Stochastik

Startseite

Normalverteilung

de Moivre 1730, Laplace 1812)

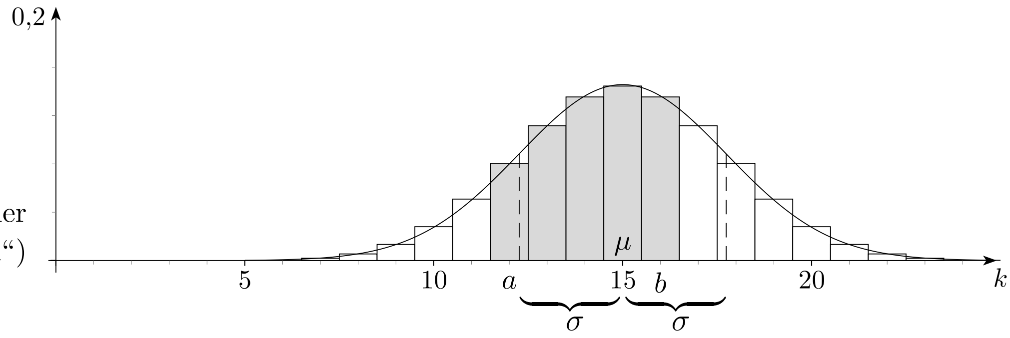
Binomialverteilung:

$n = 30$

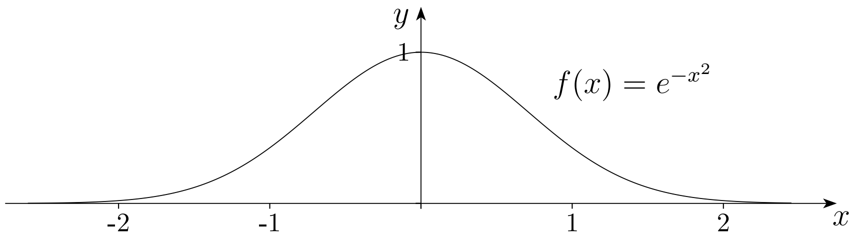
$p = 0{,}5$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}, \qquad \mu = n\,p$

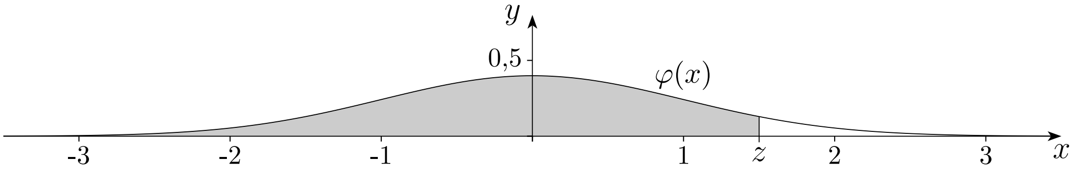
(z. B. 30-maliges Werfen einer Münze, X Anzahl von "Zahl")



In das Histogramm einer Binomialverteilung kann eine Kurve gelegt werden, die die Verteilung so gut approximiert, dass die Berechnung von $P(a \leq X \leq b)$ durch eine Flächenberechnung erfolgen kann.
Hierzu wird die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$, deren Wendestellen $x_{1/2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ lauten, so abgeändert, dass sie bei $x_{1/2} = \pm 1$ liegen, x wird durch $\frac{1}{\sqrt{2}}x$ ersetzt. Beachte: $g(x) = f(ax) \implies g(1) = f(a)$.



Anschließend wird sichergestellt, dass die Kurve mit der x-Achse den Flächeninhalt 1 einschließt, hierzu wird $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \sqrt{2\pi}$ verwendet. Die sich ergebende Funktion $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ heißt Gausssche Glockenkurve oder Dichtefunktion der Standardnormalverteilung.

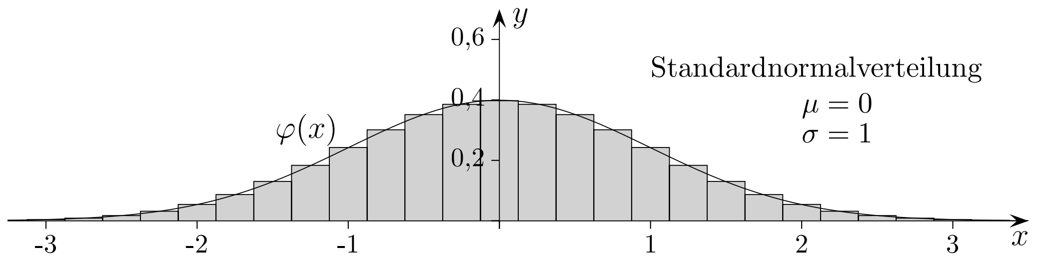


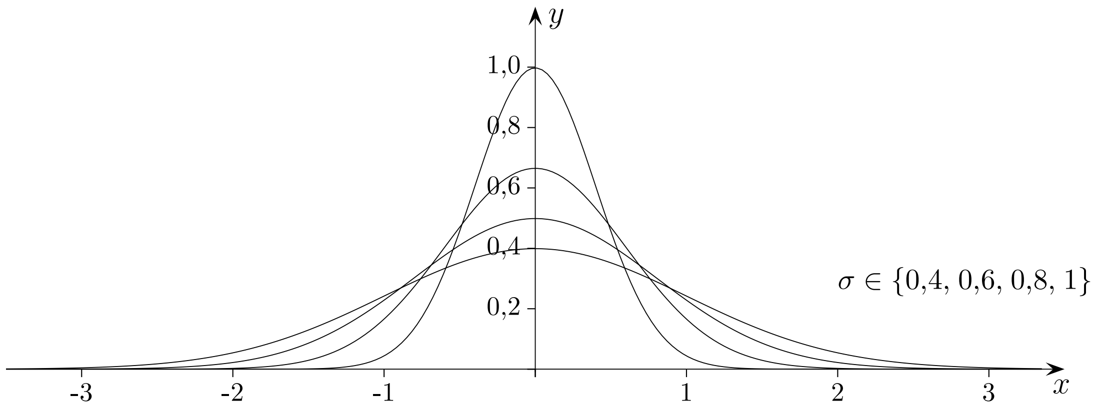
Die Gausssche Funktion $\varphi(x)$ wird nun dem Histogramm angepasst:
Die Wendestellen werden zunächst durch Streckung in x-Richtung zu $x_{1/2} = \pm\,\sigma$ geändert.
Damit der Flächeninhalt gleich bleibt, wird der Graph in y-Richtung gestaucht und anschließend um μ nach rechts verschoben. Das Ergebnis lautet:

