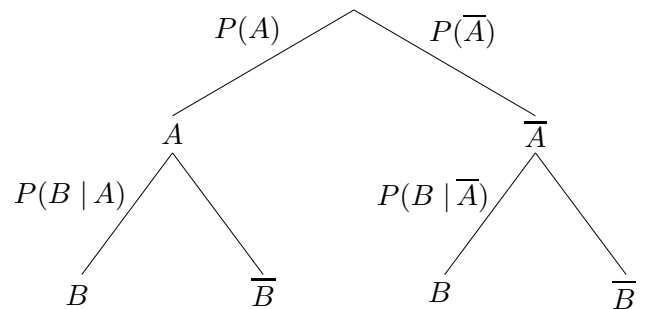


Merkhilfe Stochastik

		A		\bar{A}		$Summe$
B		a		b		$a + b$
\bar{B}		c		d		$c + d$
$Summe$		$a + c$		$b + d$		$s = a + b + c + d$

1. bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A | B) = ?$

A und B unabhängig



2. bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A | B) = ?$

Satz von Bayes

A und B unabhängig

A und B unabhängig (allgemein)

3. Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilung:

a_1	a_2	a_3	a_4
p_1	p_2	p_3	p_4

Erwartungswert $\mu = ?$

Standardabweichung $\sigma = ?$

GTR $?$

Varianz (vereinfacht) $V(X) = ?$

4. Binomialverteilung $P_p^n(X = k) = ?$
- GTR $P(X = k) = ?$
- $P_p^n(X \leq k) = ?$
- GTR $P(X \leq k) = ?$
- $P(X \geq k) = ?$
- GTR $P(a \leq X \leq b) = ?$

5. Zufallsgröße X binomialverteilt Erwartungswert $\mu = ?$
 Parameter n, p Varianz $V = ?$
 Standardabweichung $\sigma = ?$

6. X binomialverteilt, $P(X \geq 1) \geq \alpha$?
 „mindestens ein Treffer“
 gesucht: n (mindestens)

7. σ -Umgebung $P(\mu - \sigma \leq k \leq \mu + \sigma) = ?$
 $P(\mu - 2\sigma \leq k \leq \mu + 2\sigma) = ?$
 $P(\mu - 3\sigma \leq k \leq \mu + 3\sigma) = ?$

8. 95,4% -Prognoseintervall $[\quad]$
 für relative Häufigkeiten
 Münzwurf $[\quad]$

9. In einer Urne befinden sich N Kugeln, genau r davon sind blau.
 Man entnimmt zufällig nacheinander n Kugeln (zwei Arten sind möglich).
 Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter genau k blaue Kugeln?

		N	Grundgesamtheit
		r	Anzahl aller Merkmalsträger
		n	Stichprobenumfang
		k	Anzahl der Merkmalsträger in der Stichprobe
Ziehen ohne Zurücklegen	$P(X = k) = ?$		
Ziehen mit Zurücklegen	$P(X = k) = ?$		

10. Gausssche Glockenkurve $\varphi(x) = ?$
 Dichtefunktion der Standardnormalverteilung
 Verteilungsfunktion $\Phi(z) = ?$

GTR $P(X \leq a) = ?$

GTR $P(a \leq X \leq b) = ?$

11. Zusammenhang von $\Phi_{\mu,\sigma}$ und Φ $\Phi_{\mu,\sigma}(x) = ?$

GTR $\Phi_{\mu,\sigma}(x) = ?$

GTR $\Phi^{-1}(\alpha) = ?$

GTR $\Phi_{\mu,\sigma}^{-1}(\alpha) = ?$

12. $P([\mu - z\sigma | \mu + z\sigma]) = \alpha$ $z = ?$
 $z\sigma$ -Umgebung
 Prognoseintervall für absolute Häufigkeiten

α	z
0,90	?
0,95	
0,954	
0,997	

13. $z\sigma$ -Umgebung (Prognoseintervall)
 für relative Häufigkeiten

14. Wald-Vertrauensintervall
 GTR
 Wilson-Vertrauensintervall
 Prognose- und Wilson-Vertrauensintervalle (Ellipse)

15. Zusammenhang von Stichprobenumfang und Vertrauensintervalllänge

16. Notwendiger Stichprobenumfang zu gegebener Vertrauensintervalllänge

17. Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Laplace-Bedingung

Stetigkeitskorrektur X binomialverteilt $P(a \leq X \leq b) \approx$

18. $A, B, C \subset \Omega$, für Wahrscheinlichkeiten gilt:

a) $? \leq P(A) \leq ?$

b) $P(\overline{A}) = ?$

c) $A \subset B \implies ?$

d) $P(A \cup B) = ?$

e) $P(A \cup B \cup C) = ?$

19. grafische Lösung minimales p mit $P_p^{40}(X \geq 38) \geq 90\%$

tabellarische Lösung minimales k mit $P_{0,05}^{80}(X \geq k) \leq 5\%$

20. Binomialkoeffizient

21. medizinischer Test (Bayes)

Wiederholung

22. Normalverteilung Φ -Schreibweise für Ansätze

$$P(X \leq k) = ?$$

$$P(X \leq z) = ? , \quad \text{falls } \mu = 0 \text{ und } \sigma = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = ?$$

$$k = ?$$

Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k
(das α -Quantil) gesucht, $\mu = 0, \sigma = 1$

$$k = ?$$

μ, σ gegeben, α -Quantil gesucht

23. Normalverteilung \int -Schreibweise für Ansätze

Die Ansätze dieser Art sind einfacher zu handhaben als diejenigen mit der Verteilungsfunktion Φ .

$$P(X \leq k) = ?$$

$$P(X \leq z) = ? , \quad \text{falls } \mu = 0 \text{ und } \sigma = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = ?$$

$$\int \dots$$

Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k
(das α -Quantil) gesucht.

$$\int \dots$$

Zu gegebenem α ist μ (σ , eine Grenze a oder b)
gesucht.

Ende der Merkhilfe Stochastik

[zum Anfang](#)

[zur Merkhilfe](#)

[Grundwissen](#)

[Differenzialrechnung](#)

[Integralrechnung](#)

[Vektorrechnung](#)

[Homepage](#)

Merkhilfe Stochastik

Binomialverteilung	$P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad q = 1 - p$	
GTR	$P(X = k) = \text{binompdf}(n, p, k)$	probability density function
	$P_p^n(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}$	
GTR	$P(X \leq k) = \text{binomcdf}(n, p, k)$	cumulative density function
	$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$	

	A	\bar{A}	Summe
B	a	b	$a + b$
\bar{B}	c	d	$c + d$
Summe	$a + c$	$b + d$	$s = a + b + c + d$

bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A | B) = \frac{a}{a + b}$

A und B unabhängig

←

	A	\bar{A}	Summe
B	$ A \cap B $	$ \bar{A} \cap B $	$ B $
\bar{B}	$ A \cap \bar{B} $	$ \bar{A} \cap \bar{B} $	$ \bar{B} $
Summe	$ A $	$ \bar{A} $	$ \Omega $

$$P(A | B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

	A	\bar{A}	Summe
B	a	b	$a + b$
\bar{B}	c	d	$c + d$
Summe	$a + c$	$b + d$	$s = a + b + c + d$

bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A | B) = ?$$

A und B unabhängig

$$P(A | B) = P(A | \bar{B})$$

d. h.

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

oder

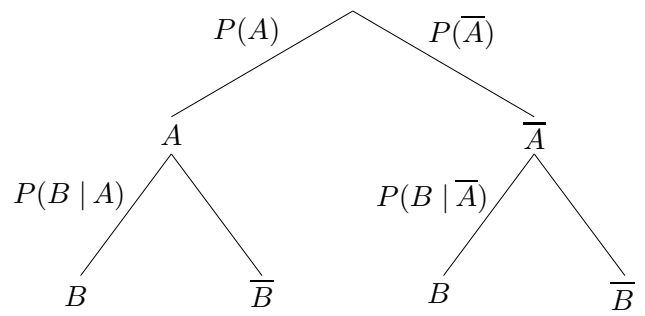
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{siehe Pfaddiagramm}$$

←

	A	\bar{A}	Summe
B	$P(A \cap B)$		$P(B)$
\bar{B}			
Summe	$P(A)$		

		1. Wurf (Würfel)		
		6	$\bar{6}$	Summe
2. Wurf	6	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	$\bar{6}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$
Summe		$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

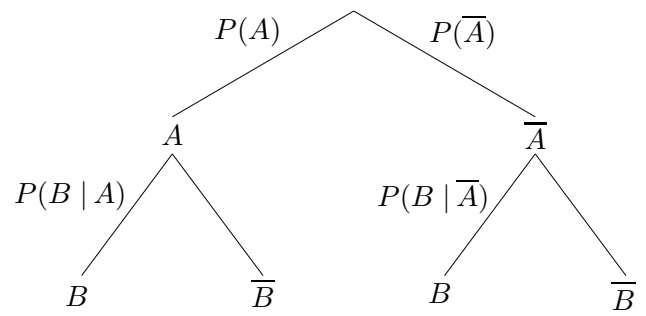


bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A | B) = \frac{P(A) \cdot P(B | A)}{P(A) \cdot P(B | A) + P(\bar{A}) \cdot P(B | \bar{A})}$

A und B unabhängig

A und B unabhängig (allgemein)

←

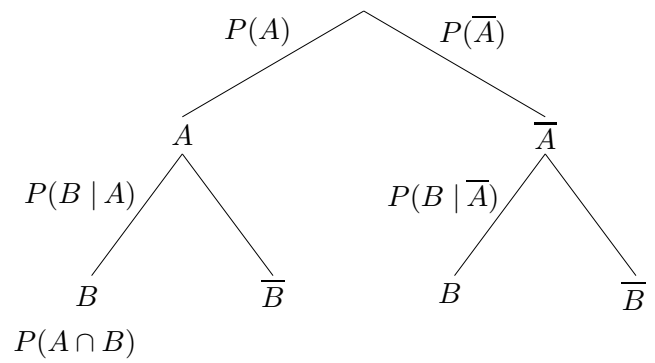


bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A | B) = ?$ Satz von Bayes

A und B unabhängig $P(B | A) = P(B | \bar{A})$

A und B unabhängig (allgemein)

←



bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A | B) = ?$ Satz von Bayes

A und B unabhängig

A und B unabhängig (allgemein) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

$$P(B | A) = P(B) * \text{ ist zu zeigen}$$

Beachte: Das Ereignis B besteht aus 2 Pfaden.

