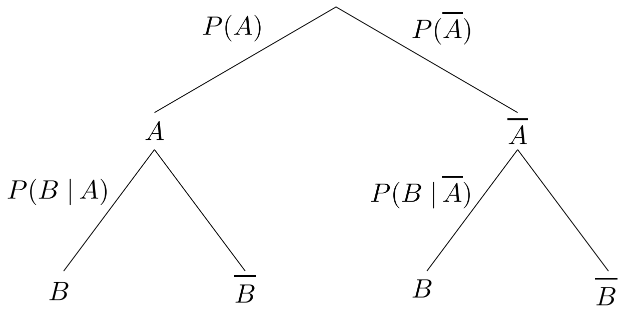
Merkhilfe Stochastik

	A	$\overline{A}$	*Summe*
B	a	b	$a+b$
$\overline{B}$	c	d	$c+d$
Summe	$a+c$	$b+d$	$s=a+b+c+d$

1. bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B) = ?$

   A und B unabhängig



2. bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B) = ?$ Satz von Bayes

   A und B unabhängig

   A und B unabhängig (allgemein)

3. Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilung:

a_1	a_2	a_3	a_4
p_1	p_2	p_3	p_4

Erwartungswert $\mu = ?$

Standardabweichung $\sigma = ?$

GTR ?

Varianz (vereinfacht) $V(X) = ?$

4. Binomialverteilung $P_p^n(X=k) = ?$

GTR $P(X=k) = ?$

$P_p^n(X \leq k) = ?$

GTR $P(X \leq k) = ?$

$P(X \geq k) = ?$

GTR $P(a \leq X \leq b) = ?$

5. Zufallsgröße X binomialverteilt
Parameter n, p

Erwartungswert $\mu = ?$

Varianz $V = ?$

Standardabweichung $\sigma = ?$

6. X binomialverteilt, $P(X \geq 1) \geq \alpha$?
„mindestens ein Treffer“
gesucht: n (mindestens)

7. σ-Umgebung

$P(\mu - \sigma \leq k \leq \mu + \sigma) = ?$

$P(\mu - 2\sigma \leq k \leq \mu + 2\sigma) = ?$

$P(\mu - 3\sigma \leq k \leq \mu + 3\sigma) = ?$

8. 95,4 % -Prognoseintervall
für relative Häufigkeiten [ ]

Münzwurf [ ]

9. In einer Urne befinden sich N Kugeln, genau r davon sind blau.
Man entnimmt zufällig nacheinander n Kugeln (zwei Arten sind möglich).
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter genau k blaue Kugeln?

N	Grundgesamtheit
r	Anzahl aller Merkmalsträger
n	Stichprobenumfang
k	Anzahl der Merkmalsträger in der Stichprobe

Ziehen ohne Zurücklegen $P(X=k) = ?$

Ziehen mit Zurücklegen $P(X=k) = ?$

10. Gausssche Glockenkurve $\varphi(x) = ?$
Dichtefunktion der Standardnormalverteilung
Verteilungsfunktion $\Phi(z) = ?$

GTR $P(X \leq a) = ?$

GTR $P(a \leq X \leq b) = ?$

11. Zusammenhang von $\Phi_{\mu,\sigma}$ und Φ $\Phi_{\mu,\sigma}(x) = ?$

GTR $\Phi_{\mu,\sigma}(x) = ?$

GTR $\Phi^{-1}(\alpha) = ?$

GTR $\Phi^{-1}_{\mu,\sigma}(\alpha) = ?$

12. $P([\mu - z\sigma \mid \mu + z\sigma]) = \alpha$ $z = ?$
$z\sigma$-Umgebung
Prognoseintervall für absolute Häufigkeiten

α	z
0,90	?
0,95	
0,954	
0,997	

13. $z\sigma$-Umgebung (Prognoseintervall)
für relative Häufigkeiten

14. Wald-Vertrauensintervall
GTR
Wilson-Vertrauensintervall
Prognose- und Wilson-Vertrauensintervalle (Ellipse)

15. Zusammenhang von Stichprobenumfang und Vertrauensintervalllänge

16. Notwendiger Stichprobenumfang zu gegebener Vertrauensintervalllänge

17. Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Laplace-Bedingung

Stetigkeitskorrektur $\qquad X$ binomialverteilt $\quad P(a \leq X \leq b) \approx$

18. $A,\ B,\ C \subset \Omega$, für Wahrscheinlichkeiten gilt:

a) $? \leq P(A) \leq ?$

b) $P(\overline{A}) = ?$

c) $A \subset B \implies ?$

d) $P(A \cup B) = ?$

e) $P(A \cup B \cup C) = ?$

19. grafische Lösung $\qquad$ minimales p mit $P_p^{40}(X \geq 38) \geq 90\,\%$

tabellarische Lösung $\qquad$ minimales k mit $P_{0{,}05}^{80}(X \geq k) \leq 5\,\%$

20. Binomialkoeffizient

21. medizinischer Test (Bayes)
Wiederholung

22. Normalverteilung $\quad \Phi$-Schreibweise für Ansätze

$P(X \leq k) = ?$

$P(X \leq z) = ?$, $\qquad$ falls $\mu = 0$ und $\sigma = 1$

$P(a \leq X \leq b) = ?$

$k = ?$ $\qquad$ Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k (das α-Quantil) gesucht, $\mu = 0$, $\sigma = 1$

$k = ?$ $\qquad$ μ, σ gegeben, α-Quantil gesucht

23. Normalverteilung $\int$-Schreibweise für Ansätze

Die Ansätze dieser Art sind einfacher zu handhaben als diejenigen mit der Verteilungsfunktion Φ.

$P(X \leq k) = ?$

$P(X \leq z) = ?$, falls $\mu = 0$ und $\sigma = 1$

$P(a \leq X \leq b) = ?$

$\int \ldots$ Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k (das α-Quantil) gesucht.

$\int \ldots$ Zu gegebenem α ist μ (σ, eine Grenze a oder b) gesucht.

zum Anfang

Merkhilfe Stochastik

Binomialverteilung	$P_p^n(X=k)$	$=$	$\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k},\quad q=1-p$	
GTR	$P(X=k)$	$=$	binompdf(n, p, k)	probability density function
	$P_p^n(X\le k)$	$=$	$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot q^{n-i}$	
GTR	$P(X\le k)$	$=$	binomcdf(n, p, k)	cumulative density function
	$P(X\ge k)$	$=$	$1-P(X\le k-1)$	

	A	$\overline{A}$	*Summe*
B	a	b	$a+b$
$\overline{B}$	c	d	$c+d$
Summe	$a+c$	$b+d$	$s=a+b+c+d$

bedingte Wahrscheinlichkeit $\qquad P(A \mid B) = \dfrac{a}{a+b}$

A und B unabhängig

$\longleftarrow$

	A	$\overline{A}$	*Summe*
B	$\lvert A \cap B \rvert$	$\lvert \overline{A} \cap B \rvert$	$\lvert B \rvert$
$\overline{B}$	$\lvert A \cap \overline{B} \rvert$	$\lvert \overline{A} \cap \overline{B} \rvert$	$\lvert \overline{B} \rvert$
Summe	$\lvert A \rvert$	$\lvert \overline{A} \rvert$	$\lvert \Omega \rvert$

$$P(A \mid B) = \frac{\lvert A \cap B \rvert}{\lvert B \rvert}$$

	A	$\overline{A}$	*Summe*
B	a	b	$a+b$
$\overline{B}$	c	d	$c+d$
Summe	$a+c$	$b+d$	$s=a+b+c+d$

bedingte Wahrscheinlichkeit $\quad P(A \mid B) = ?$

A und B unabhängig

$$P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B}) \qquad \text{d. h.}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \qquad \text{oder}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

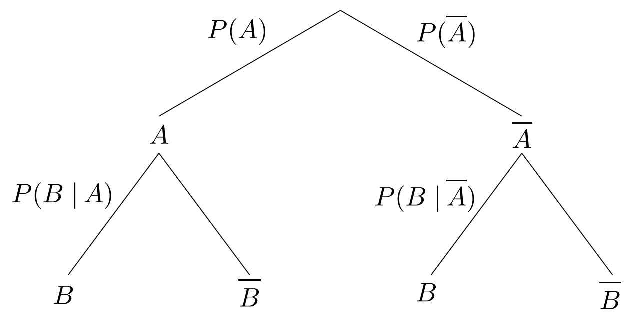
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad \text{siehe Pfaddiagramm}$$

$\longleftarrow$

	A	$\overline{A}$	*Summe*
B	$P(A \cap B)$		$P(B)$
$\overline{B}$			
Summe	$P(A)$		

1. Wurf (Würfel)

		6	$\overline{6}$	*Summe*
2. Wurf	6	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	$\overline{6}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$
	Summe	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

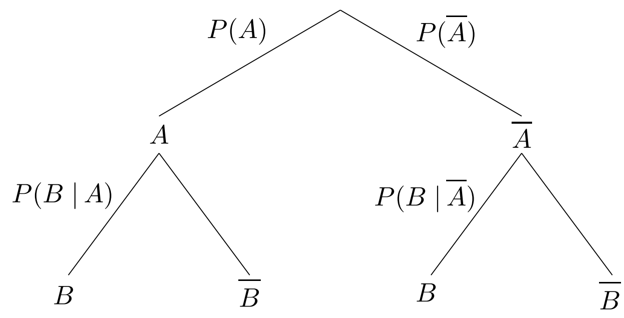


bedingte Wahrscheinlichkeit $\quad P(A \mid B) = \dfrac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})}$