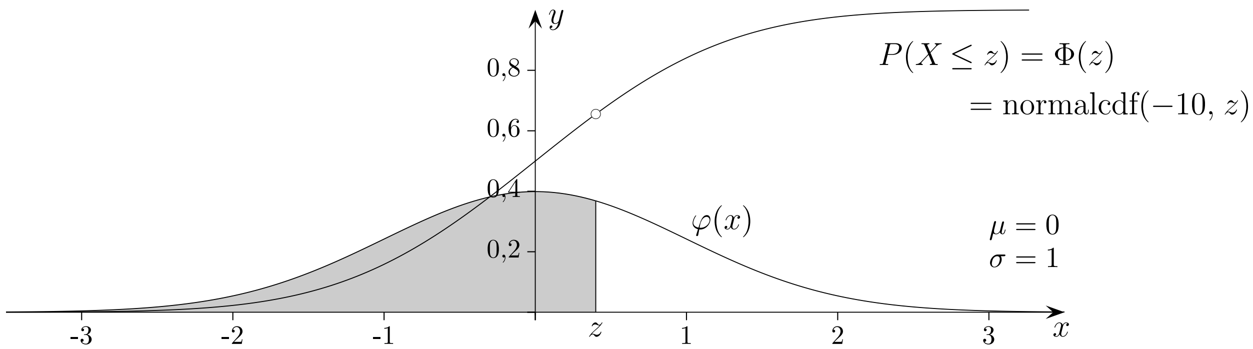
$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Mit der Verteilungsfunktion $\Phi(z)$, die den Inhalt der Fläche unter der Gaussschen Glockenkurve bis zur rechten Grenze z angibt, können Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden (siehe nächste Seite):

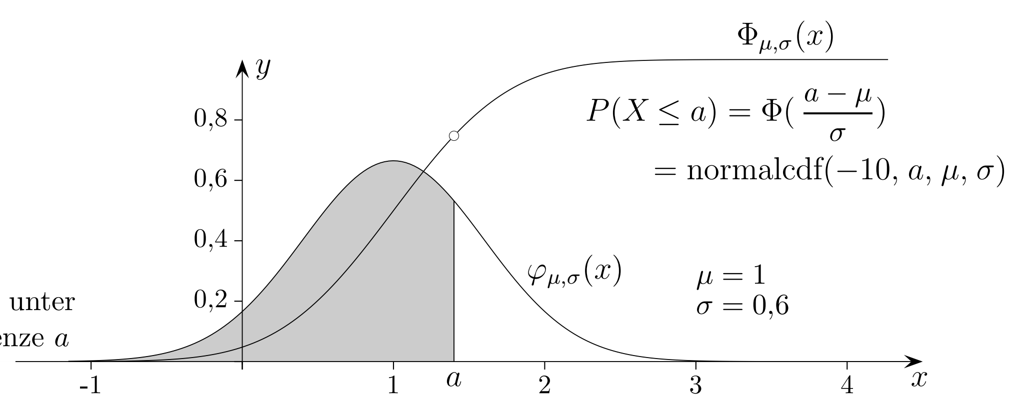
$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$







$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt$ ist eine Integralfunktion.



Aus $a = \mu + z\sigma$ folgt

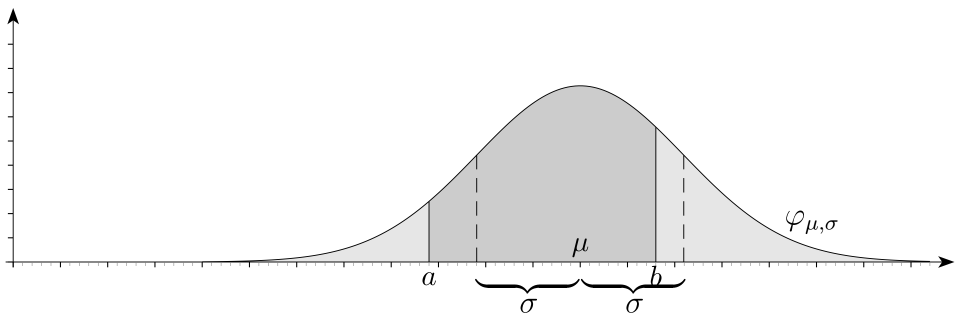
$$z = \frac{a-\mu}{\sigma}.$$

Somit ist Inhalt der Fläche unter $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ bis zur rechten Grenze a

$$\Phi_{\mu,\sigma}(a) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}).$$

↑

Normalverteilt



Zufallsgrößen, die um einen Mittelwert schwanken wie Blattlängen, Messfehler, Lebensdauern, Ferkelgewichte sind stetige Zufallsgrößen im Gegensatz zu diskreten (häufig ganzzahligen) Zufallsgrößen. Die Dichte einer normalverteilten Zufallsgröße (Zufallsvariable) beruht auf der Gausskurve und ist durch μ und σ festgelegt.
Um die Wahrscheinlichkeit für ein Intervall zu ermitteln, ist statt einer Summenbildung nun eine Berechnung einer Fläche unter der Dichte erforderlich. Die Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Wert ist daher null. Man bedenke, dass eine reelle Zahl unendlich viele Nachkommastellen hat.

$$P(a \le X \le b) \ = \int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(x)\ dx$$

Ljapunow gelang 1901 der Nachweis, dass - vereinfacht formuliert - Zufallsgrößen, die sich aus einer großen Anzahl von zufallsbedingten, unabhängigen Einflüssen zusammensetzen, stets normalverteilt sind. Dies ist einsichtig, man denke an die Verteilung von X (Trefferanzahl) einer Bernoulli-Kette. X setzt sich als Summe (vieler) 0/1-Teilergebnisse zusammen.
Quetelet führte 1844 die Bezeichnung Normalverteilung ein, als er den Brustumfang von Soldaten untersuchte.

1. Bei der Befüllung von Zuckertüten durch eine Maschine ist das Gewicht normalverteilt mit Mittelwert $1000\,g$ und Standardabweichung $6\,g$.
   a) Wie groß ist der Anteil an Zuckertüten, die weniger als $995\,g$ enthalten?
   b) Der Produzent möchte eine Garantie geben, so dass eine Tüte mit zu geringer Füllung umgetauscht werden kann. Welche Mindestfüllmenge sollte er garantieren, wenn er höchstens ein Prozent an Reklamationen haben will?