Mit $P(B | A) = P(B | \bar{A})$ folgt *.

←

Im Einzelnen:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) \cdot P(B | A) + P(\bar{A}) \cdot \underbrace{P(B | \bar{A})}_{P(B | A)} \\ &= \underbrace{[P(A) + P(\bar{A})]}_1 \cdot P(B | A) \end{aligned}$$

Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilung:

a_1	a_2	a_3	a_4
p_1	p_2	p_3	p_4

Erwartungswert $\mu = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4$

Standardabweichung $\sigma = ?$

GTR $?$

Varianz (vereinfacht) $V(X) = ?$

←

Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilung:

a_1	a_2	a_3	a_4
p_1	p_2	p_3	p_4

Erwartungswert $\mu = ?$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{(a_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (a_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + (a_3 - \mu)^2 \cdot p_3 + (a_4 - \mu)^2 \cdot p_4}$

GTR $?$

Varianz (vereinfacht) $V(X) = ?$

←

Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilung:

a_1	a_2	a_3	a_4
p_1	p_2	p_3	p_4

Erwartungswert $\mu = ?$

Standardabweichung $\sigma = ?$

GTR

STAT | CALC 1: 1-Var Stats L1, L2

Varianz (vereinfacht) $V(X) = ?$

←

k	0	1	2	4
$P(X = k)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

$$E(X) = 1,57$$

$$V(X) = 2,82$$

$$\sigma = 1,68$$

Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilung:

a_1	a_2	a_3	a_4
p_1	p_2	p_3	p_4

Erwartungswert $\mu = ?$

Standardabweichung $\sigma = ?$

GTR $?$

Varianz (vereinfacht) $V(X) = a_1^2 p_1 + a_2^2 p_2 + a_3^2 p_3 + a_4^2 p_4 - \mu^2 \quad (= E(X^2) - \mu^2)$

←

Binomialverteilung $P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad q = 1 - p$

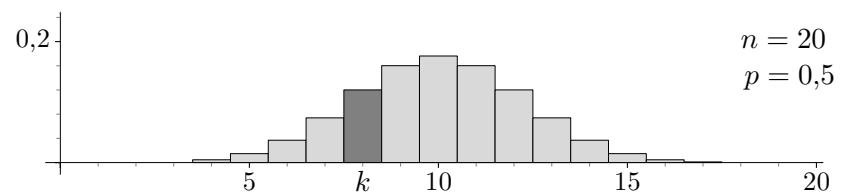
GTR $P(X = k) = ?$

$P_p^n(X \leq k) = ?$

GTR $P(X \leq k) = ?$

$P(X \geq k) = ?$

GTR $P(a \leq X \leq b) = ?$



←

Binomialverteilung $P_p^n(X = k) = ?$

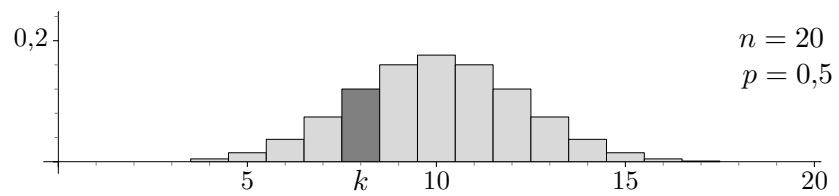
GTR $P(X = k) = \text{binompdf}(n, p, k)$ probability density function

$P_p^n(X \leq k) = ?$

GTR $P(X \leq k) = ?$

$P(X \geq k) = ?$

GTR $P(a \leq X \leq b) = ?$



←

Binomialverteilung $P_p^n(X = k) = ?$

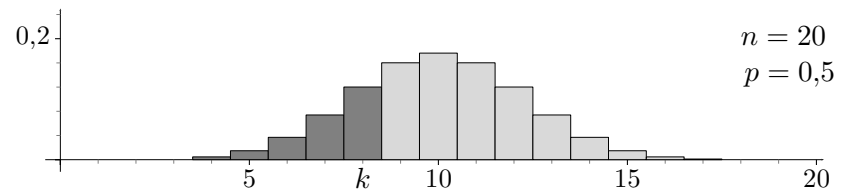
GTR $P(X = k) = ?$

$$P_p^n(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}$$

GTR $P(X \leq k) = ?$

$P(X \geq k) = ?$

GTR $P(a \leq X \leq b) = ?$



←

Binomialverteilung $P_p^n(X = k) = ?$

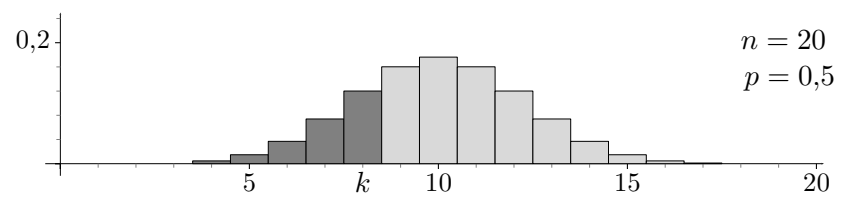
GTR $P(X = k) = ?$

$P_p^n(X \leq k) = ?$

GTR $P(X \leq k) = \text{binomcdf}(n, p, k)$ cumulative density function

$P(X \geq k) = ?$

GTR $P(a \leq X \leq b) = ?$



←

Binomialverteilung $P_p^n(X = k) = ?$

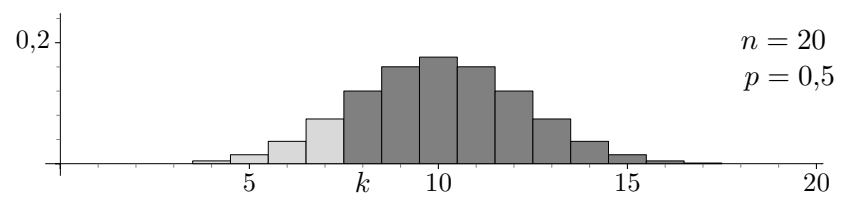
GTR $P(X = k) = ?$

$P_p^n(X \leq k) = ?$

GTR $P(X \leq k) = ?$

$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$

GTR $P(a \leq X \leq b) = ?$



←

Binomialverteilung $P_p^n(X = k) = ?$

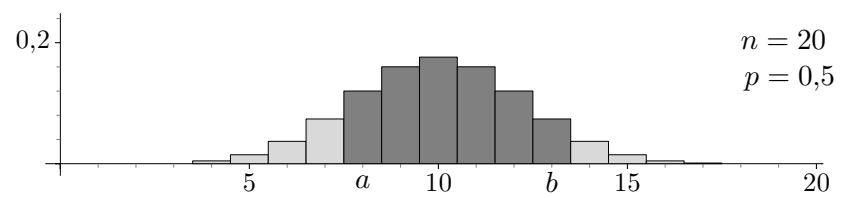
GTR $P(X = k) = ?$

$P_p^n(X \leq k) = ?$

GTR $P(X \leq k) = ?$

$P(X \geq k) = ?$

GTR $P(a \leq X \leq b) = \text{binomcdf}(n, p, b) - \text{binomcdf}(n, p, a-1)$



←

Zufallsgröße X binomialverteilt	Erwartungswert	$\mu = np$
Parameter n, p	Varianz	$V = ?$
	Standardabweichung	$\sigma = ?$

←

Zufallsgröße X binomialverteilt	Erwartungswert	$\mu = ?$
Parameter n, p	Varianz	$V = npq$
	Standardabweichung	$\sigma = ?$

