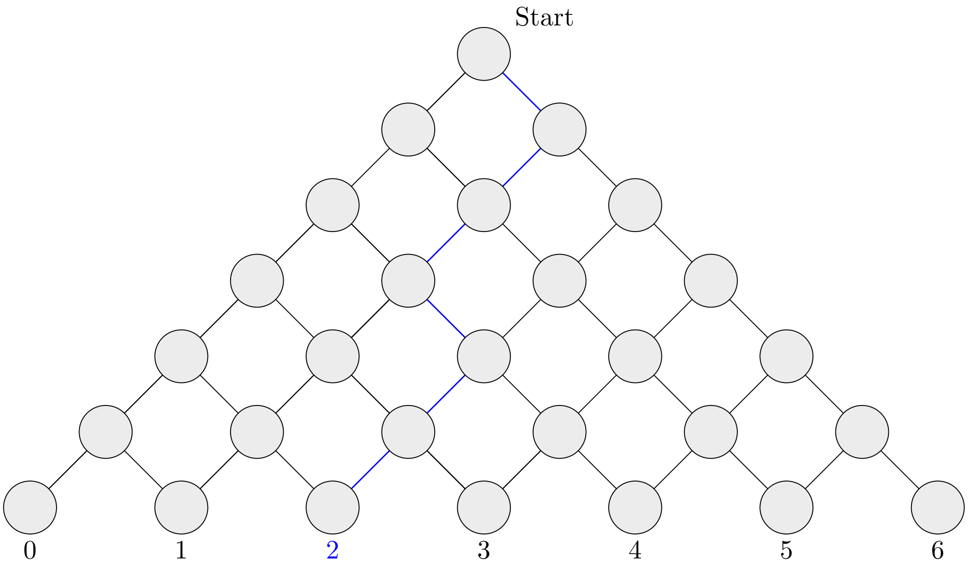
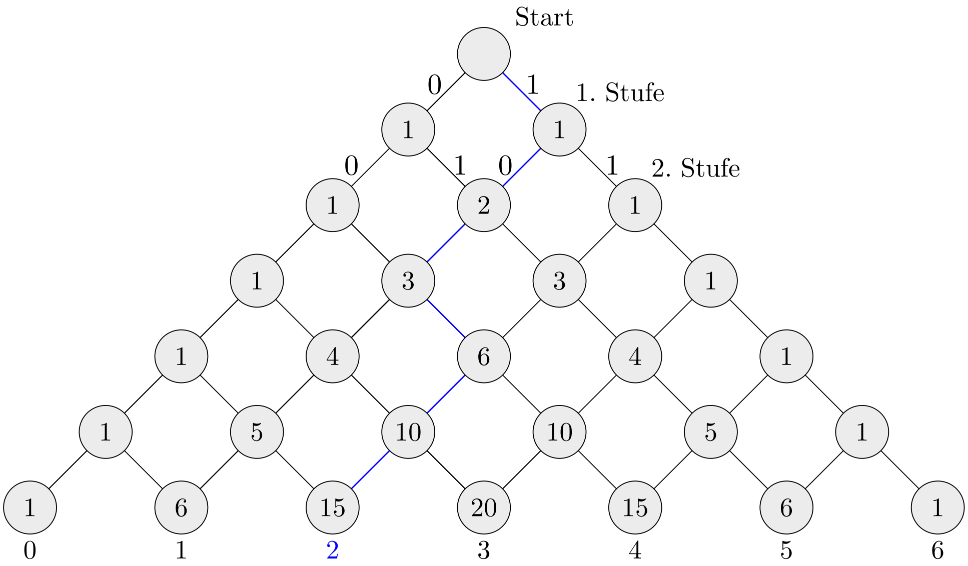
# Pascalsches Dreieck




Wieviele Pfade, aus jeweils 6 Teilstrecken bestehend, gibt es vom Start bis zum Endknoten 2?
Die Pfade sind unterschiedlich, wenn sie in einer Teilstrecke verschieden sind.
Wieviele Pfade gibt es insgesamt vom Start bis zu den Endknoten?

# Pascalsches Dreieck



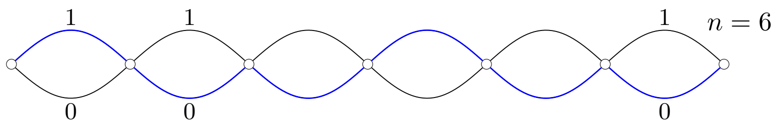

Wieviele Pfade, aus jeweils 6 Teilstrecken bestehend, gibt es vom Start bis zum Endknoten 2?
Die Pfade sind unterschiedlich, wenn sie in einer Teilstrecke verschieden sind.

Beginne beim Start.
Um die Knoten der 1. Stufe zu erreichen, gibt es jeweils nur eine Möglichkeit.
Um die Knoten der 2. Stufe zu erreichen, gibt es jeweils die Summe der unmittelbar darüberliegenden Möglichkeiten, usw.

Wieviele Pfade gibt es insgesamt vom Start bis zu den Endknoten?

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$$

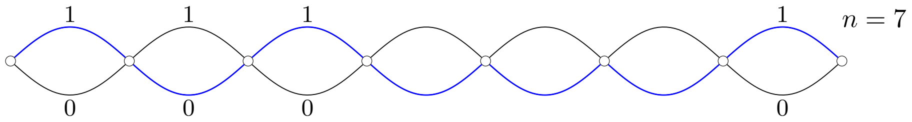
Von jedem Knoten gehen 2 Teilstrecken aus, von den Endknoten abgesehen, $0 \,\widehat{=}\,$ links, $1 \,\widehat{=}\,$ rechts.
Das folgende vereinfachte Pfaddiagramm enthält auch alle Pfade. Deren Anzahl $2^6$ ist hier unmittelbar zu sehen. Den Wegen entsprechen alle 0/1-Folgen der Länge 6, z. B.
(1, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 0, 1) oder (0, 1, 0, 1, 0, 0).