2. Die Montagezeiten eines Bauteils seien normalverteilt und weichen mit einem $\sigma = 1$ Std. von der Vorgabezeit ab.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein konkreter Auftrag mit einer Abweichung von maximal $\pm$0,5 Std. abgewickelt wird?
   b) In welchem Bereich bewegen sich 80 % der (symmetrischen) Abweichungen von der Norm?

Normalverteilt

1. Bei der Befüllung von Zuckertüten durch eine Maschine ist das Gewicht normalverteilt mit Mittelwert $1000\,g$ und Standardabweichung $6\,g$.

   a) Wie groß ist der Anteil an Zuckertüten, die weniger als $995\,g$ enthalten? 20,2 %

   b) Der Produzent möchte eine Garantie geben, so dass eine Tüte mit zu geringer Füllung umgetauscht werden kann. Welche Mindestfüllmenge sollte er garantieren, wenn er höchstens ein Prozent an Reklamationen haben will? $986\,g$

2. Die Montagezeiten eines Bauteils seien normalverteilt und weichen mit einem $\sigma = 1$ Std. von der Vorgabezeit ab.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein konkreter Auftrag mit einer Abweichung von maximal $\pm 0{,}5$ Std. abgewickelt wird? 38,3 %

   b) In welchem Bereich bewegen sich 80 % der (symmetrischen) Abweichungen von der Norm? $\pm 1{,}28$ Std.

↑ Aufgaben zur Normalverteilung

1. Für die Körpergröße von 18−20-jährigen Männern ergibt sich ein Mittelwert von 1,80 m bei einer Standardabweichung von 7,4 cm. Die Körpergröße kann als normalverteilt angesehen werden.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Mann dieser Altersgruppe
      1) größer als 1,85 m
      2) zwischen 1,70 m und 1,80 m groß?

   b) In welchem symmetrischen Bereich um den Mittelwert liegen die Größen von 50 % aller Männer dieser Altersgruppe?

   c) Wie groß muss ein Mann sein, damit er zu den 5 % größten Männern gehört?

Karpfen-Aufgabe aus Berufsreifeprüfung, Jutta Gut (Österreich)

2. In einem Ort gibt es einige Karpfenteiche. Das Gewicht der Karpfen ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 4\ kg$ und der Standardabweichung $\sigma = 1{,}25\ kg$.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen Karpfen zu fangen, der
      1) höchstens 2,5 kg,
      2) mindestens 5 kg wiegt?

   b) Wieviel Prozent aller Karpfen wiegen zwischen 3 kg und 4,5 kg?

   c) In welchem zum Erwartungswert symmetrischen Gewichtsbereich liegen 80 % aller Karpfen?

   d) Der Fischereiverband will einen Preis für die schwersten Karpfen aussetzen.
      Welches Mindestgewicht muss man verlangen, damit die Wahrscheinlichkeit, den Preis zu bekommen, 2 % beträgt?

   e) In einem kleinen Teich befinden sich 10 Karpfen und 15 Barsche. Ein Angler beschließt, 3 Fische zu fangen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens 2 Karpfen fängt? (Die gefangenen Fische werden nicht zurückgeworfen.)

Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

3. Ein Medikament hat eine Heilungswahrscheinlichkeit von 80 %.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 400 mit diesem Medikament behandelte Patienten
      1) höchstens 310 Patienten
      2) zwischen (einschließlich) 308 und 332 Patienten geheilt werden?

   b) In welchem zum Erwartungswert symmetrischen Bereich liegt mit 80 % Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Geheilten?

Ergebnisse:

1. a) *1)* 25,0 %
   2) 41,2 %

   b) $\Phi(\dfrac{a-180}{\sigma}) = 0{,}25 \implies \dfrac{a-180}{\sigma} = \Phi^{-1}(0{,}25) \implies [175,\, 185] \quad (cm)$

   oder linke Grenze $l = \text{invNorm}(0.25,\, \mu,\, \sigma) = 175$

   rechte Grenze $r = \text{invNorm}(0.75,\, \mu,\, \sigma) = 185$

   c) $\Phi(\dfrac{a-180}{\sigma}) = 0{,}95 \implies$ mindestens 192,2 (cm)

   oder $a = \text{invNorm}(0.95,\, \mu,\, \sigma) = 192{,}2$

2. a) *1)* 0,114
   2) 0,212

   b) 44,4 %

   c) entweder $z = \Phi^{-1}(\dfrac{1+\alpha}{2}) \qquad [\mu - z\sigma \mid \mu + z\sigma]$

   oder linke Grenze $l = \text{invNorm}(0.1,\, \mu,\, \sigma)$

   $[2{,}4\, kg;\; 5{,}6\, kg]$

   d) $6{,}57\, kg$

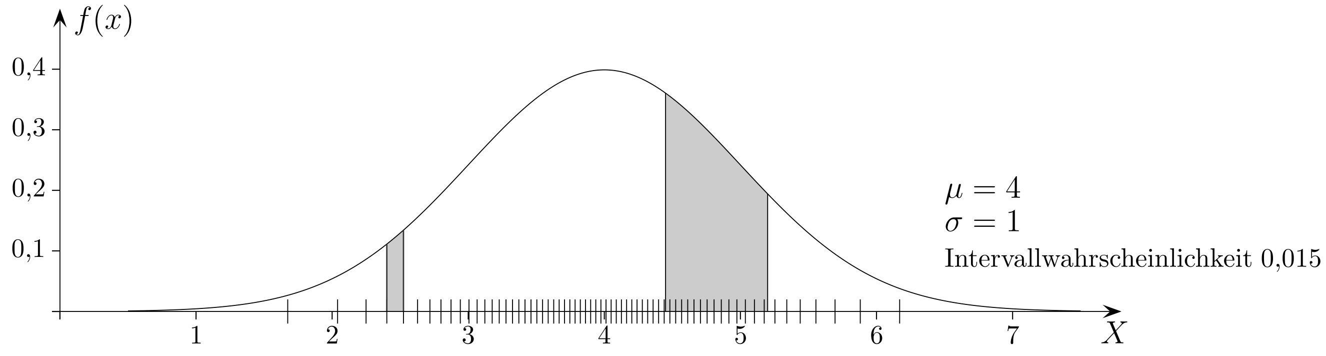
   e) $$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) \\ &= 1 - \frac{\binom{15}{3}}{\binom{25}{3}} - \frac{\binom{10}{1}\binom{15}{2}}{\binom{25}{3}} = 1 - 0{,}1978 - 0{,}4565 = 0{,}346 \end{aligned}$$