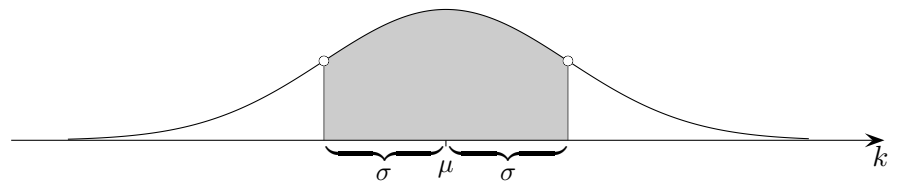
←

Zufallsgröße X binomialverteilt
Parameter n, p

Erwartungswert $\mu = ?$

Varianz $V = ?$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{npq}$



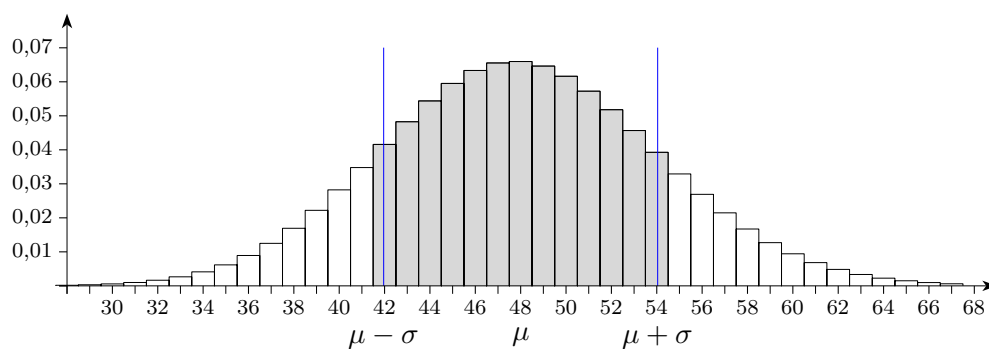
←

σ -Umgebung $P(\mu - \sigma \leq k \leq \mu + \sigma) = 68,3\% \approx \frac{2}{3}$ Laplace-Bedingung $\sigma > 3$

$$P(\mu - 2\sigma \leq k \leq \mu + 2\sigma) = ?$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq k \leq \mu + 3\sigma) = ?$$

←



$$n = 200$$

$$p = 0,24$$

$$\mu = 48$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 6,04$$

$$\sigma\text{-Umgebung} = [42; 54]$$

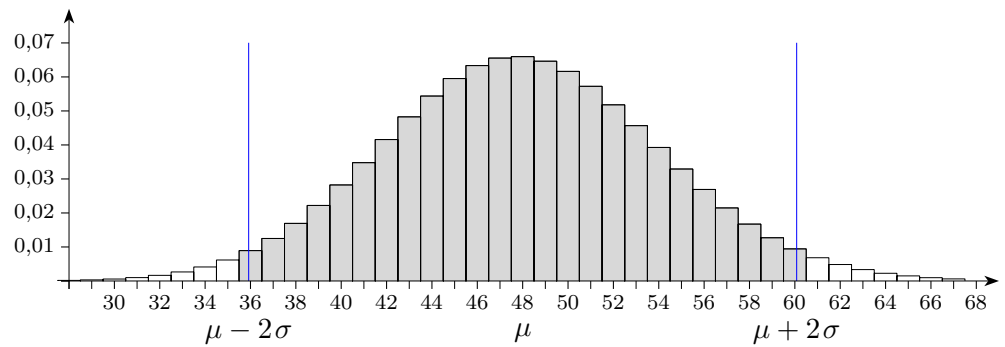
$$P(42 \leq X \leq 54) = 71,8\%$$

σ -Umgebung $P(\mu - \sigma \leq k \leq \mu + \sigma) = ?$

$$P(\mu - 2\sigma \leq k \leq \mu + 2\sigma) = 95,4\%$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq k \leq \mu + 3\sigma) = ?$$

←



$$n = 200$$

$$p = 0,24$$

$$\mu = 48$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 6,04$$

$$\sigma\text{-Umgebung} = [36; 60]$$

$$P(36 \leq X \leq 60) = 96,2\%$$

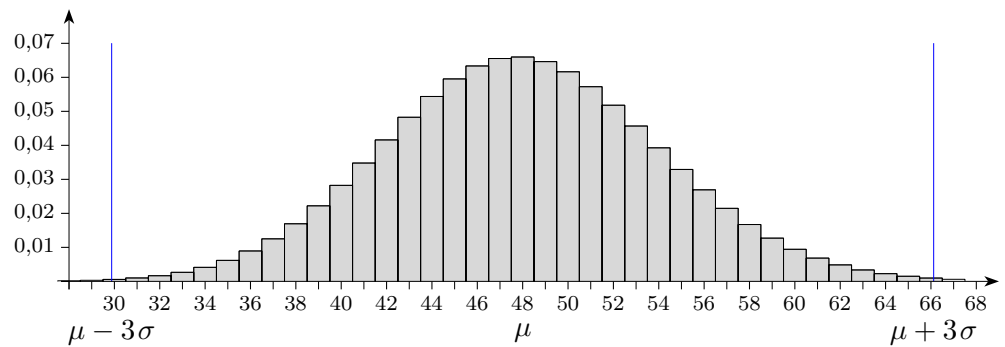
σ -Umgebung

$$P(\mu - \sigma \leq k \leq \mu + \sigma) = ?$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq k \leq \mu + 2\sigma) = ?$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq k \leq \mu + 3\sigma) = 99,7\%$$

←



$$n = 200$$

$$p = 0,24$$

$$\mu = 48$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 6,04$$

$$\sigma\text{-Umgebung} = [30; 66]$$

$$P(30 \leq X \leq 66) = 99,8\%$$

X binomialverteilt, $P(X \geq 1) \geq \alpha$

„mindestens ein Treffer“

gesucht: n (mindestens)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$1 - q^n \geq \alpha$$

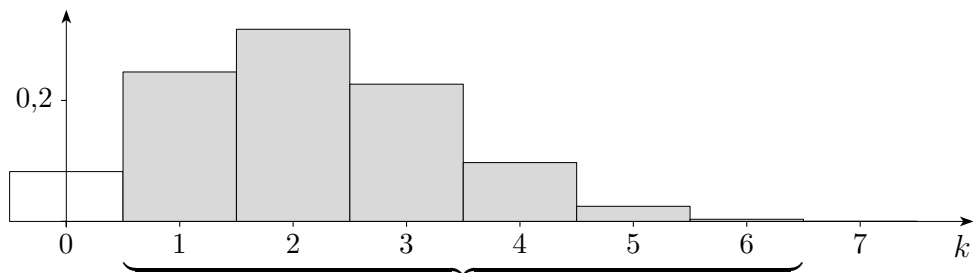
$$n \geq \ln(1 - \alpha) / \ln(q)$$

←

Ab welchem n liegt mit mindestens 90%-iger Wahrscheinlichkeit wenigstens ein Treffer vor, gegeben $p = 0,3$?

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \geq 0,9 \iff 1 - 0,7^n \geq 0,9$$

$$\implies n \geq 6,5 \quad \text{mindestens } n = 7$$

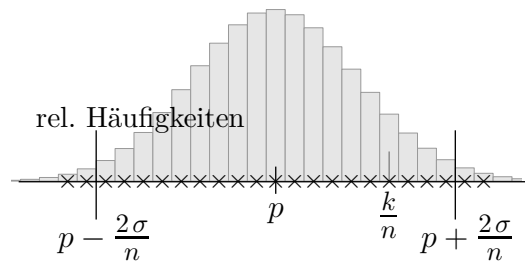


95,4%-Prognoseintervall
für relative Häufigkeiten

$$\left[p - \frac{2\sigma}{n} \mid p + \frac{2\sigma}{n} \right]$$

Münzwurf

$$[\quad]$$

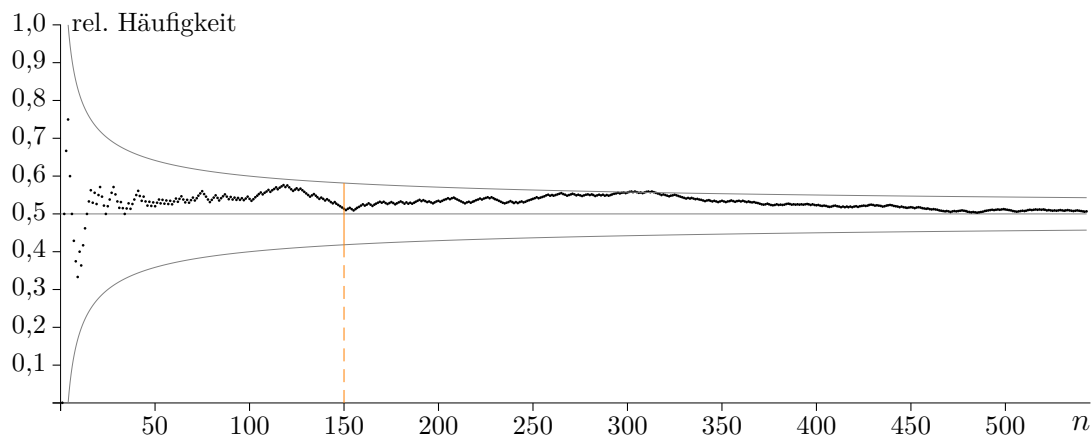


←

95,4% -Prognoseintervall []

für relative Häufigkeiten

Münzwurf $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \mid \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$



In einer Urne befinden sich N Kugeln, genau r davon sind blau.
Man entnimmt zufällig nacheinander n Kugeln (zwei Arten sind möglich).
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter genau k blaue Kugeln?