A und B unabhängig

A und B unabhängig (allgemein)

$\longleftarrow$

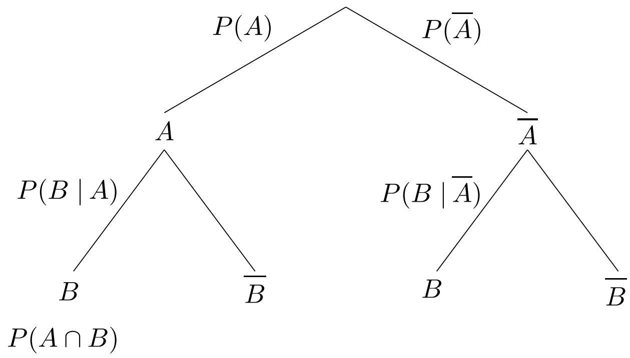


bedingte Wahrscheinlichkeit $\quad P(A \mid B) = ?$ $\quad$ Satz von Bayes

A und B unabhängig $\quad P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$

A und B unabhängig (allgemein)

$\longleftarrow$



bedingte Wahrscheinlichkeit $\quad P(A \mid B) = ?$ $\quad$ Satz von Bayes

A und B unabhängig

A und B unabhängig (allgemein) $\quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B \mid A) \\ P(B \mid A) &= P(B) \quad * \quad \text{ist zu zeigen} \end{aligned}$$

Beachte: Das Ereignis B besteht aus 2 Pfaden.
Mit $P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$ folgt $*$.

$\longleftarrow$

Im Einzelnen:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot \underbrace{P(B \mid \overline{A})}_{P(B \mid A)} \\ &= \underbrace{\left[P(A) + P(\overline{A})\right]}_{1} \cdot P(B \mid A) \end{aligned}$$

Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilung:

a_1	a_2	a_3	a_4
p_1	p_2	p_3	p_4

Erwartungswert $\mu = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4$

Standardabweichung $\sigma = ?$

GTR ?

Varianz (vereinfacht) $V(X) = ?$

$\longleftarrow$

Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilung:

a_1	a_2	a_3	a_4
p_1	p_2	p_3	p_4

Erwartungswert $\mu = ?$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{(a_1-\mu)^2 \cdot p_1 + (a_2-\mu)^2 \cdot p_2 + (a_3-\mu)^2 \cdot p_3 + (a_4-\mu)^2 \cdot p_4}$

GTR ?

Varianz (vereinfacht) $V(X) = ?$

$\longleftarrow$

Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilung:

a_1	a_2	a_3	a_4
p_1	p_2	p_3	p_4

Erwartungswert $\mu = ?$

Standardabweichung $\sigma = ?$

GTR STAT | CALC 1: 1−Var Stats L1, L2

Varianz (vereinfacht) $V(X) = ?$

$\longleftarrow$

k	0	1	2	4
$P(X = k)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

$E(X) = 1{,}57$

$V(X) = 2{,}82$

$\sigma = 1{,}68$

Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilung:

a_1	a_2	a_3	a_4
p_1	p_2	p_3	p_4

Erwartungswert $\mu = ?$

Standardabweichung $\sigma = ?$

GTR ?

Varianz (vereinfacht) $V(X) = a_1^2 p_1 + a_2^2 p_2 + a_3^2 p_3 + a_4^2 p_4 - \mu^2 \quad (= E(X^2) - \mu^2)$

$\longleftarrow$

Binomialverteilung $\quad P_p^n(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad q = 1-p$

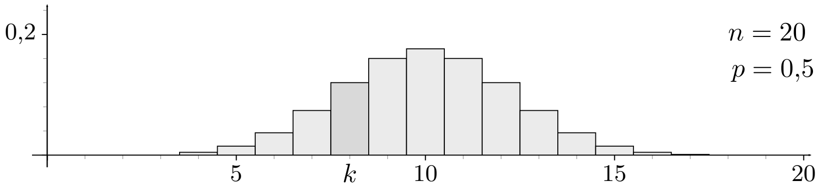
GTR $\quad P(X=k) = ?$

$P_p^n(X \leq k) = ?$

GTR $\quad P(X \leq k) = ?$

$P(X \geq k) = ?$

GTR $\quad P(a \leq X \leq b) = ?$



⟵

Binomialverteilung $\qquad P_p^n(X = k) = ?$

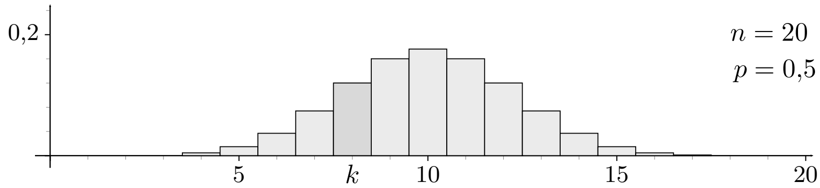
GTR $\qquad P(X = k) = $ binompdf(n, p, k) $\quad$ probability density function

$P_p^n(X \leq k) = ?$

GTR $\qquad P(X \leq k) = ?$

$P(X \geq k) = ?$

GTR $\qquad P(a \leq X \leq b) = ?$



$\longleftarrow$

Binomialverteilung $\quad P_p^n(X=k) = ?$

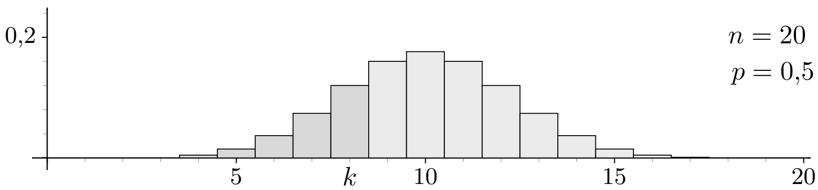
GTR $\quad P(X=k) = ?$

$$P_p^n(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}$$

GTR $\quad P(X \le k) = ?$

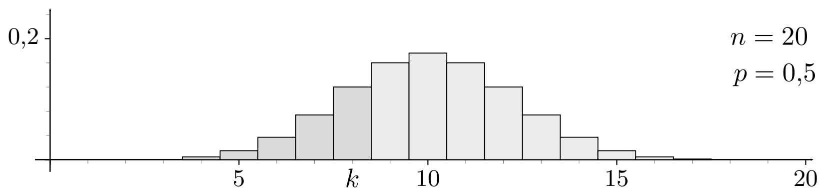
$$P(X \ge k) = ?$$

GTR $\quad P(a \le X \le b) = ?$



$\longleftarrow$

Binomialverteilung	$P_p^n(X = k)$	$=$	?	
GTR	$P(X = k)$	$=$	?	
	$P_p^n(X \leq k)$	$=$	?	
GTR	$P(X \leq k)$	$=$	binomcdf(n, p, k)	cumulative density function
	$P(X \geq k)$	$=$	?	
GTR	$P(a \leq X \leq b)$	$=$	?	



$\longleftarrow$

Binomialverteilung $\quad P_p^n(X = k) = ?$

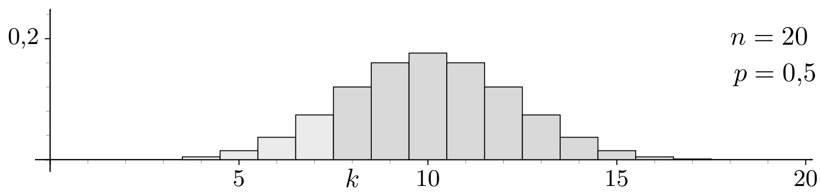
GTR $\quad P(X = k) = ?$

$$P_p^n(X \leq k) = ?$$

GTR $\quad P(X \leq k) = ?$

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$$

GTR $\quad P(a \leq X \leq b) = ?$



⟵

Binomialverteilung $\quad P_p^n(X = k) = ?$

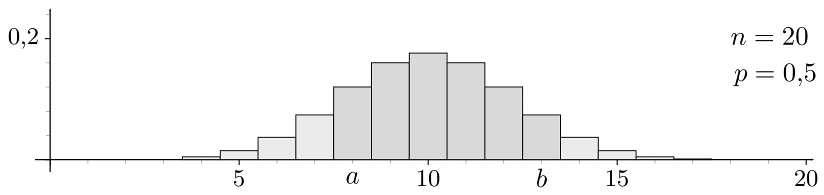
GTR $\quad P(X = k) = ?$

$P_p^n(X \le k) = ?$

GTR $\quad P(X \le k) = ?$

$P(X \ge k) = ?$

GTR $\quad P(a \le X \le b) = \text{binomcdf(n, p, b)} - \text{binomcdf(n, p, a}-1)$