Wir interessieren uns für die Anzahl $\binom{6}{2}$ der Pfade mit genau 2 Einsen (Treffern, „6 über 2“, Schreib- und Sprechweise seit Euler). Es muss $\binom{6}{2} = 15$ sein. Das ist die Anzahl der Pfade im Pascalschen Dreieck zum Endknoten 2. Pfade mit genau 3 Einsen führen zum Endknoten 3, somit gilt $\binom{6}{3} = 20$.

# Anzahl der Pfade $\binom{n}{k}$

Länge $n$ des vereinfachten Pfaddiagramms, Anzahl $k$ der Einsen (Treffer)




$\binom{7}{3} = ?$

$(1, 0, 1, 0, 0, 0, 1) \xrightarrow{\cdot 3!} (1, 0, \uparrow, 0, 0, 0, \Uparrow) \xrightarrow{\cdot 4!} (1, 0, \uparrow, *, \star, \circ, \Uparrow)$ Anzahl 7!

Anzahl $\binom{7}{3}$ $\qquad \binom{7}{3} \cdot 3! \qquad \binom{7}{3} \cdot 3! \cdot 4! = 7!$

Wir betrachten alle 0/1-Folgen der Länge 7 mit genau 3 Einsen.
Wenn die 3 Einsen unterschiedlich sind $(1, \uparrow, \Uparrow)$, vergrößert sich die Anzahl um den Faktor 3!.
Wenn nun noch alle 4 Nullen unterschiedlich sind $(0, *, \star, \circ)$, vergrößert sich die Anzahl weiter um den Faktor 4!.

Nun kann erkannt werden:

$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!}$ und allgemein

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

GTR
7 nCr 3 MATH | PRB (engl.: n choose r, dt.: n über r)
35

# Pascalsches Dreieck

$$\mathbf{1} = \binom{0}{0}$$

$$\mathbf{1} = \binom{1}{0} \qquad \mathbf{1} = \binom{1}{1}$$

$$\mathbf{1} = \binom{2}{0} \qquad \mathbf{2} = \binom{2}{1} \qquad \mathbf{1} = \binom{2}{2}$$

$$\mathbf{1} = \binom{3}{0} \qquad \mathbf{3} = \binom{3}{1} \qquad \mathbf{3} = \binom{3}{2} \qquad \mathbf{1} = \binom{3}{3}$$

$$\mathbf{1} = \binom{4}{0} \qquad \mathbf{4} = \binom{4}{1} \qquad \mathbf{6} = \binom{4}{2} \qquad \mathbf{4} = \binom{4}{3} \qquad \mathbf{1} = \binom{4}{4}$$

$$\mathbf{1} = \binom{5}{0} \qquad \mathbf{5} = \binom{5}{1} \qquad \mathbf{10} = \binom{5}{2} \qquad \mathbf{10} = \binom{5}{3} \qquad \mathbf{5} = \binom{5}{4} \qquad \mathbf{1} = \binom{5}{5}$$

# Blaise Pascal 1623 - 1662

Mit drei Jahren verstarb seine Mutter. Das kränkliche Kind wurde vom Vater und Privatlehrern unterrichtet. Als 16-Jähriger veröffentlichte er eine beachtete mathematische Abhandlung, als 19-Jähriger konstruierte er eine der ersten mechanischen Rechenmaschinen für Additionen, später auch Subtraktionen. 1646 gelingt ihm der Nachweis des Vakuums.
Er veröffentlicht Arbeiten zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und steht in Kontakt mit dem Chevalier de Méré und Pierre de Fermat. In *Traité du triangle arithmétique* werden die Eigenschaften der Binomialkoeffizienten eingehend behandelt und Beweise mit vollständiger Induktion geführt.

Unter Lähmungserscheinungen an den Beinen und chronischen Schmerzen widmet sich Pascal neben seinen mathematischen Studien wie der Tangentenbestimmung an Kurven (Leibniz wurde davon inspiriert) intensiv philosophischen und theologischen Fragen, zusammengefasst in den *Pensées sur la religion et sur quelques autres sujets*.

„Das Herz hat seine Gründe, die der Verstand nicht kennt.“[1]

„Wir begnügen uns nicht mit dem Leben, das wir aus unserem eigenen Sein haben; wir wollen in der Vorstellung der anderen ein imaginäres Leben führen, und darum strengen wir uns an, in Erscheinung zu treten.“[2]

„Vielfalt, die nicht auf Einheit zurückgeht, ist Wirrwarr; Einheit, die nicht auf Vielfalt gründet, ist Tyrannei.“[3]

„Äußerlichkeiten entscheiden darüber, wie viel Ansehen ein Mensch in der Gemeinschaft hat. [...] Aus demselben Grund tragen Richter Talare. Wenn wir einen Richter in seiner ganzen Aufmachung sehen, halten wir ihn gleich für kompetent.“

„Nie betrieben die Menschen das Böse so umfassend und freudig wie aus religiöser Überzeugung.“

Pascal verstarb im Alter von 39 Jahren in Paris.



[1] Le cœur a ses raisons que la raison ne connaît pas.

[2] Nous ne nous contentons pas de la vie que nous avons en nous et en notre propre être: nous voulons vivre dans l'idée des autres une vie imaginaire, et nous nous efforçons pour cela de paraître.

[3] La multitude qui ne se réduit pas à l'unité est confusion; l'unité qui ne dépend pas de la multitude est tyrannie.

$n$-Fakultät, Binomialkoeffizient

Startseite