N Grundgesamtheit
 r Anzahl aller Merkmalsträger
 n Stichprobenumfang
 k Anzahl der Merkmalsträger
in der Stichprobe

Ziehen ohne Zurücklegen $P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Ziehen mit Zurücklegen $P(X = k) = ?$

←

In einer Urne befinden sich N Kugeln, genau r davon sind blau.
Man entnimmt zufällig nacheinander n Kugeln (zwei Arten sind möglich).
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter genau k blaue Kugeln?

N Grundgesamtheit
 r Anzahl aller Merkmalsträger
 n Stichprobenumfang
 k Anzahl der Merkmalsträger
in der Stichprobe

Ziehen ohne Zurücklegen

$$P(X = k) = ?$$

Ziehen mit Zurücklegen

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad \text{mit } p = \frac{r}{N}$$

←

Gaussische Glockenkurve

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Verteilungsfunktion

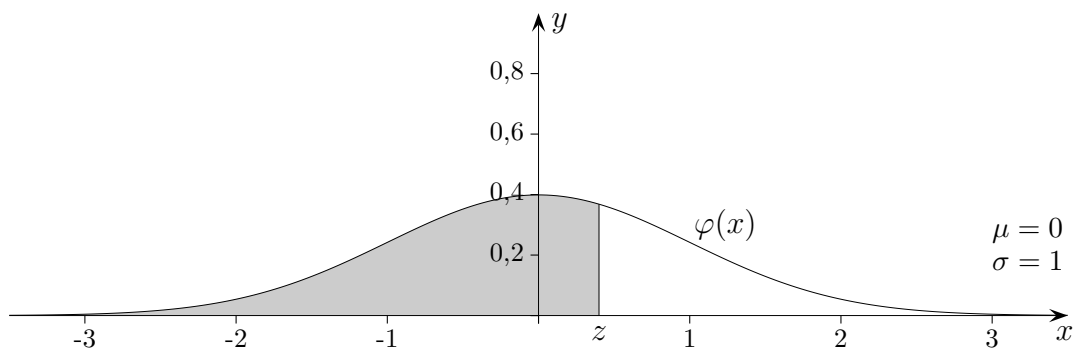
$$\Phi(z) = ?$$

GTR

$$P(X \leq a) = ?$$

GTR

$$P(a \leq X \leq b) = ?$$



←

Gaussische Glockenkurve

$$\varphi(x) = ?$$

Dichtefunktion der Standardnormalverteilung

Verteilungsfunktion

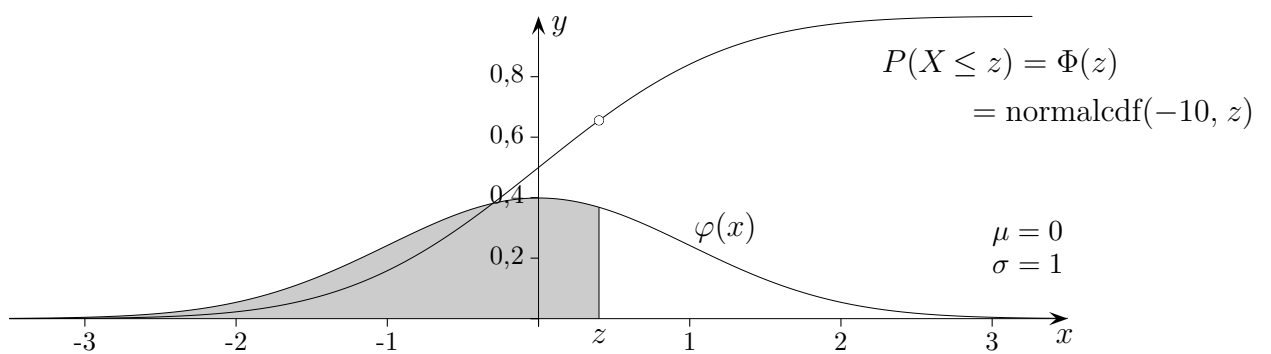
$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(x) dx$$

GTR

$$P(X \leq a) = ?$$

GTR

$$P(a \leq X \leq b) = ?$$



←

Gaussische Glockenkurve

$$\varphi(x) = ?$$

Dichtefunktion der Standardnormalverteilung

Verteilungsfunktion

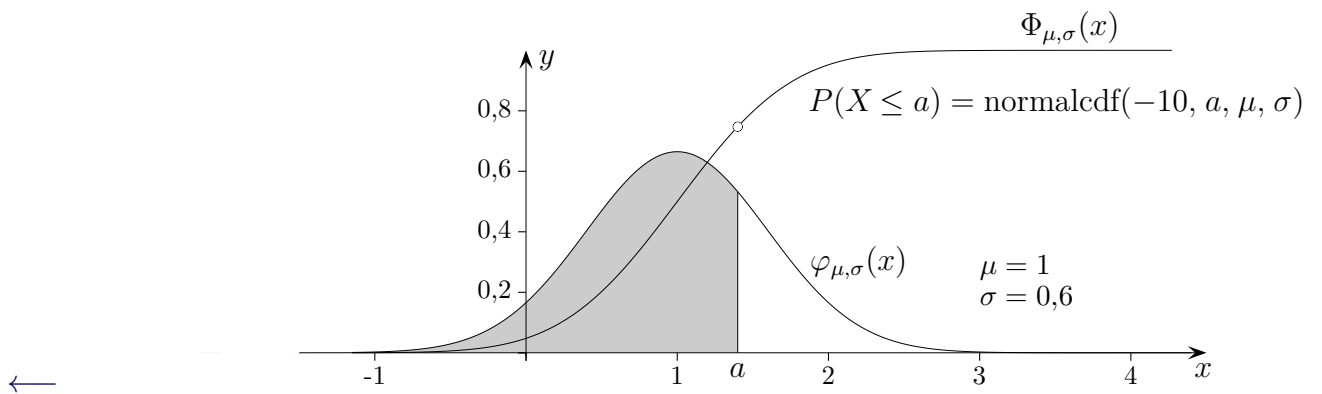
$$\Phi(z) = ?$$

GTR

$$P(X \leq a) = \text{normalcdf}(-10, a, \mu, \sigma)$$

GTR

$$P(a \leq X \leq b) = ?$$



Gaussische Glockenkurve

$$\varphi(x) = ?$$

Dichtefunktion der Standardnormalverteilung

Verteilungsfunktion

$$\Phi(z) = ?$$

GTR

$$P(X \leq a) = ?$$

GTR

$$P(a \leq X \leq b) = \text{normalcdf}(a, b, \mu, \sigma)$$

←

Zusammenhang von $\Phi_{\mu,\sigma}$ und Φ

$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

GTR

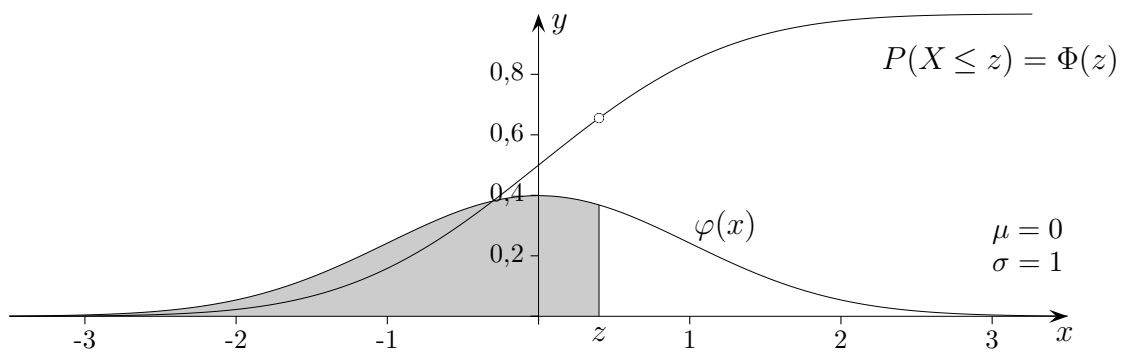
$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = ?$$

GTR

$$\Phi^{-1}(\alpha) = ?$$

GTR

$$\Phi_{\mu,\sigma}^{-1}(\alpha) = ?$$



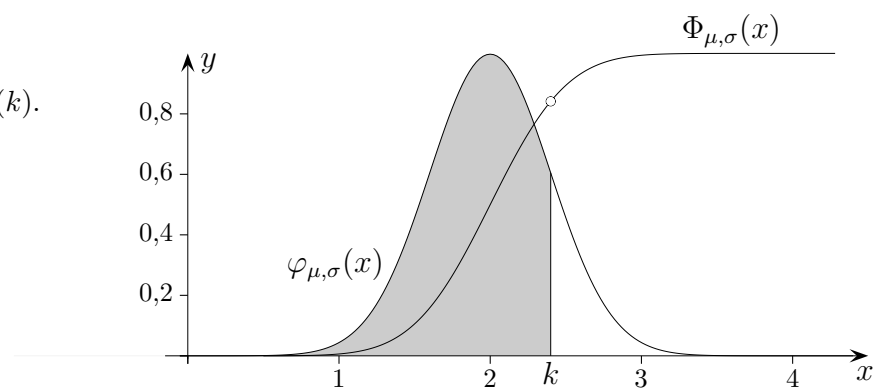
Aus $k = \mu + z\sigma$ folgt

$$z = \frac{k - \mu}{\sigma}.$$

Der Inhalt der Fläche unter $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ bis zur rechten Grenze k ist daher