$\longleftarrow$

Zufallsgröße X binomialverteilt
Parameter n, p

Erwartungswert	μ	$= np$
Varianz	V	$= ?$
Standardabweichung	σ	$= ?$

$\longleftarrow$

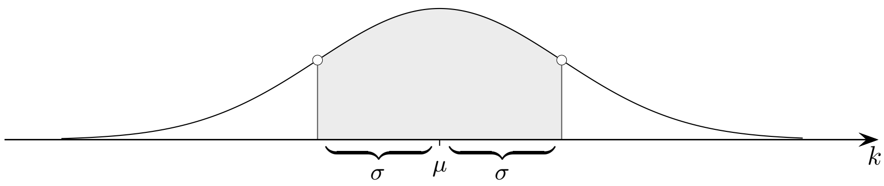
Zufallsgröße X binomialverteilt
Parameter n, p

Erwartungswert	μ	$= ?$
Varianz	V	$= npq$
Standardabweichung	σ	$= ?$

$\longleftarrow$

Zufallsgröße X binomialverteilt
Parameter n, p

Erwartungswert	$\mu \; = \; ?$
Varianz	$V \; = \; ?$
Standardabweichung	$\sigma \; = \; \sqrt{npq}$



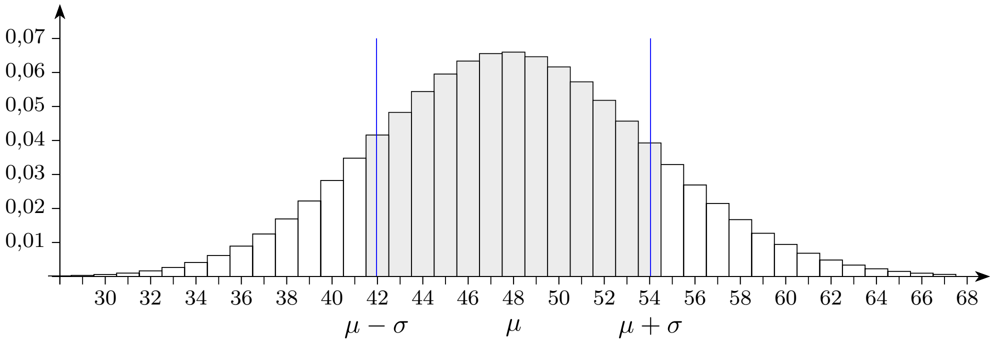
⟵

σ-Umgebung $\quad P(\mu - \sigma \leq k \leq \mu + \sigma) = 68{,}3\,\% \approx \frac{2}{3}$ $\quad$ Laplace-Bedingung $\sigma > 3$

$$P(\mu - 2\sigma \leq k \leq \mu + 2\sigma) = ?$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq k \leq \mu + 3\sigma) = ?$$

$\longleftarrow$



$$\begin{aligned} n &= 200 \\ p &= 0{,}24 \\ \mu &= 48 \\ \sigma &= \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 6{,}04 \end{aligned}$$

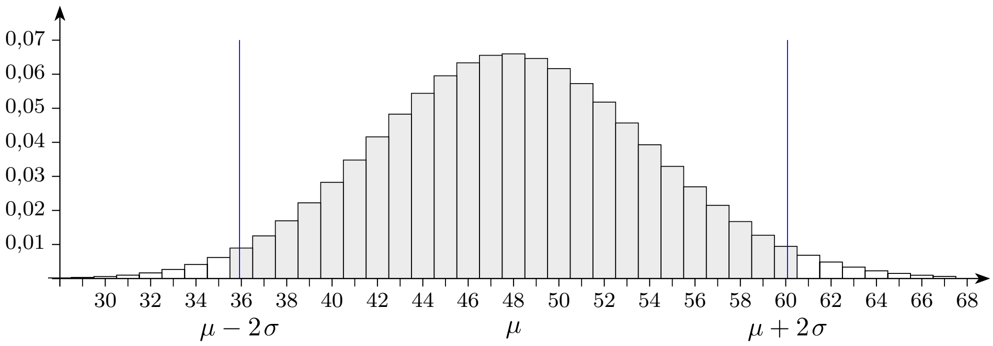
$$\begin{aligned} \sigma\text{-Umgebung} &= [42; 54] \\ P(42 \leq X \leq 54) &= 71{,}8\,\% \end{aligned}$$

σ-Umgebung $\quad P(\mu - \sigma \leq k \leq \mu + \sigma) = ?$

$$P(\mu - 2\sigma \leq k \leq \mu + 2\sigma) = 95{,}4\,\%$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq k \leq \mu + 3\sigma) = ?$$

$\longleftarrow$



$$\begin{aligned} n &= 200 \\ p &= 0{,}24 \\ \mu &= 48 \\ \sigma &= \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 6{,}04 \end{aligned}$$

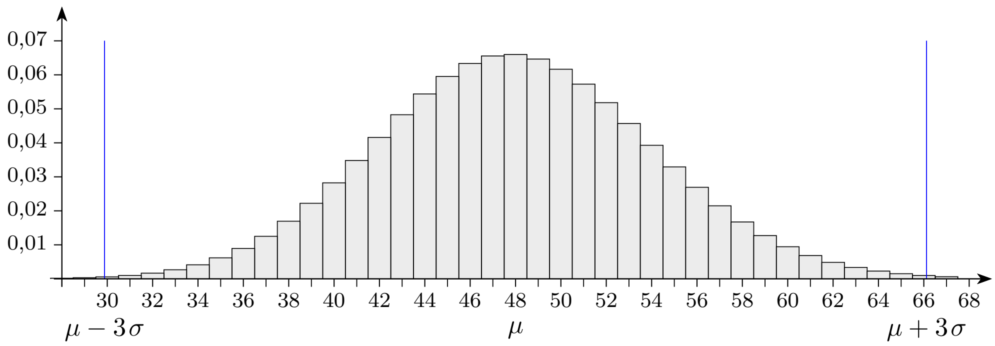
$$\begin{aligned} \sigma\text{-Umgebung} &= [36; 60] \\ P(36 \leq X \leq 60) &= 96{,}2\,\% \end{aligned}$$

σ-Umgebung $\quad P(\mu - \sigma \leq k \leq \mu + \sigma) = ?$

$$P(\mu - 2\sigma \leq k \leq \mu + 2\sigma) = ?$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq k \leq \mu + 3\sigma) = 99{,}7\,\%$$

$\longleftarrow$



$$\begin{aligned} n &= 200 \\ p &= 0{,}24 \\ \mu &= 48 \\ \sigma &= \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 6{,}04 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma\text{-Umgebung} &= [30; 66] \\ P(30 \leq X \leq 66) &= 99{,}8\,\% \end{aligned}$$

X binomialverteilt, $P(X \geq 1) \geq \alpha$

„mindestens ein Treffer“

gesucht: n (mindestens)

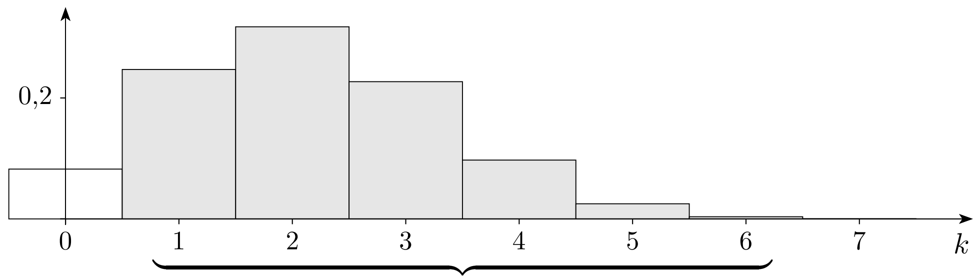
$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ 1 - q^n &\geq \alpha \\ n &\geq \ln(1-\alpha)/\ln(q) \end{aligned}$$

$\longleftarrow$

Ab welchem n liegt mit mindestens 90 %-iger Wahrscheinlichkeit wenigstens ein Treffer vor, gegeben $p = 0{,}3$?

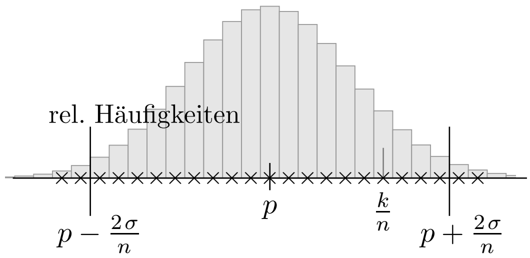
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \geq 0{,}9 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - 0{,}7^n \geq 0{,}9$

$\Longrightarrow \quad n \geq 6{,}5 \qquad$ mindestens $n = 7$



95,4 % -Prognoseintervall für relative Häufigkeiten $\left[\, p - \frac{2\sigma}{n} \mid p + \frac{2\sigma}{n} \,\right]$

Münzwurf [ ]

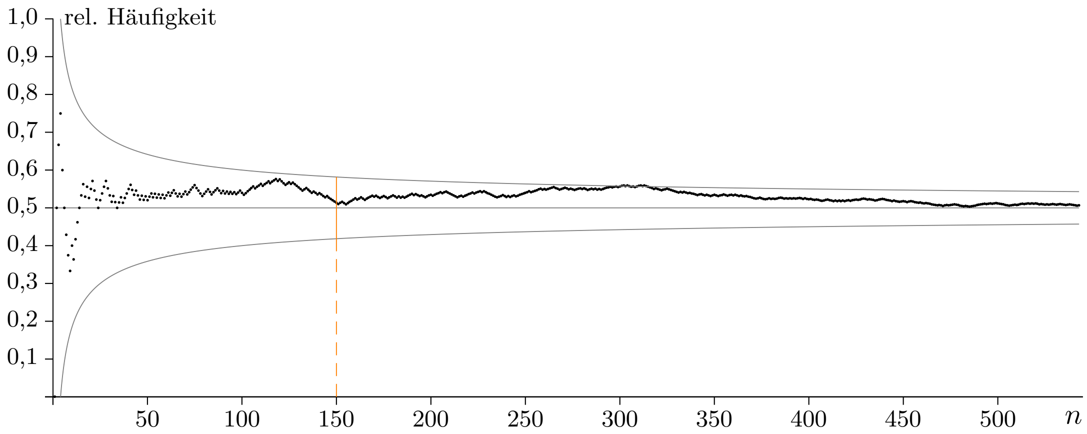


⟵

95,4 % -Prognoseintervall $[\qquad\qquad]$

für relative Häufigkeiten

Münzwurf $\left[\,\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\;\middle|\;\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\,\right]$



←

In einer Urne befinden sich N Kugeln, genau r davon sind blau.
Man entnimmt zufällig nacheinander n Kugeln (zwei Arten sind möglich).
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter genau k blaue Kugeln?