3. a) $\mu = np = 320,\;\; \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 8$

   1) 11,8 % GTR normalcdf$(0,\, 310.5,\, \mu,\, \sigma)$ (mit Stetigkeitskorrektur)
   2) 88,2 % normalcdf$(307.5,\, 332.5,\, \mu,\, \sigma)$

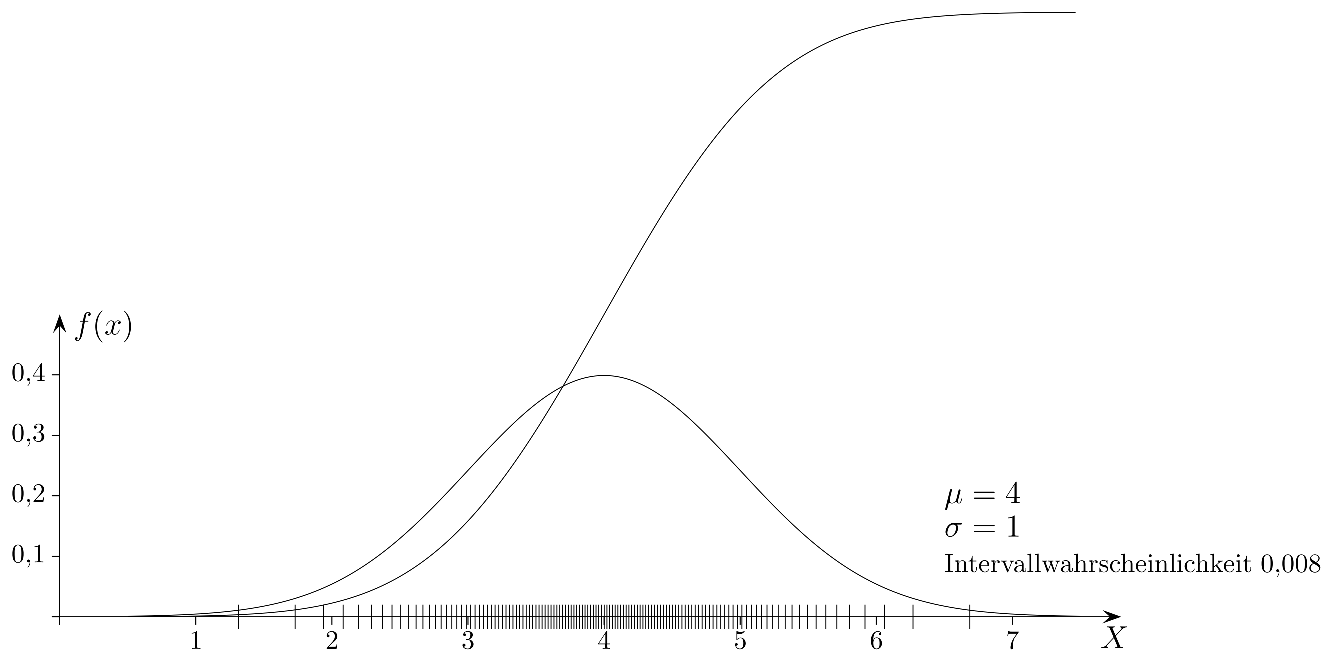
   b) $\Phi(\dfrac{a+0{,}5-\mu}{\sigma}) = 0{,}10 \implies \dfrac{a+0{,}5-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0{,}10) \implies [310,\, 330]$

Dichte(funktion)



Bei einer stetigen Zufallsvariablen sind Wahrscheinlichkeiten aufgrund der Vielzahl der möglichen Ergebnisse nur für Bereiche festgelegt, und zwar durch die jeweils darüberliegende Fläche unterhalb der Dichtefunktion. In der Grafik sind die Intervalle mit gleicher Wahrscheinlichkeit eingezeichnet. Die zugehörigen Flächenstreifen haben also dieselbe Maßzahl. Die Unterteilung hätte beliebig fein erfolgen können. Sie kann als ideale Verteilung von Zufallsergebnissen einer Normalverteilung gesehen werden.

Für gleichlange (kleine) Intervalle, auf denen jeweils die Funktionswerte wenig differieren (nahezu konstant sind), ist die Dichte (Anzahl) der Striche (nahezu) proportional zur Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ an der jeweiligen Stelle.



Aufgaben zur Normalverteilung

1. Das Gewicht von neugeborenen Kindern sei normalverteilt mit $\mu = 3200\,g$ und $\sigma = 800\,g$.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes
      (1) mehr als 3000 g,
      (2) höchstens 2500 g,
      (3) zwischen 4000 und 5000 g wiegt?
   b) Wie schwer muss ein Neugeborenes sein, damit es zu den 20 % leichtesten (15 % schwersten) gehört?

2. Die Körpergröße von erfolgreichen Models ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 178\,cm$ und der Standardabweichung von $\sigma = 2{,}4\,cm$. In welchem symmetrischen Intervall um den Erwartungswert liegen die Körpergrößen von 80 % (95 %) aller Models?

3. Die Standardabweichung bei der Reißfestigkeit von Kettengliedern wird mit $\sigma = 1300$ *Newton* geschätzt. Wie groß muss der Erwartungswert μ mindestens sein, damit höchstens 2 % (5 %) der Kettenglieder eine Festigkeit von weniger als 10000 *Newton* besitzen?

4. Waschmaschinen sollen für einen Waschgang durchschnittlich 65 l Wasser verbrauchen. Ein Hersteller will erreichen, dass bei höchstens 5 % (10 %) seiner Maschinen der Wasserverbrauch größer als 75 l ist. Welche Standardabweichung darf die Maschine (höchstens) haben, wenn man voraussetzt, dass der Wasserverbrauch normalverteilt ist?

5. Eine Firma benötigt Zylinder mit einem Durchmesser von 20 $[mm]$.
   Sie akzeptiert Abweichungen von maximal $+/-\,0{,}5\,[mm]$. Der Durchmesser X eines produzierten Zylinders ist normalverteilt mit $\mu = 20\,[mm]$.
   a) Wieviel Prozent der Zylinder lehnt die Firma ab, wenn $\sigma = 0{,}8\,[mm]$ ist?
   b) Wie groß ist σ, wenn die Firma durchschnittlich 20 % der Zylinder ablehnt?

