegende Wahrscheinlichkeit nicht erkannt. (Fehler 2. Art, β-Fehler).

4. Fehler 1. Art: Man entscheidet sich gegen H_0, obwohl H_0 zutrifft.
   Die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnet man als Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanzniveau) α.

Merkregel

Nullhypothese

$H_0\colon\ p \leq p_0$	rechtsseitiger Test	$\Longrightarrow$	Pfeil zeigt auf $\overline{A} = \{k, \ldots, n\}$
$H_0\colon\ p \geq p_0$	linksseitiger Test	$\Longleftarrow$	Pfeil zeigt auf $\overline{A} = \{0, \ldots, k\}$

Wenn $\leq$ bzw. $\geq$ als Pfeilrichtung gelesen wird, so dreht sich diese um.

$H_0\colon\ p = p_0$ mit der Gegenhypothese $H_1\colon\ p \neq p_0$ führt zu einem zweiseitigen (beidseitigem) Hypothesentest.

↑ Stornierte Buchungen

In der Werbung eines Busunternehmens werden bisher Kunden damit gewonnen, dass bis kurz vor Reiseantritt eine kostenlose Stornierung der Buchung möglich ist. Aktuell liegt der Anteil der kurzfristig stornierten Buchungen bei 7 %. Das Busunternehmen möchte diesen Anteil verringern und ändert die Vertragsbedingungen dahingehend, dass bei kurzfristigen Stornierungen ein Teil des Fahrpreises gezahlt werden muss. Es möchte die Vermutung absichern, dass durch diese Maßnahme der Anteil der kurzfristig stornierten Buchungen sinkt. Die nächsten 1000 Buchungen sollen auf diese Wirkung hin untersucht werden. Die Anzahl der kurzfristig stornierten Buchungen wird als binomialverteilt angenommen.

a) Geben Sie begründet an, welche Nullhypothese aus der Sicht des Busunternehmens gewählt wird.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der kurzfristig stornierten Buchungen, bis zu der das Busunternehmen auf einem Signifikanzniveau von 5 % von einem Erfolg der Maßnahme ausgehen wird.

c) Bei einem Signifikanzniveau von 1 % lautet die Entscheidungsregel: „Das Busunternehmen verwirft die Nullhypothese und geht von einem Erfolg der Maßnahme aus, falls die Anzahl der kurzfristig stornierten Buchungen höchstens 51 beträgt.“ Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art, falls aufgrund der Maßnahmen der Anteil der kurzfristig stornierten Buchungen nur noch 4 % beträgt, und erläutern Sie diesen Fehler im Sachzusammenhang.

In der Werbung eines Busunternehmens werden bisher Kunden damit gewonnen, dass bis kurz vor Reiseantritt eine kostenlose Stornierung der Buchung möglich ist. Aktuell liegt der Anteil der kurzfristig stornierten Buchungen bei 7%. Das Busunternehmen möchte diesen Anteil verringern und ändert die Vertragsbedingungen dahingehend, dass bei kurzfristigen Stornierungen ein Teil des Fahrpreises gezahlt werden muss. Es möchte die Vermutung absichern, dass durch diese Maßnahme der Anteil der kurzfristig stornierten Buchungen sinkt. Die nächsten 1000 Buchungen sollen auf diese Wirkung hin untersucht werden. Die Anzahl der kurzfristig stornierten Buchungen wird als binomialverteilt angenommen.

a) Geben Sie begründet an, welche Nullhypothese aus der Sicht des Busunternehmens gewählt wird.

Um die Hypothese $p < 7\%$ zu beweisen (abzusichern) zeigt man, dass die Gegenhypothese $p \geq 7\%$ wegen eines Testergebnisses äußerst unwahrscheinlich ist.
Die Nullhypothese $p \geq 7\%$ möchte man widerlegen.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der kurzfristig stornierten Buchungen, bis zu der das Busunternehmen auf einem Signifikanzniveau von 5% von einem Erfolg der Maßnahme ausgehen wird.

Es liegt daher ein linksseitiger Test vor.

$$P_{0,07}^{1000}(X \leq k_{\max}) \leq 5\% \quad \Longrightarrow \quad k_{\max} = 56$$

$$\overline{A} = \{0, \ldots, 56\} \quad \text{(Ablehnungsbereich für die Nullhypothese)}$$

c) Bei einem Signifikanzniveau von 1% lautet die Entscheidungsregel: „Das Busunternehmen verwirft die Nullhypothese und geht von einem Erfolg der Maßnahme aus, falls die Anzahl der kurzfristig stornierten Buchungen höchstens 51 beträgt.“ Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art, falls aufgrund der Maßnahmen der Anteil der kurzfristig stornierten Buchungen nur noch 4% beträgt, und erläutern Sie diesen Fehler im Sachzusammenhang.

Fehler 2. Art:
Die Nullhypothese ist falsch.
Der Anteil der kurzfristig stornierten Buchungen wurde also erfolgreich verringert.
Dies wird jedoch nicht erkannt,
da das Stichprobenergebnis zufällig im Nicht-Ablehnungsbereich liegt.

$$\beta = P_{0,04}^{1000}(X \geq 52) = 3{,}6\%$$