N	Grundgesamtheit
r	Anzahl aller Merkmalsträger
n	Stichprobenumfang
k	Anzahl der Merkmalsträger in der Stichprobe

Ziehen ohne Zurücklegen $\quad P(X = k) = \dfrac{\binom{r}{k} \cdot \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Ziehen mit Zurücklegen $\quad P(X = k) = ?$

$\longleftarrow$

In einer Urne befinden sich N Kugeln, genau r davon sind blau.
Man entnimmt zufällig nacheinander n Kugeln (zwei Arten sind möglich).
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter genau k blaue Kugeln?

N	Grundgesamtheit
r	Anzahl aller Merkmalsträger
n	Stichprobenumfang
k	Anzahl der Merkmalsträger in der Stichprobe

Ziehen ohne Zurücklegen $\quad P(X = k) = ?$

Ziehen mit Zurücklegen $\quad P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \qquad \text{mit } \; p = \frac{r}{N}$

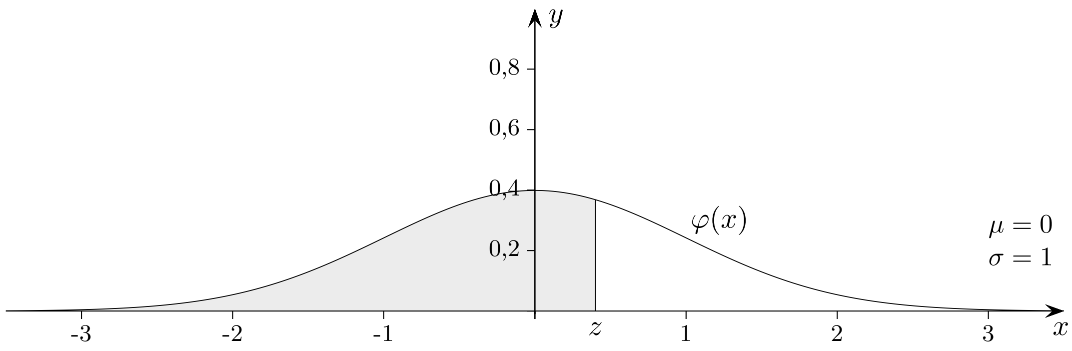
$\longleftarrow$

Gausssche Glockenkurve $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Verteilungsfunktion $\Phi(z) = ?$

GTR $P(X \leq a) = ?$

GTR $P(a \leq X \leq b) = ?$



⟵

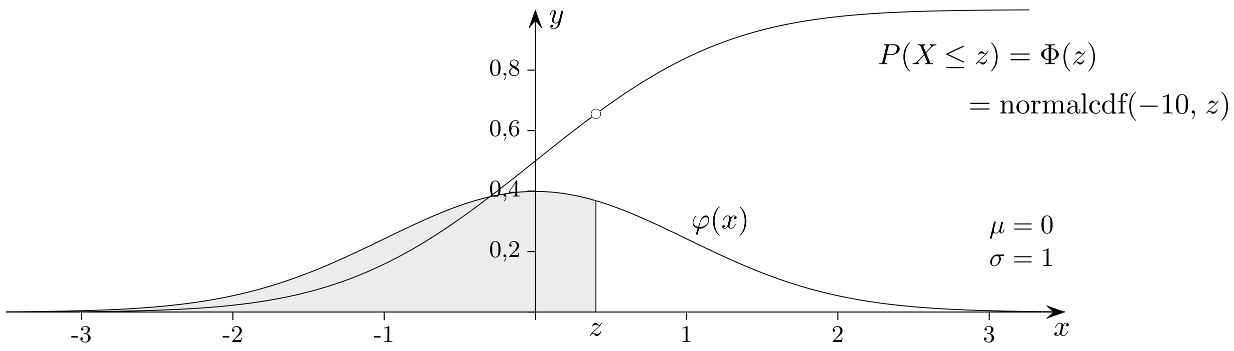
Gausssche Glockenkurve $\varphi(x) = ?$

Dichtefunktion der Standardnormalverteilung

Verteilungsfunktion $\Phi(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} \varphi(x)\,dx$

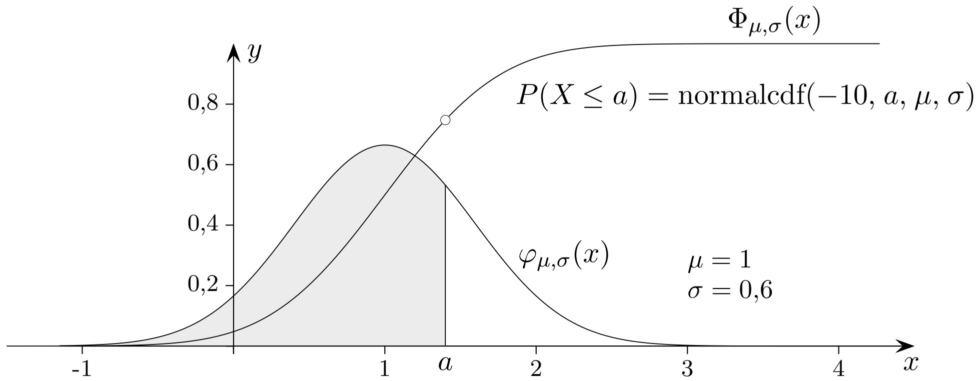
GTR $P(X \le a) = ?$

GTR $P(a \le X \le b) = ?$



⟵

Gausssche Glockenkurve	$\varphi(x)$	$=$	?
Dichtefunktion der Standardnormalverteilung			
Verteilungsfunktion	$\Phi(z)$	$=$	?
GTR	$P(X \le a)$	$=$	normalcdf(-10, a, μ, σ)
GTR	$P(a \le X \le b)$	$=$	?



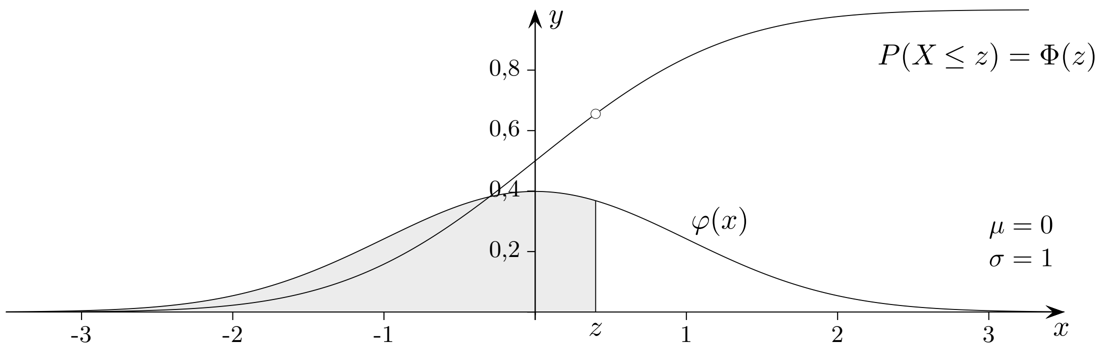
$\longleftarrow$

Gausssche Glockenkurve	$\varphi(x) = ?$
Dichtefunktion der Standardnormalverteilung	
Verteilungsfunktion	$\Phi(z) = ?$

GTR	$P(X \leq a) = ?$
GTR	$P(a \leq X \leq b) = \text{normalcdf}(a, b, \mu, \sigma)$

$\longleftarrow$

Zusammenhang von $\Phi_{\mu,\sigma}$ und Φ	$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$
GTR	$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = ?$
GTR	$\Phi^{-1}(\alpha) = ?$
GTR	$\Phi^{-1}_{\mu,\sigma}(\alpha) = ?$