6. Die künftig erreichbare mittlere Lebenserwartung des Menschen wird auf 85 Jahre geschätzt mit der Standardabweichung $\sigma = 4{,}5$ Jahre.
   a) Welcher Anteil der Menschen würde höchstens 75 Jahre alt?
   b) Welcher Anteil der Menschen würde mindestens 90 Jahre alt?
   c) In welchem zum Mittelwert symmetrischen Bereich würden 95 % der erreichten Lebensalter liegen?

1. a) (1) 59,9 %,
   (2) 19,1 %,
   (3) 14,6 %
   b) $\leq 2527\,g$ $(\geq 4029\,g)$

2. [174,9; 181,1] ([173,3; 182,7])

3. $\mu = 12669{,}9$ *Newton* (12138,3 *Newton*)

4. $\sigma = 6{,}1\ l$ $(7{,}8\ l)$

5. a) $P = 1 - \text{normalcdf}(19.5, 20.5, \mu, \sigma) = 53{,}2\,\%$
   b) Löse $\text{normalcdf}(19.5, 20.5, 20, x) = 80\,\%$ oder $19{,}5 = 20 - 1{,}28\sigma \quad \Longrightarrow \quad \sigma = 0{,}39$

6. a) 13,1 %
   b) 13,3 %
   c) [76,2; 93,8]

Mittagstemperatur-Aufgabe

Ein Statistiker hat für den Juli eine Urlaubsreise nach Rom geplant. Es ist bekannt, dass die Mittagstemperatur X im Juli in Rom sich gut durch eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 25^\circ C$ und $\sigma = 3{,}2^\circ C$ beschreiben lässt.

a) (1) Der Statistiker friert, wenn die Mittagstemperatur unter $20{,}4^\circ C$ sinkt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies im diesjährigen Sommerurlaub der Fall?

(2) Die Frau des Statistikers meint, dass es ihr zu warm wird, wenn die Mittagstemperatur größer als $29{,}6^\circ C$ ist und dass die Wahrscheinlichkeit dafür ebenso groß sei wie die in (1) errechnete Wahrscheinlichkeit. Ist hierauf eine Antwort ohne GTR-Einsatz möglich?

b) (1) Welche Mittagstemperatur wird von 95 % der Tage im Juli in Rom mindestens erreicht?

(2) Wie lautet die Obergrenze b, so dass $P(23^\circ C \leq X \leq b) = 0{,}50$ gilt?

c) Für ein anderes Urlaubsziel gilt für den Juli:
60 % der Mittagstemperaturen überschreiten den Wert $22^\circ C$ nicht. Unter $18^\circ C$ sinkt die Mittagstemperatur nur in 10 % aller Monate. Ausserdem seien die Mittagstemperaturen an diesem Ort ebenfalls normalverteilt. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Mittagstemperatur an diesem Urlaubsort.

Mittagstemperatur-Aufgabe Ergebnisse

Ein Statistiker hat für den Juli eine Urlaubsreise nach Rom geplant. Es ist bekannt, dass die Mittagstemperatur X im Juli in Rom sich gut durch eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 25°C$ und $\sigma = 3{,}2°C$ beschreiben lässt.

a) (1) Der Statistiker friert, wenn die Mittagstemperatur unter $20{,}4°C$ sinkt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies im diesjährigen Sommerurlaub der Fall? 7,5 %

(2) Die Frau des Statistikers meint, dass es ihr zu warm wird, wenn die Mittagstemperatur größer als $29{,}6°C$ ist und dass die Wahrscheinlichkeit dafür ebenso groß sei wie die in (1) errechnete Wahrscheinlichkeit. Ist hierauf eine Antwort ohne GTR-Einsatz möglich?

Symmetrie beachten.

b) (1) Welche Mittagstemperatur wird von 95 % der Tage im Juli in Rom mindestens erreicht?

$19{,}7°C$

(2) Wie lautet die Obergrenze b, so dass $P(23°C \leq X \leq b) = 0{,}50$ gilt? $27{,}3°C$

c) Für ein anderes Urlaubsziel gilt für den Juli:
60 % der Mittagstemperaturen überschreiten den Wert $22°C$ nicht. Unter $18°C$ sinkt die Mittagstemperatur nur in 10 % aller Monate. Ausserdem seien die Mittagstemperaturen an diesem Ort ebenfalls normalverteilt. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Mittagstemperatur an diesem Urlaubsort.

$$P(Y \leq 22°C) = \Phi\left(\frac{22-\mu}{\sigma}\right) = 60\,\%$$

$$P(Y \leq 18°C) = \Phi\left(\frac{18-\mu}{\sigma}\right) = 10\,\%$$

$$\Phi^{-1}(0{,}6) = 0{,}253$$

$$\Phi^{-1}(0{,}1) = -1{,}282$$

$$\mu = 21{,}3°C,\ \sigma = 2{,}6°C$$

↑ Aufgaben zur Normalverteilung

1. Die Raumhöhe der Häuser eines Bauunternehmens ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = 2{,}60\,m$ und Varianz $\sigma^2 = 0{,}09\,m^2$.

   a) (1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält das Unternehmen die gesetzlich vorgeschriebene Mindesthöhe von $2{,}50\,m$ ein?

   (2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Raum höher als $2{,}60\,m$?

   (3) Berechnen Sie das zentrale 90 % Schwankungsintervall für die Raumhöhe.

   b) Wie groß müsste die erwartete Raumhöhe des Unternehmens sein, um die gesetzliche Mindestvorgabe von $2{,}50\,m$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % zu erfüllen?

   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die durchschnittliche Raumhöhe bei 100 zufällig und unabhängig ausgewählten Gebäuden größer als $2{,}65\,m$ ist?

2. Ein Produzent von Kakaopulver weiß aus Erfahrung, dass das Füllgewicht seiner $125\,g$-Packung normalverteilt mit $\mu = 125\,g$ und $\sigma = 5\,g$ ist (das Gewicht wird auf Gramm gerundet).

   a) (1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung genau $\mu = 125\,g$ wiegt?

   (2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung weniger als $110\,g$ wiegt.

   (3) Welches Füllgewicht wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 mindestens erreicht?

   b) (1) Bestimmen Sie die Grenzen des 1,5-fachen zentralen Schwankungsintervalls.

   (2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Füllgewicht in diesem Intervall liegt?

   (3) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit in b)(2) unabhängig von den Werten von μ und σ ist.

   c) (1) Ein Konsument kauft innerhalb eines Jahres unabhängig voneinander 5 Kakaopackungen. Welche Grenzen besitzt das 85 % zentrale Schwankungsintervall des Füllgewichts aus allen 5 Packungen zusammen?

