Schätzung des Erwartungswerts

Um den unbekannten Erwartungswert einer Zufallsvariablen zu schätzen, führen wir das zugehörige Zufallsexperiment n-mal durch und bilden den Mittelwert $\overline{X}$ der Stichprobenwerte. Es soll gezeigt werden, dass gilt:

$$E(\overline{X}) = E(X) \qquad \text{und}$$

$$V(\overline{X}) = \frac{1}{n}\,V(X)\,, \qquad \text{d.h.} \quad \sigma_{\overline{X}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\sigma_X$$

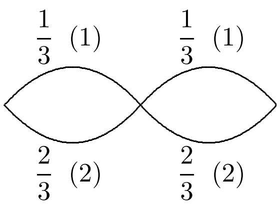
Die mittlere Abweichung von $\overline{X}$ zum Erwartungswert ist also nur $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -mal so groß wie die Standardabweichung von X. Dies kennzeichnet die Güte der Schätzung.

Die Zufallsvariable X mit der Verteilung:

k	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

hat den Erwartungswert $E(X) = \frac{5}{3}$ und die Varianz $V(X) = \frac{2}{9}$.

Für die zweimalige unabhängige Durchführung des Zufallsexperiments ermitteln wir $E(\overline{X})$ und $V(\overline{X})$



Pfade	(1 | 1)	(1 | 2)	(2 | 1)	(2 | 2)
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$
$\overline{X} = \frac{X_1+X_2}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

und erhalten das Erwartete: $E(\overline{X}) = \frac{5}{3}$, $V(\overline{X}) = \frac{1}{9}$.

X_1, X_2 sind hierbei unabhängige (d. h. nur von der Stelle abhängige) Zufallsvariable, definiert auf der Menge aller Wertepaare. X_1, X_2 haben dieselbe Verteilung wie X.
Insbesondere ist $E(X_1) = E(X_2) = E(X)$.

Begründungen für $n = 2$ (für beliebige n entsprechend):

$$E(\overline{X}) = E(\frac{X_1+X_2}{2}) = \frac{E(X_1)+E(X_2)}{2} = \frac{E(X)+E(X)}{2} = E(X)$$

Leicht zu zeigen ist: $V(a\,Y) = a^2\,V(Y)$

$$V(\overline{X}) = V(\frac{X_1+X_2}{2}) = \frac{V(X_1)+V(X_2)}{4} = \frac{V(X)+V(X)}{4} = \frac{V(X)}{2}$$

Es fehlt noch der Nachweis von:

$$V(X_1+X_2) = V(X_1)+V(X_2)$$

Schätzung des Erwartungswerts, Fortsetzung

Wir verwenden (siehe Varianz der Binomialverteilung): $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$.

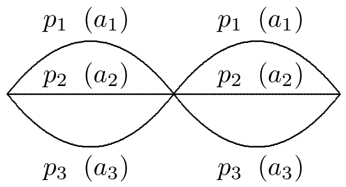
$$
\begin{aligned}
V(X_1 + X_2) &= E((X_1 + X_2)^2) \;-\; (E(X_1 + X_2))^2 \\
&= E(X_1^2) + 2\,E(X_1 \cdot X_2) + E(X_2^2) \;-\; (2\,E(X))^2 \\
&= \underbrace{E(X^2)) - (E(X))^2}_{V(X_1)} \;+\; \underbrace{E(X^2)) - (E(X))^2}_{V(X_2)}, \qquad \text{weil} \quad 2\,E(X_1 \cdot X_2) - 2\,(E(X))^2 = 0
\end{aligned}
$$

Zum Schluss fehlt noch die Begründung der verwendeten (allgemein für unabhängige Zufallsvariablen gültigen) Beziehung:

$$E(X_1 \cdot X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2)$$

Sei hierzu die Verteilung von X gegeben durch

k	a_1	a_2	a_3
$P(X = k)$	p_1	p_2	p_3



X_1, X_2 haben wieder die gewohnte Bedeutung.