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &= \Phi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi_{\mu,\sigma}(k). \end{aligned}$$

←



Zusammenhang von $\Phi_{\mu,\sigma}$ und Φ

$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = ?$$

GTR

$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \text{normalcdf}(-E99, x, \mu, \sigma)$$

E mit 2nd EE

GTR

$$\Phi^{-1}(\alpha) = ?$$

GTR

$$\Phi_{\mu,\sigma}^{-1}(\alpha) = ?$$

←

Zusammenhang von $\Phi_{\mu,\sigma}$ und Φ

$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = ?$$

GTR

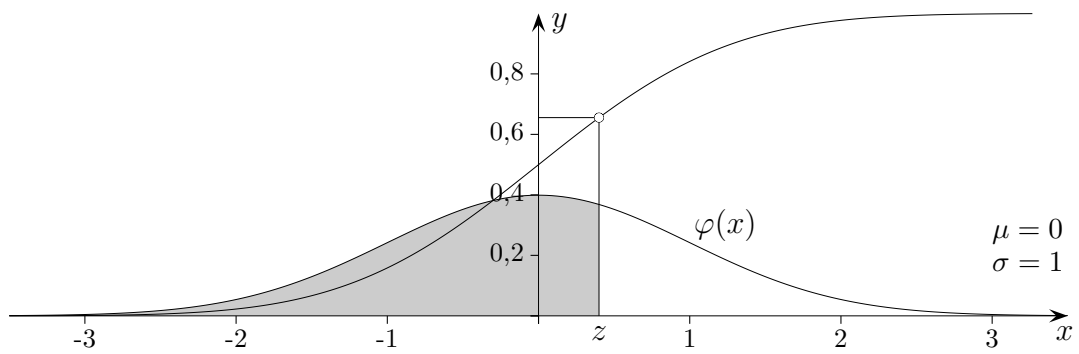
$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = ?$$

GTR

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \text{invNorm}(\alpha)$$

GTR

$$\Phi_{\mu,\sigma}^{-1}(\alpha) = ?$$



$$P(X \leq z) = \alpha \implies z = \text{invNorm}(\alpha)$$

←

Zusammenhang von $\Phi_{\mu,\sigma}$ und Φ

$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = ?$$

GTR

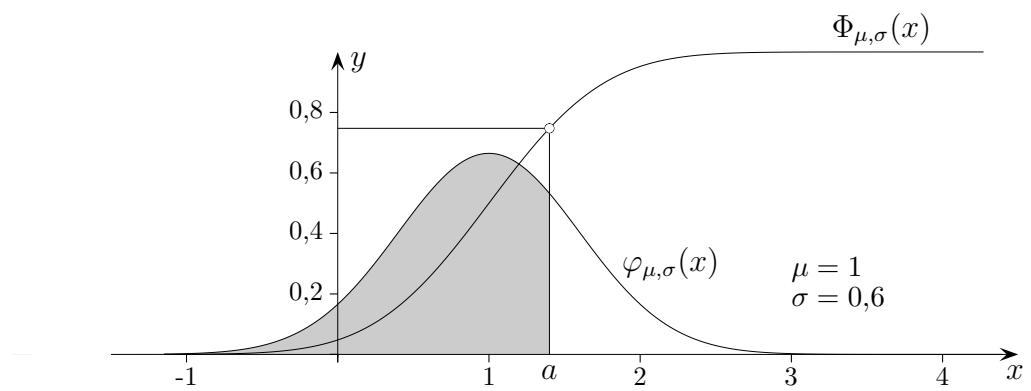
$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = ?$$

GTR

$$\Phi^{-1}(\alpha) = ?$$

GTR

$$\Phi_{\mu,\sigma}^{-1}(\alpha) = \text{invNorm}(\alpha, \mu, \sigma)$$



$$P(X \leq a) = \alpha \implies a = \text{invNorm}(\alpha, \mu, \sigma)$$

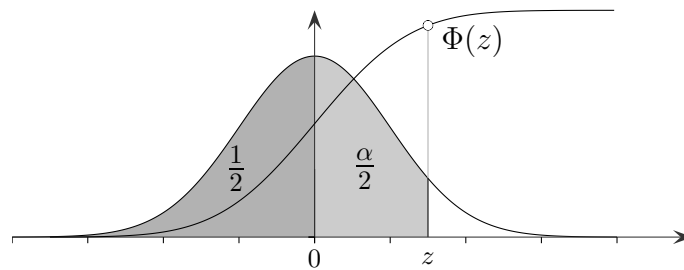
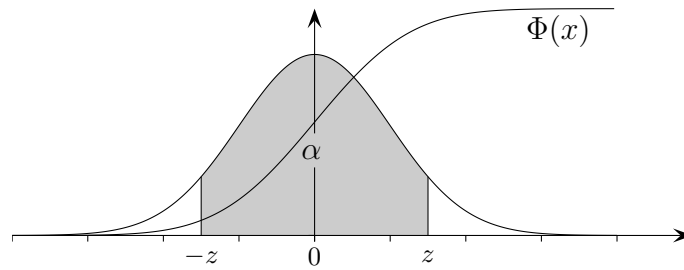
←

$$P([\mu - z\sigma \mid \mu + z\sigma]) = \alpha$$

$$z = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$

$z\sigma$ -Umgebung

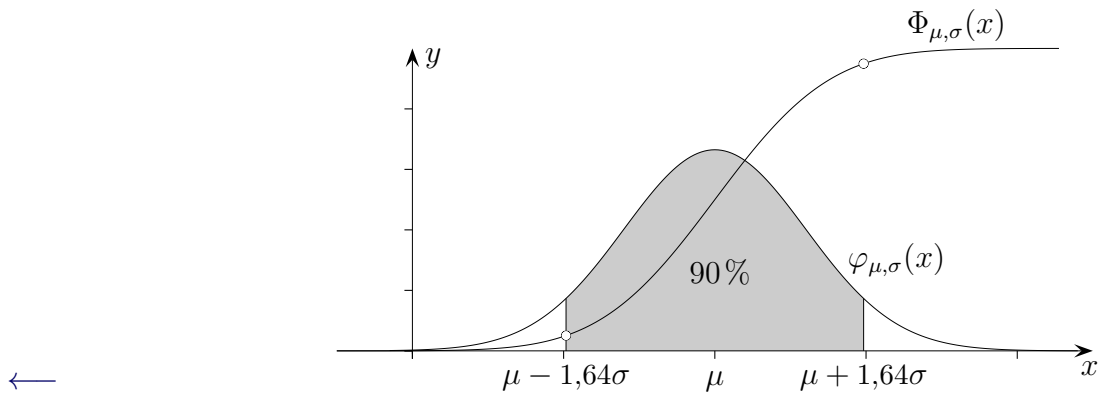
Prognoseintervall für absolute Häufigkeiten



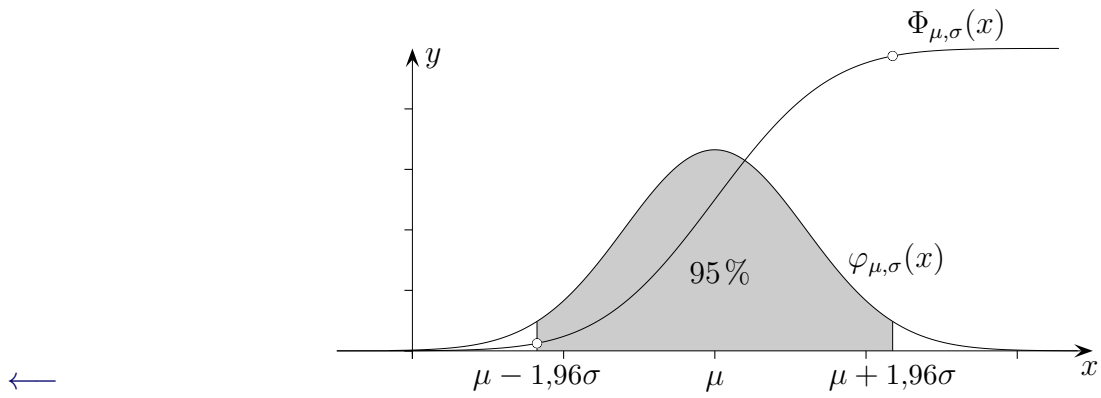
$$\Phi(z) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad z = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$

←

α	z
0,90	1,64
0,95	
0,954	
0,997	



α	z
0,90	?
0,95	1,96
0,954	
0,997	



α	z
0,90	?
0,95	
0,954	2
0,997	

←

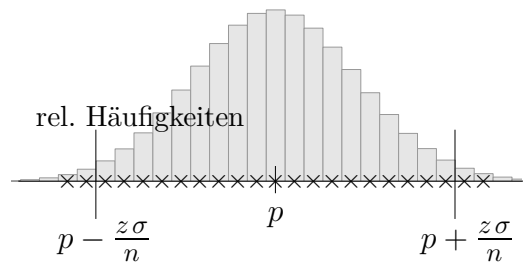
α	z
0,90	?
0,95	
0,954	
0,99	2,58
0,997	



α	z
0,90	?
0,95	
0,954	
0,997	3



$z\sigma$ -Umgebung
für relative Häufigkeiten h



←

$$z = \Phi^{-1}\left(\frac{1 + \alpha}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \mu - z\sigma &\leq k \leq \mu + z\sigma && \text{beachte: } \mu = np, h = \frac{k}{n} \\ \Leftrightarrow p - z\frac{\sigma}{n} &\leq h \leq p + z\frac{\sigma}{n} \end{aligned}$$

Mit dem GRT-Befehl 1-PropZInt im STAT-Tests-Menü kann auch ein Prognoseintervall für rel. Häufigkeiten ermittelt werden.
Mit dem bekannten p ist hier lediglich $k = p \cdot n$ zu wählen.