   (2) Das Gewicht einer Kakaopackung setzt sich aus dem Füllgewicht und $5\,g$ Verpackungsmaterial zusammen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt das Gewicht einer Kakaopackung zwischen $120\,g$ und $130\,g$?

↑ Aufgaben zur Normalverteilung   Ergebnisse

1. Die Raumhöhe der Häuser eines Bauunternehmens ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = 2{,}60\,m$ und Varianz $\sigma^2 = 0{,}09\,m^2$.

   a) (1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält das Unternehmen die gesetzlich vorgeschriebene Mindesthöhe von $2{,}50\,m$ ein? 63,1 %

   (2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Raum höher als $2{,}60\,m$? 50,0 %

   (3) Berechnen Sie das zentrale 90 % Schwankungsintervall für die Raumhöhe. [2,11 | 3,09]

   b) Wie groß müsste die erwartete Raumhöhe des Unternehmens sein, um die gesetzliche Mindestvorgabe von $2{,}50\,m$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % zu erfüllen? $3{,}20\,m$

   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die durchschnittliche Raumhöhe bei 100 zufällig und unabhängig ausgewählten Gebäuden größer als $2{,}65\,m$ ist? 4,8 %

2. Ein Produzent von Kakaopulver weiß aus Erfahrung, dass das Füllgewicht seiner $125\,g$-Packung normalverteilt mit $\mu = 125\,g$ und $\sigma = 5\,g$ ist (das Gewicht wird auf Gramm gerundet).

   a) (1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung genau $\mu = 125\,g$ wiegt?

   Gewicht gerundet $P(124{,}5 \leq X \leq 125{,}5) = 8{,}0\,\%$, beachte $125{,}49 \approx 125{,}5$

   (2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung weniger als $110\,g$ wiegt. 0,1 %

   (3) Welches Füllgewicht wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 mindestens erreicht? $116{,}8\,g$

   b) (1) Bestimmen Sie die Grenzen des 1,5-fachen zentralen Schwankungsintervalls. [117,5 | 132,5]

   (2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Füllgewicht in diesem Intervall liegt? 86,6 %

   (3) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit in b)(2) unabhängig von den Werten von μ und σ ist.

   beachte $P(X \leq k) = \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$

   c) (1) Ein Konsument kauft innerhalb eines Jahres unabhängig voneinander 5 Kakaopackungen. Welche Grenzen besitzt das 85 % zentrale Schwankungsintervall des Füllgewichts aus allen 5 Packungen zusammen? [121,8 | 128,2]

   (2) Das Gewicht einer Kakaopackung setzt sich aus dem Füllgewicht und $5\,g$ Verpackungsmaterial zusammen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt das Gewicht einer Kakaopackung zwischen $120\,g$ und $130\,g$? 47,7 %

Stetigkeitskorrektur

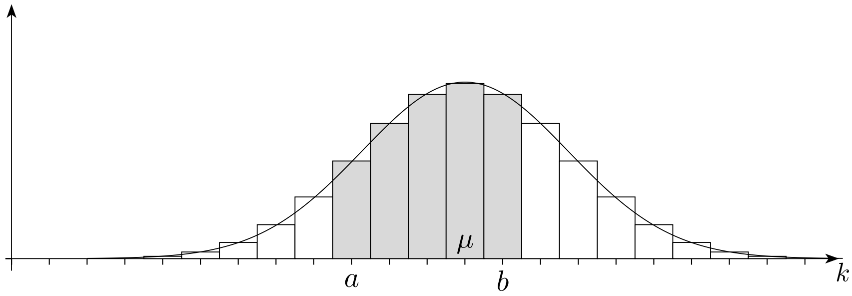
Binomialverteilung:

$n = 30$

$p = 0{,}5$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}, \quad \mu = n\,p$

(z. B. 30-maliges Werfen einer Münze, X Anzahl von "Zahl")



Zur Berechnung von z. B. $P(a \leq X \leq b)$ kann eine Summe von Rechteckflächen in den Grenzen von a bis b mit einer Fläche unter der Dichtefunktion angenähert werden.
Da die Rechtecke des Histogramms symmetrisch zur jeweiligen Stelle k angeordnet sind, gilt genauer:

1. $P(a \leq X \leq b) \approx \Phi(\dfrac{b + 0{,}5 - \mu}{\sigma}) - \Phi(\dfrac{a - 0{,}5 - \mu}{\sigma})$

2. $P(X = k) \approx \Phi(\dfrac{k + 0{,}5 - \mu}{\sigma}) - \Phi(\dfrac{k - 0{,}5 - \mu}{\sigma})$

3. $P(X \leq b) \approx \Phi(\dfrac{b + 0{,}5 - \mu}{\sigma})$

4. $P(X \geq a) \approx 1 - \Phi(\dfrac{a - 0{,}5 - \mu}{\sigma})$

5. $P(\,|\,X - \mu\,| \leq c) \approx 2 \cdot \Phi(\dfrac{c + 0{,}5}{\sigma}) - 1$

6. $P(\,|\,X - \mu\,| > c) \approx 2 \cdot \Big(1 - \Phi(\dfrac{c + 0{,}5}{\sigma})\Big)$

↑ Normalverteilung, Fortsetzung

Das Korrekturglied 0,5 tritt nur auf, wenn die Normalverteilung zur Approximation der Binomialverteilung verwendet wird. Es entfällt bei Problemstellungen, die mit der stetigen Normalverteilung bearbeitet werden.

$$P(X \leq c) \approx \Phi\left(\frac{c + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right)$$

