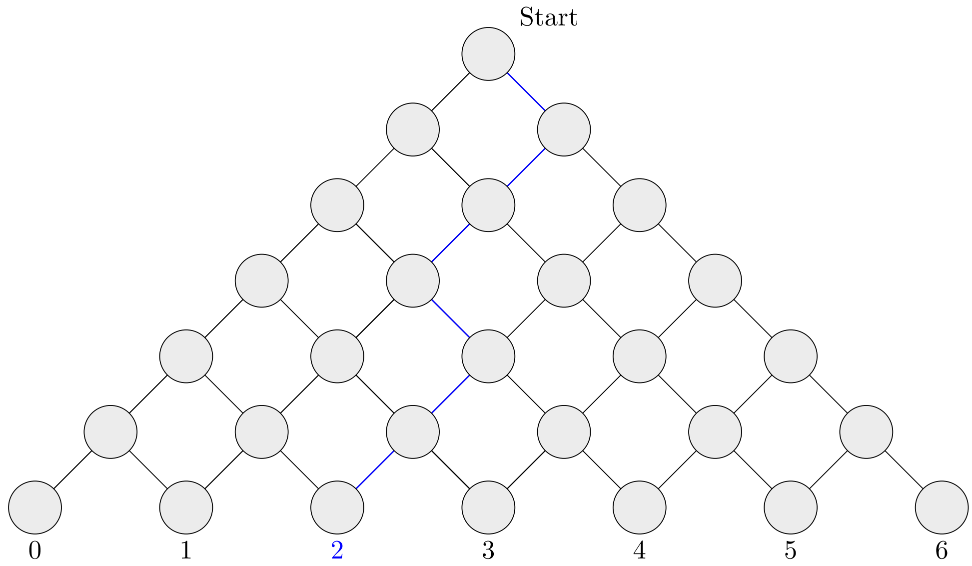
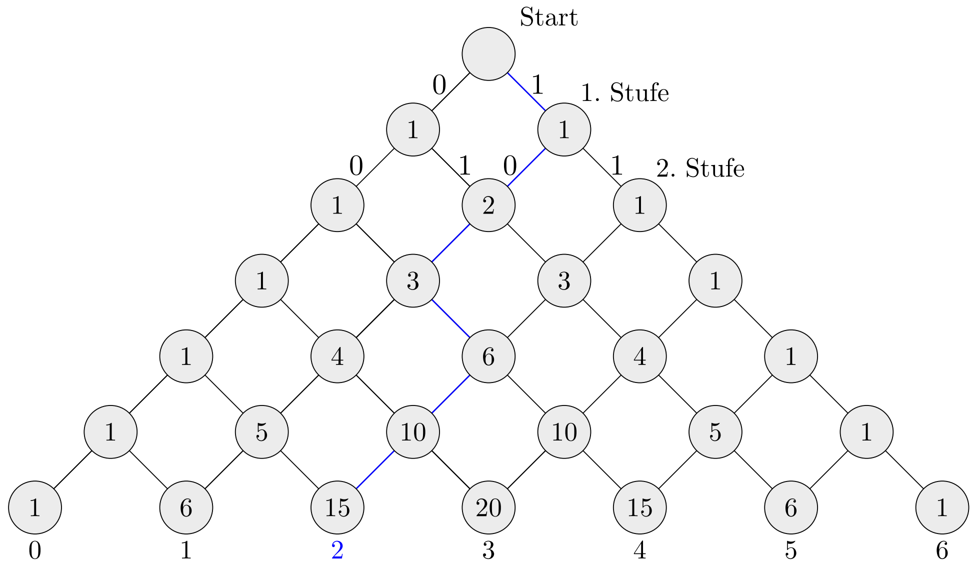
Pascalsches Dreieck



Wieviele Pfade, aus jeweils 6 Teilstrecken bestehend, gibt es vom Start bis zum Endknoten 2?
Die Pfade sind unterschiedlich, wenn sie in einer Teilstrecke verschieden sind.
Wieviele Pfade gibt es insgesamt vom Start bis zu den Endknoten?