Mit $E(X) = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
E(X_1) \cdot E(X_2) &= (a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3) \cdot (a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3) \\
&= \textit{Klammern auflösen} \\
E(X_1 \cdot X_2) &= \textit{Hier stehen dieselben Summanden.}
\end{aligned}
$$

$X_1 \cdot X_2$ nimmt z. B. das Produkt a_1a_3 mit der Wahrscheinlichkeit p_1p_3 an.

Nun ist zu erkennen, woher die Übereinstimmung rührt.

Schätzung der Varianz

Die Varianz ist der Erwartungswert der Zufallsvariablen $(X - \mu)^2$, wobei $E(X) = \mu$ ist.
Es liegt daher nahe, die Varianz mit dem Mittelwert

$$S^\star = \frac{1}{n}\left[(X_1-\mu)^2 + \ ... \ + (X_n-\mu)^2\right]$$

zu schätzen.
Jedoch ist im Allgemeinen der Erwartungswert μ nicht bekannt. Daher wird μ durch $\overline{X}$ ersetzt.
Wir vermuten für

$$S^{\star\star} = \frac{1}{n}\left[(X_1-\overline{X})^2 + \ ... \ + (X_n-\overline{X})^2\right]$$

$E(S^{\star\star}) = V(X)$.

Für das Beispiel am Anfang ist $E(S^{\star\star}) = \frac{1}{9}$, jedoch $V(X) = \frac{2}{9}$.
Formulierung: Die Schätzgröße $S^{\star\star}$ ist nicht erwartungstreu.
Nun ist es erfreulicherweise möglich $S^{\star\star}$ geringfügig abzuändern, damit ihr Erwartungswert $V(X)$ ist.
Um die Änderung zu erkennen, muss $E(S^{\star\star})$ allgemein ausgerechnet werden. Das ist etwas aufwändig.

$$\begin{aligned}
S^{\star\star} &= \frac{1}{n}\left[(X_1-\overline{X})^2 + \ ... \ + (X_n-\overline{X})^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[(X_1^2 - 2X_1\overline{X} + \overline{X}^{\,2}) + \ ... \ + (X_n^2 - 2X_n\overline{X} + \overline{X}^{\,2})\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[X_1^2 + \ ... \ + X_n^2 - 2\underbrace{(X_1 + \ ... \ + X_n)}_{n\cdot\overline{X}}\cdot\overline{X} \ + \ n\cdot\overline{X}^{\,2}\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[X_1^2 + \ ... \ + X_n^2 \ - \ n\cdot\overline{X}^{\,2}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(S^{\star\star}) &= \sigma^2 + \mu^2 \ - \ E(\overline{X}^{\,2}) \qquad \textit{beachte:} \ \ \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \quad \Longrightarrow \quad E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 \\
&= \sigma^2 + \mu^2 \ - \ \frac{1}{n^2}\, E\left(X_1^2 + \ ... \ + X_n^2 \ + \ \underbrace{2X_1X_2 + \ ... \ + 2X_{n-1}X_n}_{\binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2} \ \ \textit{Summanden}}\right) \\
&= \sigma^2 + \mu^2 \ - \ \frac{1}{n^2}\left[n\cdot(\sigma^2+\mu^2) \ + \ \frac{n\,(n-1)}{2} \ \cdot 2\mu^2\right] \qquad \textit{beachte:} \ \ E(X_iX_k) = \mu^2 \quad (i \neq k) \\
&= \frac{n-1}{n}\,(\sigma^2+\mu^2) \ - \ \frac{n-1}{n}\mu^2 \\
&= \frac{n-1}{n}\,\sigma^2
\end{aligned}$$

Der aufgedeckte Mangel lässt sich für $n > 1$ leicht beheben. Für große n kann er vernachlässigt werden.
Wir multiplizieren $S^{\star\star}$ mit $\frac{n}{n-1}$ und erhalten für die Varianz die erwartungstreue Schätzgröße:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[(X_1-\overline{X})^2 + \ ... \ + (X_n-\overline{X})^2\right] \quad \textit{mit}$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\,(X_1 + \ ... \ + X_n)$$