geht über in

$$P(X - \mu \leq c) \approx \Phi\left(\frac{c + 0{,}5}{\sigma}\right),$$

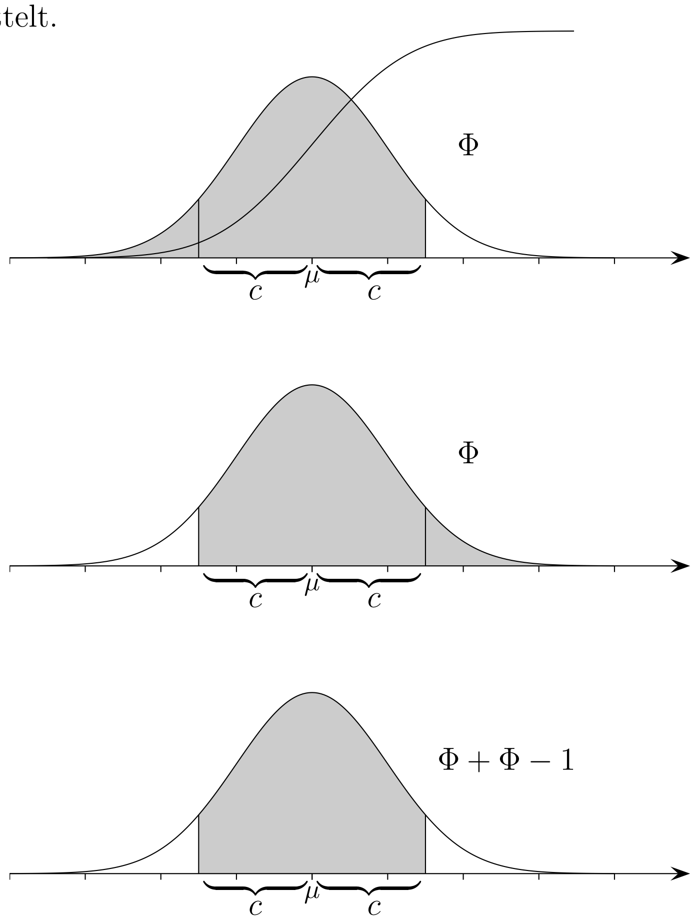
da $E(X - \mu) = 0$ ist.

Für das Folgende wird der Zusammenhang

$$P(\mid X - \mu \mid \leq c) \approx 2\Phi\left(\frac{c + 0{,}5}{\sigma}\right) - 1$$

benötigt.
Er kann unmittelbar eingesehen werden.

z wird mit der Normalverteilung ermittelt.



Schätzung absoluter Häufigkeiten

In welchem Bereich streut X um den Erwartungswert μ
mit vorgegebener Sicherheitswahrscheinlichkeit?

Die rechte Seite von

$$P(\,|\,X-\mu\,|\leq c)\;\approx\;2\Phi(\,\frac{c+0{,}5}{\sigma}\,)-1$$

soll also mindestens z. B. 90 % sein.
Für $n = 50000$ und $p = 0{,}4$ ergibt das

$$\begin{aligned}
2\,\Phi(\,\frac{c+0{,}5}{\sigma}\,)-1 &\;\geq\; 0{,}90\\
\Phi(\,\frac{c+0{,}5}{\sigma}\,) &\;\geq\; 0{,}95\\
\frac{c+0{,}5}{\sigma} &\;\geq\; 1{,}645 \qquad \text{beachte:}\quad \Phi^{-1}(0{,}95)=1{,}645\\
c &\;\geq\; 179{,}7
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\quad 19820{,}3\;\leq\;X\;\leq\;20179{,}7$$

$$19820\;\leq\;X\;\leq\;20180 \qquad \text{(90 \% wird nicht unterschritten)}$$

GTR: 19819.8 = invNorm(0.05, 20000, 109.5)
20180.1 = invNorm(0.95, 20000, 109.5)

Mit der Tschebyschew-Ungleichung

$$P(\,|\,X-\mu\,|<c)\;\geq\;1-\frac{n\cdot p\cdot q}{c^2}$$

gestaltet sich die Rechnung ähnlich:

$$\begin{aligned}
1-\frac{n\cdot p\cdot q}{c^2} &\;\geq\; 0{,}90\\
c &\;\geq\; 346{,}4
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\quad 19653{,}6\;<\;X\;<\;20346{,}4$$

$$19654\;\leq\;X\;\leq\;20346$$

Setzt sich die Zufallsvariable aus einer Summe zusammen, z. B.
$Y = X_1 + X_2 + X_3$, so ist
$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$ und falls die X_i unabhängig sind, gilt auch
$V(Y) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3)$, $\sigma_Y = \sqrt{Y}$.

Stichprobenumfang

Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein,
damit mit vorgegebener Sicherheitswahrscheinlichkeit die relative Häufigkeit $\frac{X}{n}$
in der ε-Umgebung von p liegt?
p kann dann mit diesem Stichprobenumfang bis auf eine Abweichung von ε geschätzt werden.

Die rechte Seite von

$$\underbrace{P(\mid \frac{X}{n} - p \mid \leq \varepsilon)}_{} \approx 2\Phi(\frac{\varepsilon \cdot n + 0{,}5}{\sigma}) - 1$$
$$= P(\mid X - \mu \mid \leq \varepsilon \cdot n)$$

soll also mindestens z. B. 90 % sein.

Für $p = 0{,}4$ und $\varepsilon = 0{,}02$ ergibt das

$$\begin{aligned} 2\Phi(\frac{\varepsilon \cdot n + 0{,}5}{\sigma}) - 1 &\geq 0{,}90 \\ \Phi(\frac{\varepsilon \cdot n + 0{,}5}{\sigma}) &\geq 0{,}95 \\ \frac{\varepsilon \cdot n + 0{,}5}{\sigma} &\geq 1{,}645 \qquad \text{beachte:} \quad \Phi^{-1}(0{,}95) = 1{,}645 \\ n &\geq 1573 \end{aligned}$$

Die Rechnung ist nicht so mühelos, wie es den Anschein hat.
Es ist eine quadratische Gleichung mit $\sqrt{n}$ zu lösen, erfreulich ist dies nur mit einem CAS.
Ohne 0,5 (stetige Verteilung) ist die Rechnung wesentlich einfacher.

Mit der Tschebyschew-Ungleichung

$$P(\mid \frac{X}{n} - p \mid < \varepsilon) \geq 1 - \frac{n \cdot p \cdot q}{(\varepsilon \cdot n)^2}$$

erhalten wir eine grobe Schätzung:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{n \cdot p \cdot q}{(\varepsilon \cdot n)^2} &\geq 0{,}90 \\ n &\geq 6000 \end{aligned}$$

Für unbekanntes p ist vom Term $p \cdot q$ der ungünstigste Fall zu nehmen,
und zwar das Maximum $\frac{1}{4}$ für $p = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} p \cdot q &= p \cdot (1 - p) \\ &= p - p^2 \\ &= \frac{1}{4} - (p - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Konfidenzintervall für p (siehe auch Stochastik Konfidenzintervall)

Ein Stichprobenergebnis $X = k$ liegt vor.
Welche Wahrscheinlichkeiten können dem Zufallsversuch
mit vorgegebener Sicherheitswahrscheinlichkeit zugrunde liegen?

Die rechte Seite von

$$P(\,|\,\frac{X}{n} - p\,| \leq \varepsilon) \;\approx\; 2\,\Phi(\,\frac{\varepsilon \cdot n + 0{,}5}{\sigma}\,) - 1$$

soll also mindestens z. B. 90 % sein.