$n = 500, p = 0,5, \alpha = 98\%$
Prognoseintervall ($k = 250$)
[0,448; 0,552]

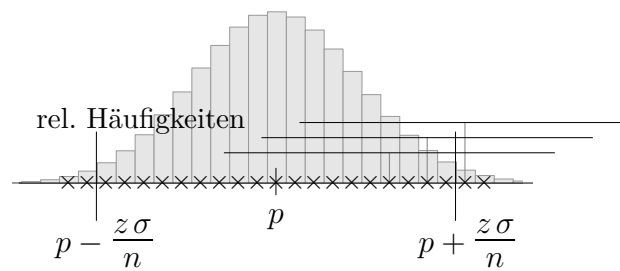
Wald-Vertrauensintervall $\left[h - \frac{z\sigma}{n} \mid h + \frac{z\sigma}{n} \right]$

In $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ wird für p die rel. Häufigkeit $h = \frac{k}{n}$ eingesetzt.

GTR

Wilson-Vertrauensintervall

Prognose- und Wilson-Vertrauensintervall



←

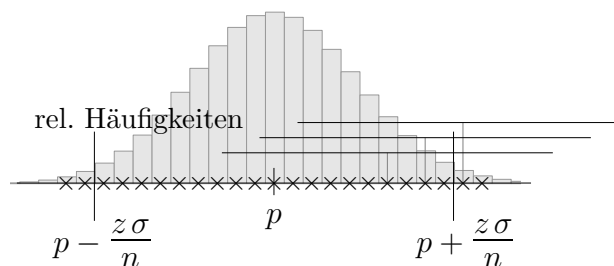
Wald-Vertrauensintervall

GTR

1-PropZInt, STAT-Tests-Menü

Wilson-Vertrauensintervall

Prognose- und Wilson-Vertrauensintervall



←

Wald-Konfidenzintervall, Sicherheitswahrscheinlichkeit $\alpha = 95\%$

a) $n = 300$, $k = 50$ [0,124; 0,209]

b) $n = 900$, $k = 150$ [0,142; 0,191]

one-proportion z-intervall, z-Intervall für einen Anteil

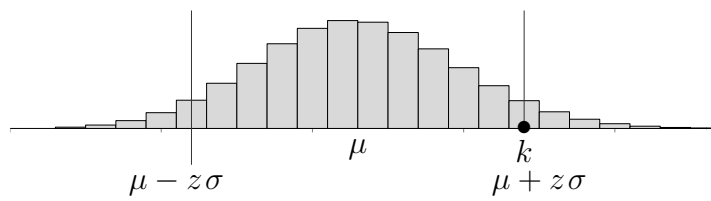
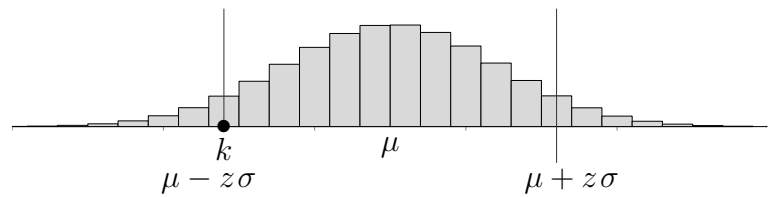
Wald-Vertrauensintervall

GTR

Wilson-Vertrauensintervall $[p_{\min}, p_{\max}]$

Prognose- und Wilson-Vertrauensintervall

Das Konfidenzintervall (Vertrauensintervall) zum Stichprobenergebnis $X = k$ enthält alle Wahrscheinlichkeiten p , deren $z\sigma$ -Umgebung das k enthält (Sicherheitswahrscheinlichkeit α).



p_{\max}, p_{\min} sind die Lösungen der Gleichungen $k = \mu \pm z\sigma$.

Nach der Wurzel umgestellt entsteht durchs Quadrieren eine quadratische Gleichung.

Formulierung mit der relativen Häufigkeit h :

Wilson-Vertrauensintervall: Die Grenzen erhält man bei der Sicherheitswahrscheinlichkeit α als Lösungen der Gleichung $|h - p| \leq z \frac{\sigma}{n}$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

←

$$z = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$

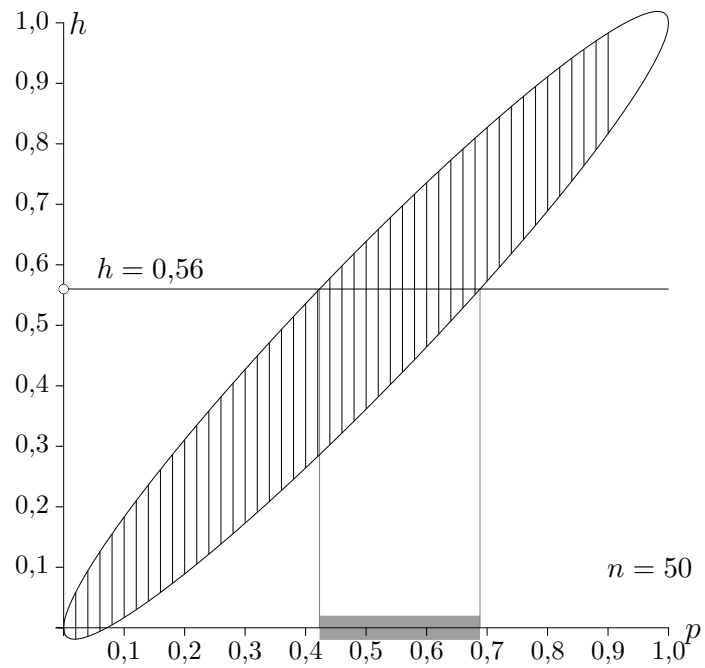
Wilson-Konfidenzintervall, Sicherheitswahrscheinlichkeit $\alpha = 95\%$

a) $n = 300, k = 50$ $[0,129; 0,213]$

b) $n = 900, k = 150$ $[0,144; 0,192]$

GTR: Nullstellen von $f_{1/2}(p) = k - np \pm z\sqrt{np(1-p)}$

Prognose- und Vertrauensintervall



Ein 95%-Vertrauensintervall (Wilson) besteht aus allen p -Werten, in deren 95%-Prognoseintervall für rel. Häufigkeiten h liegt.

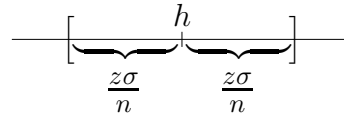
Die Grenzen können durch Lösen der beiden Gleichungen

$$h = p \pm 1,96 \frac{\sigma}{n}$$

ermittelt werden.

←

Zusammenhang von Stichprobenumfang und Vertrauensintervalllänge



$$\begin{aligned}\frac{z\sigma}{n} &= \frac{z \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q}}{n}, & p = h & \quad \text{rel. Häufigkeit} \\ &= \frac{z \cdot \sqrt{p \cdot q}}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

$$\frac{z\sigma}{4n} = \frac{z \cdot \sqrt{p \cdot q}}{\sqrt{4n}} = \frac{z \cdot \sqrt{p \cdot q}}{2\sqrt{n}}$$

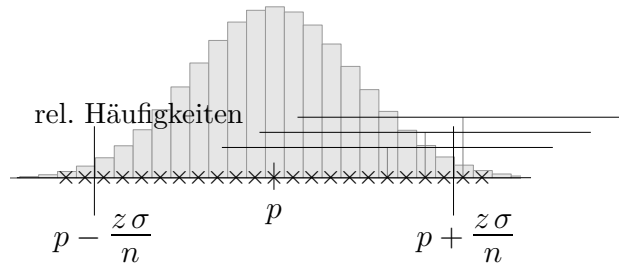
$$\frac{z\sigma}{2n} = \frac{z \cdot \sqrt{p \cdot q}}{\sqrt{2n}} = \frac{z \cdot \sqrt{p \cdot q}}{\sqrt{2} \sqrt{n}}$$

Wird die Stichprobenlänge n vervierfacht, so halbiert sich die Länge des Wald-Vertrauensintervalls. Wird n verdoppelt, so verringert sich die Länge des Vertrauensintervalls mit dem Faktor $1/\sqrt{2}$ (\sqrt{n} -Gesetz).