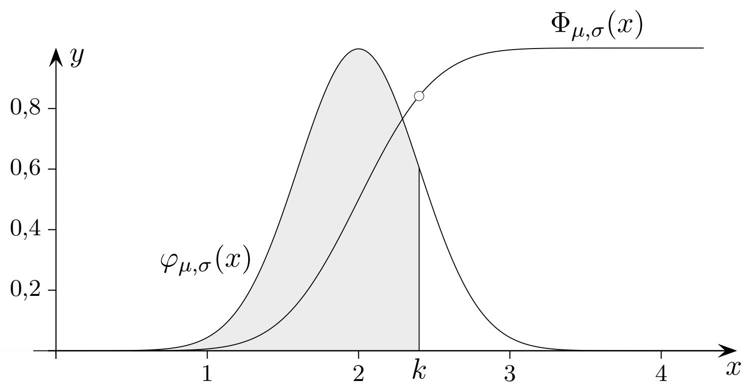
Aus $k = \mu + z\sigma$ folgt

$$z = \frac{k-\mu}{\sigma}.$$

Der Inhalt der Fläche unter $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ bis zur rechten Grenze k ist daher

$$P(X \leq k) = \Phi(\frac{k-\mu}{\sigma})$$

$$= \Phi_{\mu,\sigma}(k).$$



⟵

Zusammenhang von $\Phi_{\mu,\sigma}$ und Φ	$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = ?$
GTR	$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \text{normalcdf}(-\text{E}99, x, \mu, \sigma)$ E mit 2nd EE
GTR	$\Phi^{-1}(\alpha) = ?$
GTR	$\Phi^{-1}_{\mu,\sigma}(\alpha) = ?$

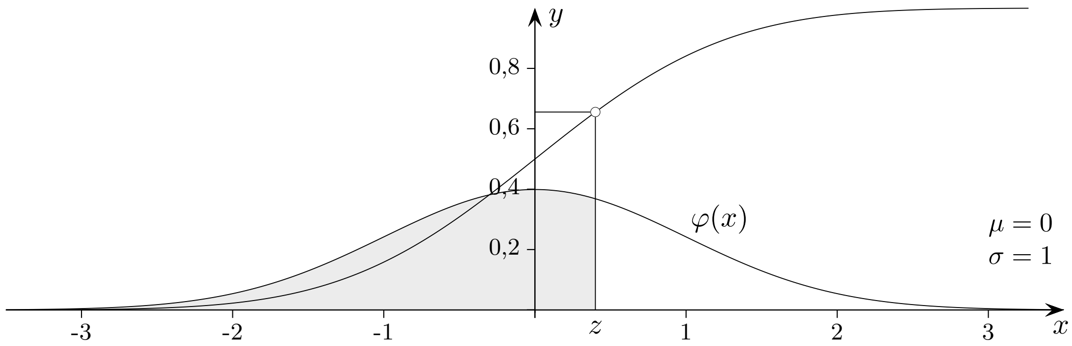
$\longleftarrow$

Zusammenhang von $\Phi_{\mu,\sigma}$ und Φ $\qquad$ $\Phi_{\mu,\sigma}(x) = ?$

GTR $\qquad$ $\Phi_{\mu,\sigma}(x) = ?$

GTR $\qquad$ $\Phi^{-1}(\alpha) = \text{invNorm}(\alpha)$

GTR $\qquad$ $\Phi^{-1}_{\mu,\sigma}(\alpha) = ?$



$$P(X \le z) = \alpha \quad \Longrightarrow \quad z = \text{invNorm}(\alpha)$$

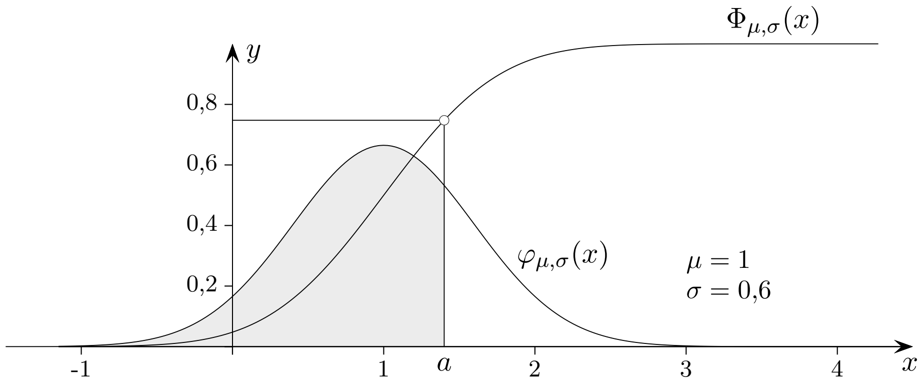
⟵

Zusammenhang von $\Phi_{\mu,\sigma}$ und Φ $\qquad \Phi_{\mu,\sigma}(x) = ?$

GTR $\qquad \Phi_{\mu,\sigma}(x) = ?$

GTR $\qquad \Phi^{-1}(\alpha) = ?$

GTR $\qquad \Phi^{-1}_{\mu,\sigma}(\alpha) = \text{invNorm}(\alpha,\, \mu,\, \sigma)$



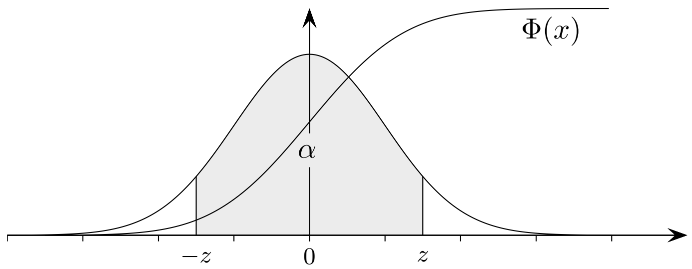
$$P(X \leq a) = \alpha \quad \Longrightarrow \quad a = \text{invNorm}(\alpha,\, \mu,\, \sigma)$$

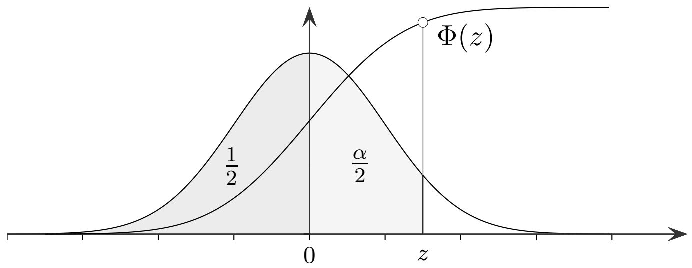
$\longleftarrow$

$P([\mu - z\sigma \mid \mu + z\sigma]) = \alpha$ $\qquad z \;=\; \Phi^{-1}(\frac{1+\alpha}{2})$

$z\sigma$-Umgebung

Prognoseintervall für absolute Häufigkeiten

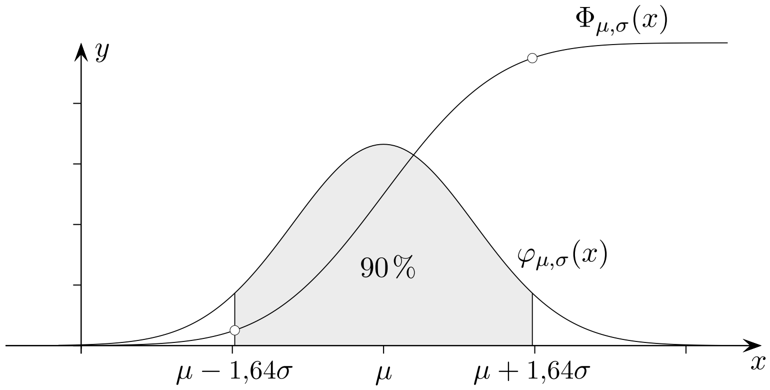




$$\Phi(z) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} \quad \Longrightarrow \quad z = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$

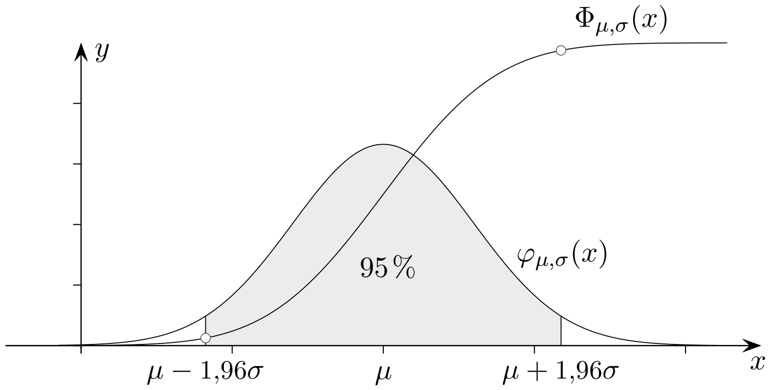
$\longleftarrow$

α	z
0,90	1,64
0,95	
0,954	
0,997	



$\longleftarrow$

α	z
0,90	?
0,95	1,96
0,954	
0,997	



$\longleftarrow$

α	z
0,90	?
0,95	
0,954	2
0,997	

$\longleftarrow$

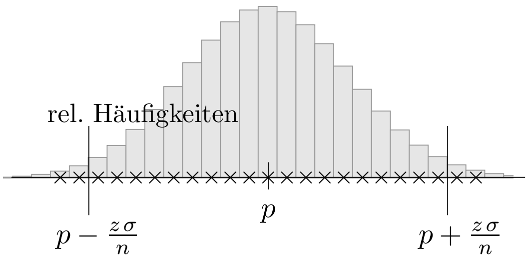
α	z
0,90	?
0,95	
0,954	
0,99	2,58
0,997	

$\longleftarrow$

α	z
0,90	?
0,95	
0,954	
0,997	3

$\longleftarrow$

$z\sigma$-Umgebung
für relative Häufigkeiten h



$\longleftarrow$

$$z = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$

$$\mu - z\sigma \leq k \leq \mu + z\sigma \qquad \text{beachte: } \mu = np,\ h = \frac{k}{n}$$

$$\iff \quad p - z\frac{\sigma}{n} \leq h \leq p + z\frac{\sigma}{n}$$

Mit dem GRT-Befehl 1-PropZInt im STAT-Tests-Menü kann auch ein Prognoseintervall für rel. Häufigkeiten ermittelt werden.
Mit dem bekannten p ist hier lediglich $k = p \cdot n$ zu wählen.