Pascalsches Dreieck



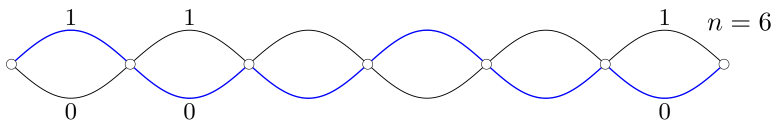
Wieviele Pfade, aus jeweils 6 Teilstrecken bestehend, gibt es vom Start bis zum Endknoten 2?
Die Pfade sind unterschiedlich, wenn sie in einer Teilstrecke verschieden sind.

Beginne beim Start.
Um die Knoten der 1. Stufe zu erreichen, gibt es jeweils nur eine Möglichkeit.
Um die Knoten der 2. Stufe zu erreichen, gibt es jeweils die Summe der unmittelbar darüberliegenden Möglichkeiten, usw.

Wieviele Pfade gibt es insgesamt vom Start bis zu den Endknoten?

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$$

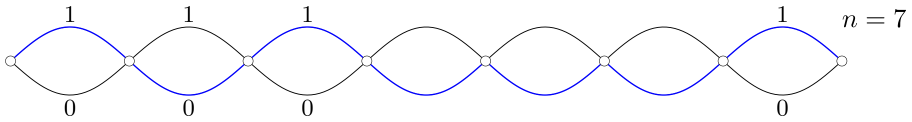
Von jedem Knoten gehen 2 Teilstrecken aus, von den Endknoten abgesehen, $0 \mathrel{\widehat{=}}$ links, $1 \mathrel{\widehat{=}}$ rechts.
Das folgende vereinfachte Pfaddiagramm enthält auch alle Pfade. Deren Anzahl 2^6 ist hier unmittelbar zu sehen. Den Wegen entsprechen alle 0/1-Folgen der Länge 6, z. B.
$(1, 0, 0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1, 0, 1)$ oder $(0, 1, 0, 1, 0, 0)$.



Wir interessieren uns für die Anzahl $\binom{6}{2}$ der Pfade mit genau 2 Einsen (Treffern, „6 über 2“, Schreib- und Sprechweise seit Euler). Es muss $\binom{6}{2} = 15$ sein. Das ist die Anzahl der Pfade im Pascalschen Dreieck zum Endknoten 2. Pfade mit genau 3 Einsen führen zum Endknoten 3, somit gilt $\binom{6}{3} = 20$.

Anzahl der Pfade $\binom{n}{k}$

Länge n des vereinfachten Pfaddiagramms, Anzahl k der Einsen (Treffer)



$\binom{7}{3} = ?$

$(1, 0, 1, 0, 0, 0, 1) \xrightarrow{\cdot 3!} (1, 0, \uparrow, 0, 0, 0, \Uparrow) \xrightarrow{\cdot 4!} (1, 0, \uparrow, *, \star, \circ, \Uparrow)$ Anzahl 7!

Anzahl $\binom{7}{3}$ $\qquad \binom{7}{3} \cdot 3! \qquad \binom{7}{3} \cdot 3! \cdot 4! = 7!$

Wir betrachten alle 0/1-Folgen der Länge 7 mit genau 3 Einsen.
Wenn die 3 Einsen unterschiedlich sind $(1, \uparrow, \Uparrow)$, vergrößert sich die Anzahl um den Faktor 3!.
Wenn nun noch alle 4 Nullen unterschiedlich sind $(0, *, \star, \circ)$, vergrößert sich die Anzahl weiter um den Faktor 4!.

Nun kann erkannt werden:

$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!}$ und allgemein

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

GTR
7 nCr 3 MATH | PRB (engl.: n choose r, dt.: n über r)
35

n-Fakultät, Binomialkoeffizient
Startseite