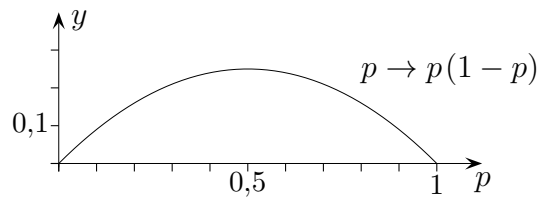
←

Notwendiger Stichprobenumfang $2 \cdot \frac{z\sigma}{n} \leq d$ Hierbei ist das minimale n zu bestimmen.

Welcher Stichprobenumfang n ist bei vorgegebener Länge d des Konfidenzintervalls erforderlich, um eine unbekannte Wahrscheinlichkeit p zu ermitteln?



Falls eine Näherung für p bekannt ist, kann sie verwendet (eingesetzt) werden, ansonsten ist vom ungünstigsten Fall $p = \frac{1}{2}$ mit $p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$ auszugehen.



←

Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Laplace-Bedingung Falls die Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, liefert die Näherung durch die Normalverteilung ausreichend genaue Intervallwahrscheinlichkeiten.

Stetigkeitskorrektur X binomialverteilt $P(a \leq X \leq b) \approx$

←

Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Laplace-Bedingung

Stetigkeitskorrektur

$$X \text{ binomialverteilt} \quad P(a \leq X \leq b) \approx P(a - 0,5 \leq X \leq b + 0,5)$$

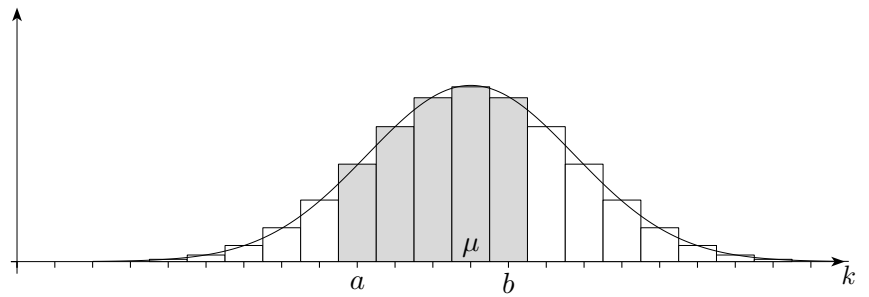
X normalverteilt

X nimmt Werte aus \mathbb{N}_0 an.

X ist stetig verteilt.

Die Stetigkeitskorrektur führt zu einem genaueren Ergebnis.

←



$A, B, C \subset \Omega$, für Wahrscheinlichkeiten gilt:

a) $0 \leq P(A) \leq 1$

b) $P(\overline{A}) = ?$

c) $A \subset B \implies ?$

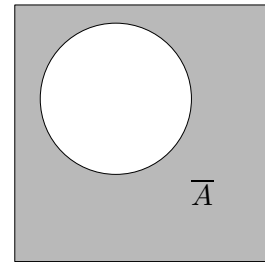
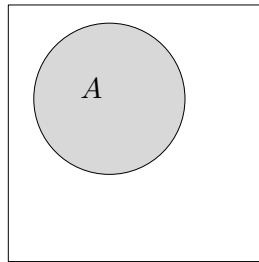
d) $P(A \cup B) = ?$

e) $P(A \cup B \cup C) = ?$

←

$A, B, C \subset \Omega$, für Wahrscheinlichkeiten gilt:

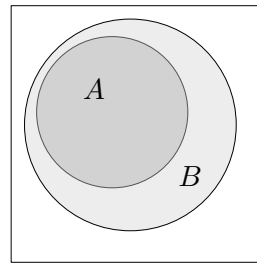
- a) $? \leq P(A) \leq ?$
- b) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- c) $A \subset B \implies ?$
- d) $P(A \cup B) = ?$
- e) $P(A \cup B \cup C) = ?$



$A, B, C \subset \Omega$, für Wahrscheinlichkeiten gilt:

- a) $? \leq P(A) \leq ?$
- b) $P(\overline{A}) = ?$
- c) $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$
- d) $P(A \cup B) = ?$
- e) $P(A \cup B \cup C) = ?$

←

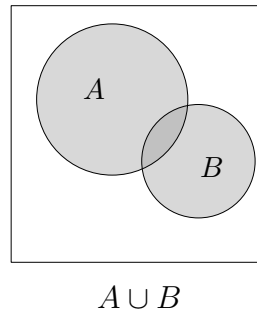


$A \subset B$

$A, B, C \subset \Omega$, für Wahrscheinlichkeiten gilt:

- a) $? \leq P(A) \leq ?$
- b) $P(\overline{A}) = ?$
- c) $A \subset B \implies ?$
- d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- e) $P(A \cup B \cup C) = ?$

←



Gegeben: $P(E_1) = 0,4$; $P(E_2) = 0,7$; $P(E_1 \cap E_2) = 0,3$

Berechne: a) $P(\overline{E_1})$ b) $P(E_1 \cup E_2)$ c) $P(E_1 \cap \overline{E_2})$ d) $P(E_1 \cup \overline{E_2})$

Ergebnisse: a) 0,6 b) 0,8 c) 0,1 d) 0,6

$A, B, C \subset \Omega$, für Wahrscheinlichkeiten gilt:

a) $? \leq P(A) \leq ?$

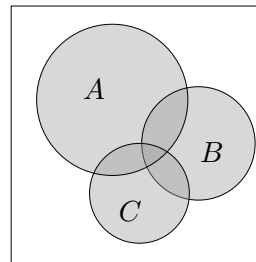
b) $P(\overline{A}) = ?$

c) $A \subset B \implies ?$

d) $P(A \cup B) = ?$

e) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$
 $- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$
 $+ P(A \cap B \cap C)$

←



$A \cup B \cup C$

grafische Lösung

tabellarische Lösung

minimales k mit $P_{0,05}^{80}(X \geq k) \leq 5\%$

$$Y_1 = 1 - \text{binomcdf}(80, 0.05, X-1)$$

X	Y1
7	.105
8	.047

←

$$k = 8$$

minimales n mit $P_{0,8}^n(X \geq 3) \geq 95\%$

$$Y_1 = 1 - \text{binomcdf}(X, 0.8, 2)$$

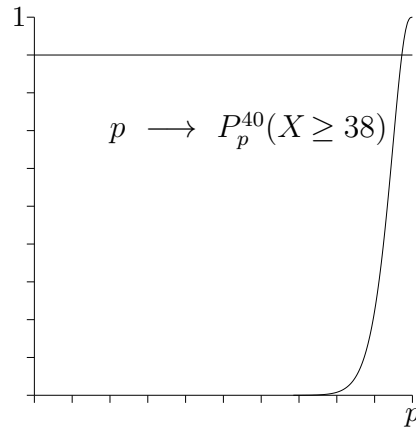
X	Y1
5	.942
6	.983

$$\text{mindestens } n = 6$$

grafische Lösung

tabellarische Lösung

minimales p mit $P_p^{40}(X \geq 38) \geq 90\%$



$$Y_1 = 1 - \text{binomcdf}(40, X, 37)$$

←

mindestens $p = 97,2\%$

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!}$$

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$$

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!}$$

10 nCr 4 210

$$\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$$

←

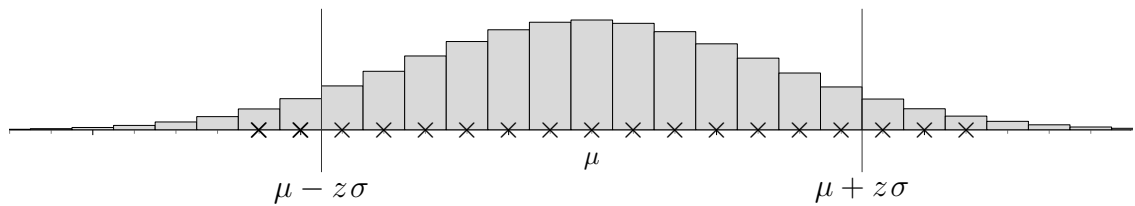
$$P([\mu - z\sigma | \mu + z\sigma]) = \alpha$$

$$z = ?$$

$z\sigma$ -Umgebung

Prognoseintervall für absolute Häufigkeiten

←



Mit dem GRT-Befehl 1-PropZInt im STAT-Tests-Menü kann auch ein Prognoseintervall ermittelt werden. Mit dem bekannten p ist hier lediglich $k = p \cdot n$ zu wählen. Die mit dem GTR ermittelten Intervallgrenzen sind für das Prognoseintervall für absolute Häufigkeiten noch mit n zu multiplizieren.

$$n = 500, p = 0,5, \alpha = 98\%$$

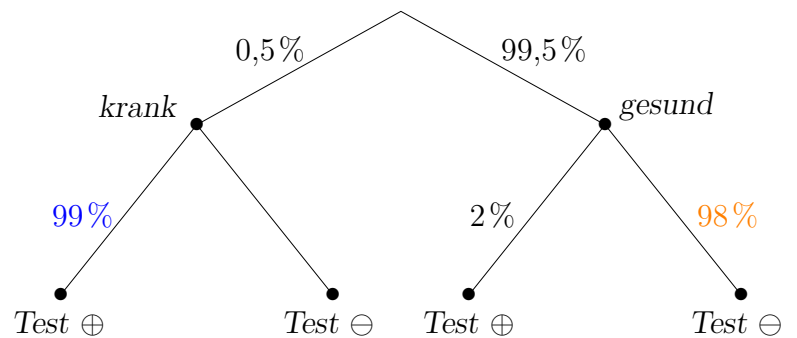
Prognoseintervall ($k = 250$)

[0,448; 0,552] relative Häufigkeiten

[224; 276] absolute Häufigkeiten

medizinischer Test (Bayes)
Wiederholung

Eine Krankheit komme bei etwa 0,5% der Bevölkerung vor.
Ein Test zur Auffindung der Krankheit führt bei 99% der Kranken zu einer Reaktion (**Sensitivität** des Tests), bei 98% der Gesunden zu keiner Reaktion (**Spezifität**).
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, bei der die Reaktion eintritt, die Krankheit tatsächlich hat?