$n = 500,\ p = 0{,}5,\ \alpha = 98\,\%$
Prognoseintervall $(k = 250)$
$[0{,}448; 0{,}552]$

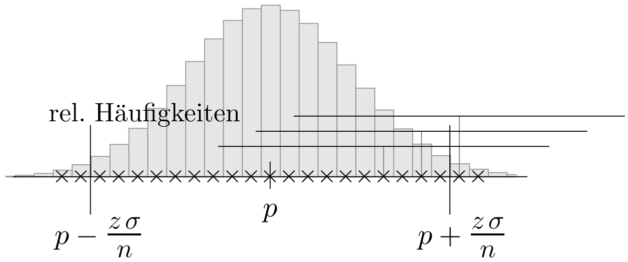
Wald-Vertrauensintervall $\left[\, h - \frac{z\,\sigma}{n} \mid h + \frac{z\,\sigma}{n} \,\right]$

In $\sigma = \sqrt{n\,p\,(1-p)}$ wird für p wird die rel. Häufigkeit $h = \frac{k}{n}$ eingesetzt.

GTR

Wilson-Vertrauensintervall

Prognose- und Wilson-Vertrauensintervall



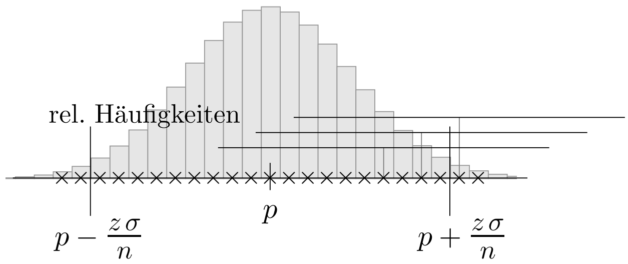
$\longleftarrow$

Wald-Vertrauensintervall

GTR 1-PropZInt, STAT-Tests-Menü

Wilson-Vertrauensintervall

Prognose- und Wilson-Vertrauensintervall



⟵

Wald-Konfidenzintervall, Sicherheitswahrscheinlichkeit $\alpha = 95\,\%$

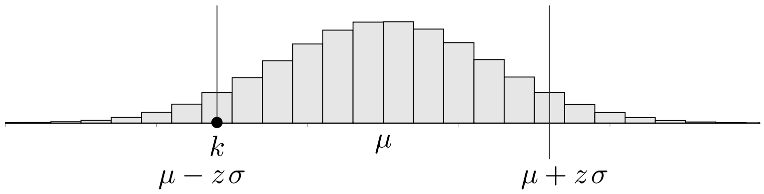
a) $n = 300,\ k = 50$ [0,124; 0,209]

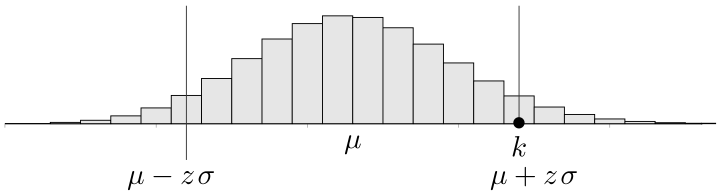
b) $n = 900,\ k = 150$ [0,142; 0,191]

one-proportion z-intervall, z-Intervall für einen Anteil

Wald-Vertrauensintervall
GTR
Wilson-Vertrauensintervall $[p_{\text{min}}, p_{\text{max}}]$
Prognose- und Wilson-Vertrauensintervall

Das Konfidenzintervall (Vertrauensintervall) zum Stichprobenergebnis $X = k$ enthält alle Wahrscheinlichkeiten p, deren $z\sigma$-Umgebung das k enthält (Sicherheitswahrscheinlichkeit α).





$p_{\text{max}}, p_{\text{min}}$ sind die Lösungen der Gleichungen $k = \mu \pm z\sigma$.
Nach der Wurzel umgestellt entsteht durchs Quadrieren eine quadratische Gleichung.

Formulierung mit der relativen Häufigkeit h:
Wilson-Vertrauensintervall: Die Grenzen erhält man bei der Sicherheitswahrscheinlichkeit α als Lösungen der Gleichung $|h - p| \leq z\,\frac{\sigma}{n}, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

$\longleftarrow$

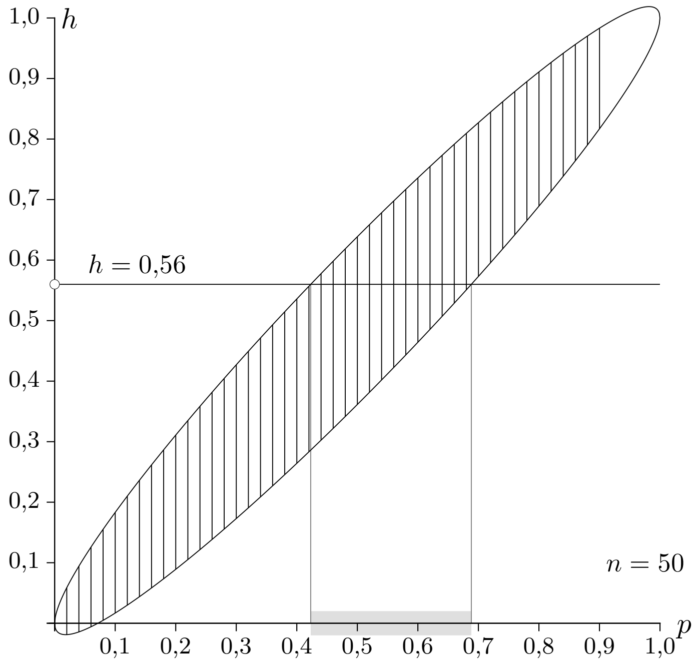
$$z = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$

Wilson-Konfidenzintervall, Sicherheitswahrscheinlichkeit $\alpha = 95\,\%$

a) $n = 300,\ k = 50$ [0,129; 0,213]

b) $n = 900,\ k = 150$ [0,144; 0,192]

GTR: Nullstellen von $f_{1/2}(p) = k - np \pm z\sqrt{np(1-p)}$



Ein 95 %-Vertrauensintervall (Wilson) besteht aus allen p-Werten,
in deren 95 %-Prognoseintervall für rel. Häufigkeiten h liegt.
Die Grenzen können durch Lösen der beiden Gleichungen

$$h = p \pm 1{,}96\,\frac{\sigma}{n}$$

ermittelt werden.

⟵

Zusammenhang von Stichprobenumfang und Vertrauensintervalllänge

$$\Big[\underbrace{\qquad\quad}_{\frac{z\sigma}{n}}\overset{h}{|}\underbrace{\qquad\quad}_{\frac{z\sigma}{n}}\Big]$$

$$\begin{aligned}\frac{z\sigma}{n} &= \frac{z\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot q}}{n}, \qquad p = h \qquad \text{rel. Häufigkeit}\\ &= \frac{z\cdot\sqrt{p\cdot q}}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

$$\frac{z\sigma}{4n} = \frac{z\cdot\sqrt{p\cdot q}}{\sqrt{4n}} = \frac{z\cdot\sqrt{p\cdot q}}{2\sqrt{n}}$$

$$\frac{z\sigma}{2n} = \frac{z\cdot\sqrt{p\cdot q}}{\sqrt{2n}} = \frac{z\cdot\sqrt{p\cdot q}}{\sqrt{2}\sqrt{n}}$$

Wird die Stichprobenlänge n vervierfacht, so halbiert sich die Länge des Wald-Vertrauensintervalls. Wird n verdoppelt, so verringert sich die Länge des Vertrauensintervalls mit dem Faktor $1/\sqrt{2}$ ($\sqrt{n}$-Gesetz).

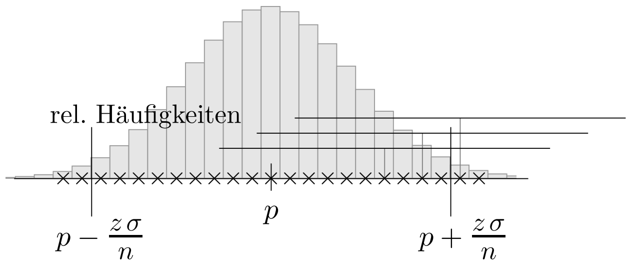
$\longleftarrow$

Notwendiger Stichprobenumfang $\quad 2 \cdot \frac{z\sigma}{n} \leq d$

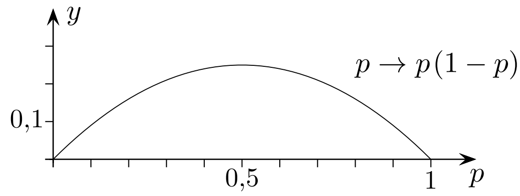
Hiermit ist das minimale n zu bestimmen, d. h. die Ungleichung ist nach n umzustellen.

$4 \cdot \left(\frac{z}{d}\right)^2 pq \leq n_{\min}$

Welcher Stichprobenumfang n ist bei vorgegebener Länge d des Konfidenzintervalls erforderlich, um eine unbekannte Wahrscheinlichkeit p zu ermitteln?



Falls eine Näherung für p bekannt ist, kann sie verwendet (eingesetzt) werden, ansonsten ist vom ungünstigsten Fall $p = \frac{1}{2}$ mit $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ auszugehen.



$\longleftarrow$

Mit der halben Intervalllänge e (error, Fehlergrenze, $d = 2e$) lautet die Bedingung: $\left(\frac{z}{e}\right)^2 pq \leq n_{\min}$

$$
\begin{aligned}
\frac{z\,\sigma}{n} &= e \\
\frac{z^2\, n \cdot p \cdot q}{n^2} &= e^2 \\
\frac{z^2\, p \cdot q}{n} &= e^2 \\
\frac{z^2}{e^2}\, p \cdot q &= n \\
\left(\frac{z}{e}\right)^2 pq &\leq n_{\min}
\end{aligned}
$$

Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Laplace-Bedingung	Falls die Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, liefert die Näherung durch die Normalverteilung ausreichend genaue Intervallwahrscheinlichkeiten.
Stetigkeitskorrektur	X binomialverteilt $\quad P(a \leq X \leq b) \approx$

$\longleftarrow$

Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Laplace-Bedingung

Stetigkeitskorrektur

X binomialverteilt $\quad P(a \leq X \leq b) \approx P(a - 0{,}5 \leq X \leq b + 0{,}5)$

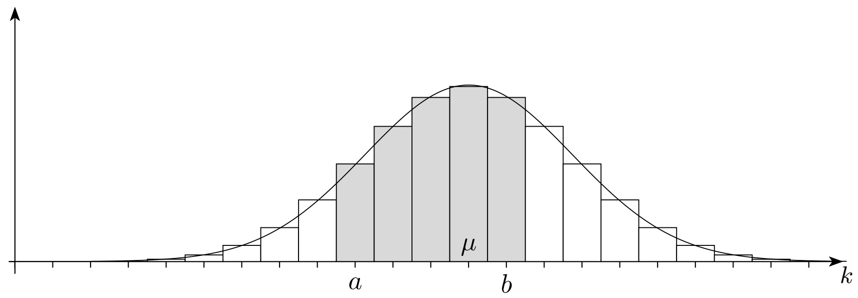
X nimmt Werte aus $\mathbb{N}_0$ an.

X normalverteilt

X ist stetig verteilt.

Die Stetigkeitskorrektur führt zu einem genaueren Ergebnis.

⟵



$A,\ B,\ C \subset \Omega,$ für Wahrscheinlichkeiten gilt:

a) $0 \leq P(A) \leq 1$

b) $P(\overline{A}) = ?$

c) $A \subset B \implies ?$

d) $P(A \cup B) = ?$

e) $P(A \cup B \cup C) = ?$

$\longleftarrow$

$A,\ B,\ C \subset \Omega$, für Wahrscheinlichkeiten gilt:

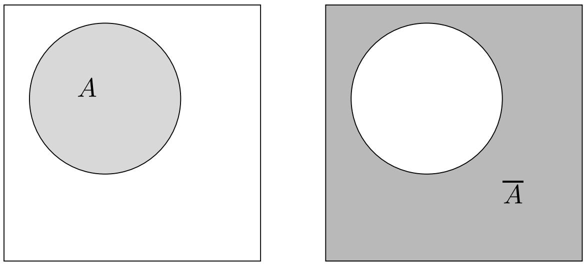
a) $? \leq P(A) \leq ?$

b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

c) $A \subset B \implies ?$

d) $P(A \cup B) = ?$

e) $P(A \cup B \cup C) = ?$



$\longleftarrow$

$A,\ B,\ C \subset \Omega,$ für Wahrscheinlichkeiten gilt:

a) $? \leq P(A) \leq ?$

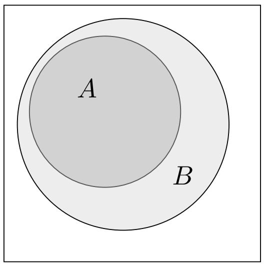
b) $P(\overline{A}) = ?$

c) $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$

d) $P(A \cup B) = ?$

e) $P(A \cup B \cup C) = ?$

$\longleftarrow$



$A \subset B$

$A,\ B,\ C \subset \Omega,$ für Wahrscheinlichkeiten gilt:

a) $? \le P(A) \le ?$

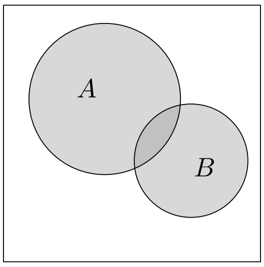
b) $P(\overline{A}) = ?$

c) $A \subset B \implies ?$

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

e) $P(A \cup B \cup C) = ?$

$\longleftarrow$



$A \cup B$

Gegeben: $P(E_1) = 0{,}4;\ P(E_2) = 0{,}7;\ P(E_1 \cap E_2) = 0{,}3$

Berechne: a) $P(\overline{E}_1)$ b) $P(E_1 \cup E_2)$ c) $P(E_1 \cap \overline{E}_2)$ d) $P(E_1 \cup \overline{E}_2)$

Ergebnisse: a) 0,6 b) 0,8 c) 0,1 d) 0,6

$A,\ B,\ C \subset \Omega,$ für Wahrscheinlichkeiten gilt:

a) $? \leq P(A) \leq ?$

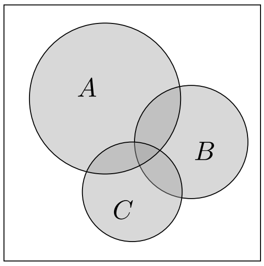
b) $P(\overline{A}) = ?$

c) $A \subset B \implies ?$

d) $P(A \cup B) = ?$

e) $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$\longleftarrow$



$A \cup B \cup C$

grafische Lösung

tabellarische Lösung

minimales k mit $P_{0,05}^{80}(X \geq k) \leq 5\,\%$

Y1 = 1 − binomcdf(80, 0.05, X−1)

X	Y1
7	.105
8	.047

$k = 8$

⟵

minimales n mit $P_{0,8}^{n}(X \geq 3) \geq 95\,\%$

Y1 = 1 − binomcdf(X, 0.8, 2)

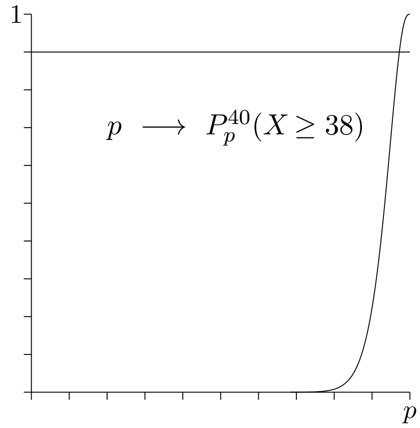
X	Y1
5	.942
6	.983

mindestens $n = 6$

grafische Lösung

tabellarische Lösung

minimales p mit $P_p^{40}(X \geq 38) \geq 90\,\%$



$\mathrm{Y}1 = 1 - \mathrm{binomcdf}(40, \mathrm{X}, 37)$

mindestens $p = 97{,}2\,\%$

$\longleftarrow$

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!}$$

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$$

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!}$$ 10 nCr 4 210

$$\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$$

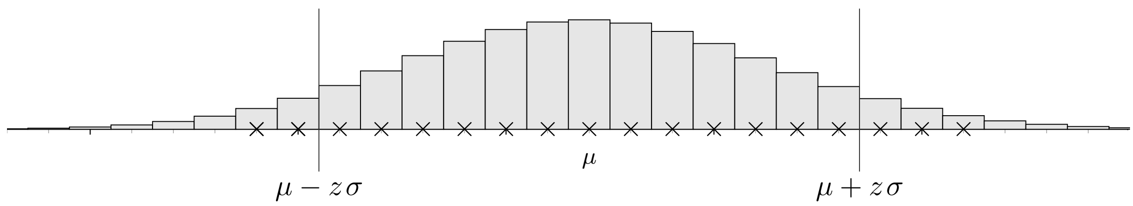
⟵

$P([\mu - z\sigma \mid \mu + z\sigma]) = \alpha$ $\qquad$ $z = ?$

$z\sigma$-Umgebung

Prognoseintervall für absolute Häufigkeiten

$\longleftarrow$



Mit dem GRT-Befehl 1-PropZInt im STAT-Tests-Menü kann auch ein Prognoseintervall ermittelt werden. Mit dem bekannten p ist hier lediglich $k = p \cdot n$ zu wählen.
Die mit dem GTR ermittelten Intervallgrenzen sind für das Prognoseintervall für absolute Häufigkeiten noch mit n zu multiplizieren.