Mit dem Pfaddiagramm ergibt sich:

$$P(\text{krank} \mid \oplus) = \frac{0,5\% \cdot 99\%}{0,5\% \cdot 99\% + 99,5\% \cdot 2\%} = 19,9\%$$

←

medizinischer Test (Bayes)
Wiederholung

Mit dem Pfaddiagramm ergibt sich:

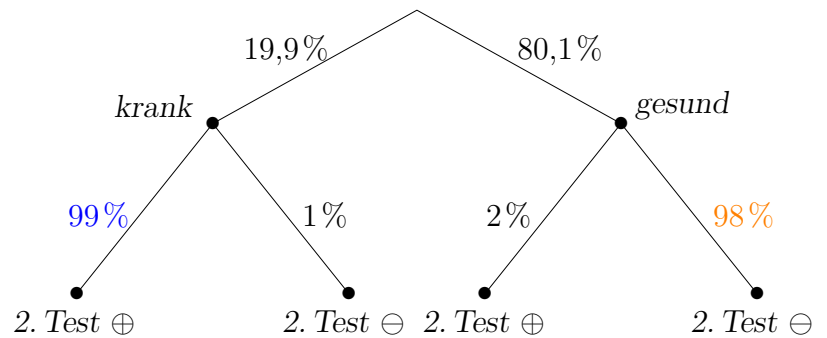
$$P(\text{krank} \mid \oplus) = \frac{0,5\% \cdot 99\%}{0,5\% \cdot 99\% + 99,5\% \cdot 2\%} = 19,9\%$$

Der Test wird wiederholt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person, bei der die Reaktion

- a) erneut
- b) nur beim 1. Test

eintritt, in Wirklichkeit krank ist?



$$\text{a) } P(\text{krank} \mid \text{auch 2. Test } \oplus) = \frac{19,9\% \cdot 99\%}{19,9\% \cdot 99\% + 80,1\% \cdot 2\%} = 92,5\%$$

$$\text{b) } P(\text{krank} \mid \text{nur im 1. Test } \oplus) = \frac{19,9\% \cdot 1\%}{19,9\% \cdot 1\% + 80,1\% \cdot 98\%} = 0,3\%$$

←

Normalverteilung Φ -Schreibweise für Ansätze

$$P(X \leq k) = \Phi_{\mu, \sigma}(k), \quad P(X \leq k) = \Phi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right) \quad [\text{normalcdf}(-E99, k, \mu, \sigma)] \quad \text{E mit 2nd EE}$$

$$P(X \leq z) = ? , \quad \text{falls } \mu = 0 \text{ und } \sigma = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = ?$$

$$k = ?$$

Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k
(das α -Quantil) gesucht, $\mu = 0$, $\sigma = 1$

$$k = ?$$

μ, σ gegeben, α -Quantil gesucht

←

Normalverteilung Φ -Schreibweise für Ansätze

$$P(X \leq k) = ?$$

$$P(X \leq z) = \Phi(z), \quad \text{falls } \mu = 0 \text{ und } \sigma = 1 \quad [\text{normalcdf}(-10, z)]$$

$$P(a \leq X \leq b) = ?$$

$$k = ?$$

Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k
(das α -Quantil) gesucht, $\mu = 0$, $\sigma = 1$

$$k = ?$$

μ , σ gegeben, α -Quantil gesucht

←

Normalverteilung Φ -Schreibweise für Ansätze

$$P(X \leq k) = ?$$

$$P(X \leq z) = ? , \quad \text{falls } \mu = 0 \text{ und } \sigma = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi_{\mu, \sigma}(b) - \Phi_{\mu, \sigma}(a) \quad [\text{normalcdf}(a, b, \mu, \sigma)]$$

$$k = ?$$

Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k
(das α -Quantil) gesucht, $\mu = 0$, $\sigma = 1$

$$k = ?$$

μ , σ gegeben, α -Quantil gesucht

←

Normalverteilung Φ -Schreibweise für Ansätze

$$P(X \leq k) = ?$$

$$P(X \leq z) = ? , \quad \text{falls } \mu = 0 \text{ und } \sigma = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = ?$$

$$k = \Phi^{-1}(\alpha) \quad [k = \text{invNorm}(\alpha)]$$

Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k
(das α -Quantil) ermittelt, $\mu = 0$, $\sigma = 1$

$$k = ?$$

μ , σ gegeben, α -Quantil gesucht

←

Normalverteilung Φ -Schreibweise für Ansätze

$$P(X \leq k) = ?$$

$$P(X \leq z) = ? , \quad \text{falls } \mu = 0 \text{ und } \sigma = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = ?$$

$$k = ?$$

Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k
(das α -Quantil) gesucht, $\mu = 0$, $\sigma = 1$

$$k = \Phi_{\mu, \sigma}^{-1}(\alpha) \quad [k = \text{invNorm}(\alpha, \mu, \sigma)] \quad \mu, \sigma \text{ gegeben, } \alpha\text{-Quantil gesucht}$$

←

Normalverteilung \int -Schreibweise für Ansätze

$$P(X \leq k) = \int_{-\infty}^k \varphi_{\mu, \sigma}(x) dx \quad [\text{normalcdf}(-E99, k, \mu, \sigma)] \quad \text{E mit 2nd EE}$$

$$P(X \leq z) = ? , \quad \text{falls } \mu = 0 \text{ und } \sigma = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = ?$$

$$\int \dots$$

Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k
(das α -Quantil) gesucht.

$$\int \dots$$

Zu gegebenem α ist μ (σ , eine Grenze a oder b)
gesucht.

←

Normalverteilung \int -Schreibweise für Ansätze

$$P(X \leq k) = ?$$

$$P(X \leq z) = \int_{-\infty}^z \varphi(x) dx, \quad \text{falls } \mu = 0 \text{ und } \sigma = 1 \quad [\text{normalcdf}(-10, z)]$$

$$P(a \leq X \leq b) = ?$$

$$\int \dots$$

Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k
(das α -Quantil) gesucht.

$$\int \dots$$

Zu gegebenem α ist μ (σ , eine Grenze a oder b)
gesucht.

←

Normalverteilung \int -Schreibweise für Ansätze

$$P(X \leq k) = ?$$

$$P(X \leq z) = ? , \quad \text{falls } \mu = 0 \text{ und } \sigma = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi_{\mu, \sigma}(x) dx \quad [\text{normalcdf}(a, b, \mu, \sigma)]$$

$$\int \dots$$

Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k
(das α -Quantil) gesucht.

$$\int \dots$$

Zu gegebenem α ist μ (σ , eine Grenze a oder b)
gesucht.

←

Normalverteilung \int -Schreibweise für Ansätze

$$P(X \leq k) = ?$$

$$P(X \leq z) = ? , \quad \text{falls } \mu = 0 \text{ und } \sigma = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = ?$$

$$\int_{-\infty}^k \varphi_{\mu, \sigma}(x) dx = \alpha \quad [k = \text{invNorm}(\alpha, \mu, \sigma)] \quad \text{Zu gegebenem } \alpha \text{ wird die rechte Grenze } k \text{ (das } \alpha\text{-Quantil) gesucht.}$$

$$\int \dots \quad \text{Zu gegebenem } \alpha \text{ ist } \mu \text{ (} \sigma, \text{ eine Grenze } a \text{ oder } b \text{) gesucht.}$$

←

Normalverteilung \int -Schreibweise für Ansätze

$$P(X \leq k) = ?$$

$$P(X \leq z) = ? , \quad \text{falls } \mu = 0 \text{ und } \sigma = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = ?$$

$$\int \dots$$

Zu gegebenem α wird die rechte Grenze k
(das α -Quantil) gesucht.

$$\int_a^b \varphi_{\mu, \sigma}(x) dx = \alpha$$

$$[\alpha = \text{normalcdf}(a, b, \mu, \sigma)]$$

Zu gegebenem α ist μ (σ , eine Grenze a
oder b) gesucht.

←