$n = 500,\ p = 0{,}5,\ \alpha = 98\,\%$

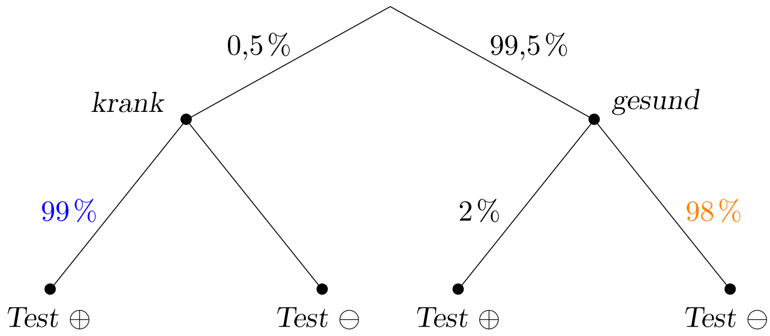
Prognoseintervall $(k = 250)$

$[0{,}448; 0{,}552]$ relative Häufigkeiten

$[224; 276]$ absolute Häufigkeiten

medizinischer Test (Bayes)
Wiederholung

Eine Krankheit komme bei etwa 0,5 % der Bevölkerung vor.
Ein Test zur Auffindung der Krankheit führt bei 99 % der Kranken zu einer Reaktion (Sensitivität des Tests), bei 98 % der Gesunden zu keiner Reaktion (Spezifität).
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, bei der die Reaktion eintritt, die Krankheit tatsächlich hat?



Mit dem Pfaddiagramm ergibt sich:

$$P(krank \mid \oplus) = \frac{0{,}5\,\% \cdot 99\,\%}{0{,}5\,\% \cdot 99\,\% \ + \ 99{,}5\,\% \cdot 2\,\%} = 19{,}9\,\%$$

⟵

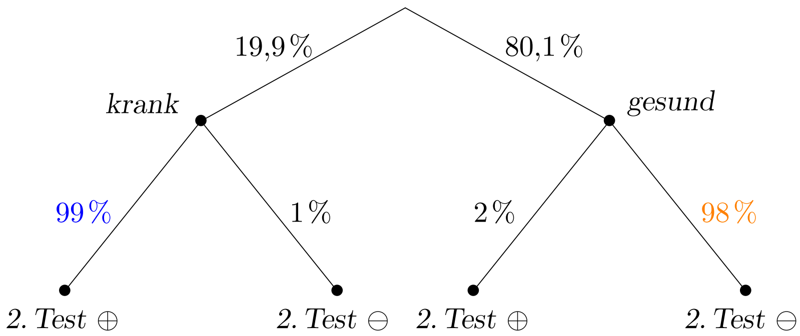
Mit dem Pfaddiagramm ergibt sich:

$$P(krank \mid \oplus) = \frac{0{,}5\,\% \cdot 99\,\%}{0{,}5\,\% \cdot 99\,\% \; + \; 99{,}5\,\% \cdot 2\,\%} = 19{,}9\,\%$$

Der Test wird wiederholt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person, bei der die Reaktion

a) erneut
b) nur beim 1. Test

eintritt, in Wirklichkeit krank ist?



a) $P(krank \mid \textit{auch 2. Test} \oplus) = \dfrac{19{,}9\,\% \cdot 99\,\%}{19{,}9\,\% \cdot 99\,\% \; + \; 80{,}1\,\% \cdot 2\,\%} = 92{,}5\,\%$

b) $P(krank \mid \textit{nur im 1. Test} \oplus) = \dfrac{19{,}9\,\% \cdot 1\,\%}{19{,}9\,\% \cdot 1\,\% \; + \; 80{,}1\,\% \cdot 98\,\%} = 0{,}3\,\%$

⟵

Normalverteilung $\quad \Phi$-Schreibweise für Ansätze

$P(X \leq k) = \Phi_{\mu,\sigma}(k), \quad P(X \leq k) = \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$ $\quad \lfloor$normalcdf$(-\text{E}99, k, \mu, \sigma)\rfloor$ E mit 2nd EE

$P(X \leq z) = ?$, falls $\mu = 0$ und $\sigma = 1$

$P(a \leq X \leq b) = ?$

$k = ?$ Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k (das α-Quantil) gesucht, $\mu = 0$, $\sigma = 1$

$k = ?$ μ, σ gegeben, α-Quantil gesucht

$\longleftarrow$

Normalverteilung Φ-Schreibweise für Ansätze

$P(X \leq k) = ?$

$P(X \leq z) = \Phi(z)$, falls $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ $\lfloor \text{normalcdf}(-10, z) \rfloor$

$P(a \leq X \leq b) = ?$

$k = ?$ Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k (das α-Quantil) gesucht, $\mu = 0$, $\sigma = 1$

$k = ?$ μ, σ gegeben, α-Quantil gesucht

$\longleftarrow$

Normalverteilung Φ-Schreibweise für Ansätze

$P(X \leq k) = ?$

$P(X \leq z) = ?$, falls $\mu = 0$ und $\sigma = 1$

$P(a \leq X \leq b) = \Phi_{\mu,\sigma}(b) - \Phi_{\mu,\sigma}(a)$ $\lfloor \text{normalcdf}(a, b, \mu, \sigma) \rfloor$

$k = ?$ Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k (das α-Quantil) gesucht, $\mu = 0$, $\sigma = 1$

$k = ?$ μ, σ gegeben, α-Quantil gesucht

$\longleftarrow$

Normalverteilung $\quad \Phi$-Schreibweise für Ansätze

$P(X \leq k) = ?$

$P(X \leq z) = ?$, falls $\mu = 0$ und $\sigma = 1$

$P(a \leq X \leq b) = ?$

$k = \Phi^{-1}(\alpha)$ $\quad \lfloor k = \text{invNorm}(\alpha) \rfloor$ $\quad$ Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k (das α-Quantil) ermittelt, $\mu = 0$, $\sigma = 1$

$k = ?$ $\quad$ μ, σ gegeben, α-Quantil gesucht

$\longleftarrow$

Normalverteilung $\quad\Phi$-Schreibweise für Ansätze

$P(X \leq k) = ?$

$P(X \leq z) = ?$, $\quad$ falls $\mu = 0$ und $\sigma = 1$

$P(a \leq X \leq b) = ?$

$k = ?$ $\quad$ Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k (das α-Quantil) gesucht, $\mu = 0$, $\sigma = 1$

$k = \Phi^{-1}_{\mu,\sigma}(\alpha)$ $\quad$ $\lfloor k = \text{invNorm}(\alpha, \mu, \sigma) \rfloor$ $\quad$ μ, σ gegeben, α-Quantil gesucht

$\longleftarrow$

Normalverteilung $\int$-Schreibweise für Ansätze

$$P(X \le k) = \int_{-\infty}^{k} \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx$$ $\lfloor \text{normalcdf}(-\text{E}99, k, \mu, \sigma) \rfloor$ E mit 2nd EE

$P(X \le z) = ?$, falls $\mu = 0$ und $\sigma = 1$

$P(a \le X \le b) = ?$

$\int \dots$ Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k (das α-Quantil) gesucht.

$\int \dots$ Zu gegebenem α ist μ (σ, eine Grenze a oder b) gesucht.

$\longleftarrow$

Normalverteilung $\int$-Schreibweise für Ansätze

$P(X \leq k) = ?$

$P(X \leq z) = \int\limits_{-\infty}^{z} \varphi(x)\, dx$, falls $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ $\lfloor$normalcdf$(-10, z)\rfloor$

$P(a \leq X \leq b) = ?$

$\int \ldots$

Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k (das α-Quantil) gesucht.

$\int \ldots$

Zu gegebenem α ist μ (σ, eine Grenze a oder b) gesucht.

$\longleftarrow$

Normalverteilung $\int$-Schreibweise für Ansätze

$P(X \leq k) = ?$

$P(X \leq z) = ?$, falls $\mu = 0$ und $\sigma = 1$

$P(a \leq X \leq b) = \int\limits_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx$ $\lfloor \text{normalcdf}(a, b, \mu, \sigma) \rfloor$

$\int \ldots$ Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k (das α-Quantil) gesucht.

$\int \ldots$ Zu gegebenem α ist μ (σ, eine Grenze a oder b) gesucht.

$\longleftarrow$

Normalverteilung $\int$-Schreibweise für Ansätze

$P(X \leq k) = ?$

$P(X \leq z) = ?$, falls $\mu = 0$ und $\sigma = 1$

$P(a \leq X \leq b) = ?$

$\int\limits_{-\infty}^{k} \varphi_{\mu,\sigma}(x)\, dx = \alpha$ $\lfloor k = \text{invNorm}(\alpha, \mu, \sigma) \rfloor$ Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k (das α-Quantil) gesucht.

$\int \ldots$ Zu gegebenem α ist μ (σ, eine Grenze a oder b) gesucht.

$\longleftarrow$

Normalverteilung $\int$-Schreibweise für Ansätze

$P(X \leq k) = ?$

$P(X \leq z) = ?$, falls $\mu = 0$ und $\sigma = 1$

$P(a \leq X \leq b) = ?$

$\int \dots$

Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k (das α-Quantil) gesucht.

$$\int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,dx = \alpha \qquad \lfloor \alpha = \mathrm{normalcdf}(a, b, \mu, \sigma) \rfloor$$

Zu gegebenem α ist μ (σ, eine Grenze a oder b) gesucht.

$\longleftarrow$