Für $X = 23$ und $n = 500$ ergibt das

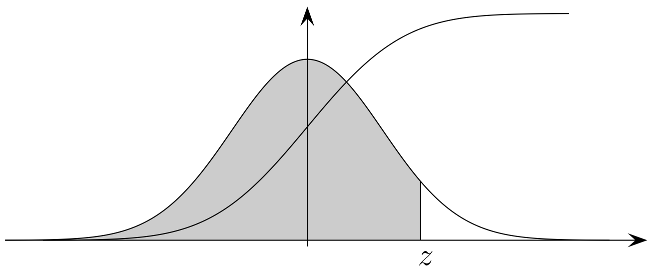
$$\begin{aligned} 2\,\Phi(\,\frac{\varepsilon \cdot n + 0{,}5}{\sigma}\,) - 1 &\geq 0{,}90 \\ \Phi(\,\frac{\varepsilon \cdot n + 0{,}5}{\sigma}\,) &\geq 0{,}95 \\ \varepsilon &\geq \frac{1{,}645\,\sigma - 0{,}5}{n} \qquad \text{beachte: } \Phi^{-1}(0{,}95) = 1{,}645 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\,\frac{X}{n} - p\,| &\leq \varepsilon \qquad \text{quadrieren} \\ (X - n \cdot p)^2 &\leq n^2 \cdot \varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad 0{,}03 \leq p \leq 0{,}07$$

Zunächst wird ein Term für das kleinstmögliche ε entwickelt,
anschließend ist eine quadratische Ungleichung für p zu lösen.
Auch hier empfiehlt sich ein CAS.

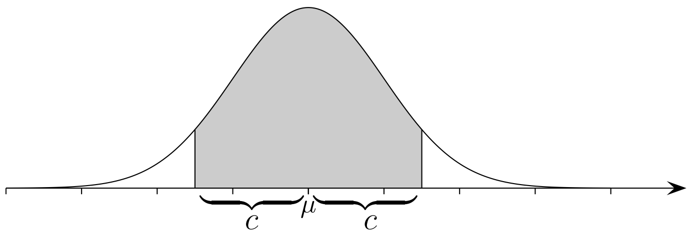
Normalverteilung, Wahrscheinlichkeiten



Die Funktion $\Phi(z)$ gibt den Inhalt der Fläche unter der Gausssche Glockenkurve bis zur rechten Grenze z an.

Begründe:

1. $\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$
2. $P(X < c) \;=\; P(X \leq c)$
3. $P(X \leq c) \;=\; \Phi(\,\dfrac{c-\mu}{\sigma}\,)$
4. $P(X \geq c) \;=\; 1 - \Phi(\,\dfrac{c-\mu}{\sigma}\,)$
5. $P(a \leq X \leq b) \;=\; \Phi(\,\dfrac{b-\mu}{\sigma}\,) \;-\; \Phi(\,\dfrac{a-\mu}{\sigma}\,)$
6. $P(X - \mu \;\leq\; c) \;=\; \Phi(\,\dfrac{c}{\sigma}\,)$
7. $P(X - \mu \;\geq\; c) \;=\; 1 - \Phi(\,\dfrac{c}{\sigma}\,)$
8. $P(\,|\,X - \mu\,|\;\leq\; c) \;=\; 2\,\Phi(\,\dfrac{c}{\sigma}\,) - 1$
9. $P(\,|\,X - \mu\,|\;\geq\; c) \;=\; 2 - 2\Phi(\,\dfrac{c}{\sigma}\,)$



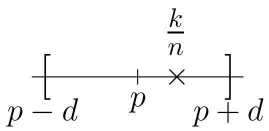
Beachte:
$|\,x\,| \leq c$ ist gleichbedeutend mit $-c \leq x \leq c$.
$|\,X - \mu\,| \leq c$ ist gleichbedeutend mit $-c \leq X - \mu \leq c$
und dies ist gleichbedeutend (addiere μ) mit $\mu - c \leq X \leq \mu + c$.

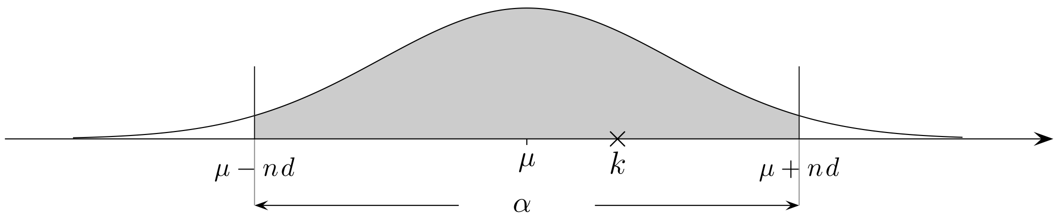
Wird zu einer gegebenen Wahrscheinlichkeit α der z-Wert mit $z = \Phi^{-1}(\,\alpha)$ gesucht, so heißt dieser Wert α-Quantil. Diese Begriffsbildung erstreckt sich auf alle Verteilungsfunktionen. Das $\dfrac{1}{2}$-Quantil heißt Median.

Genauigkeit relativer Häufigkeiten

Wie groß ist die Anzahl n der benötigten Würfe, so dass die relative Häufigkeit für das Werfen einer 6 mit höchstens 5%-iger Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{6}$ um mehr als $d = 0{,}01$ abweicht?
Verallgemeinere das Ergebnis.
(Jakob Bernoulli, Gesetz der großen Zahlen 1689)

Lösung:





$$\begin{aligned}
& P(p-d \le \frac{X}{n} \le p+d) &\ge\ & 95\,\% \\
\iff\ & P(\mu - nd \le X \le \mu + nd) &\ge\ & 95\,\% \\
\iff\ & \underbrace{P(X \le \mu - nd)}_{\Phi(\frac{-nd}{\sigma})} &\le\ & 2{,}5\,\% \\
\iff\ & \frac{-nd}{\sigma} &\le\ & \Phi^{-1}\big(0{,}025\big) \\
& n &\ge\ & 5336
\end{aligned}$$

allgemein

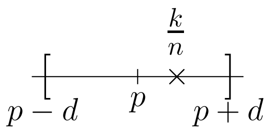
$$n \ \ge\ \frac{\Big(\Phi^{-1}\big(\frac{1-\alpha}{2}\big)\Big)^2}{d^2} \cdot pq$$

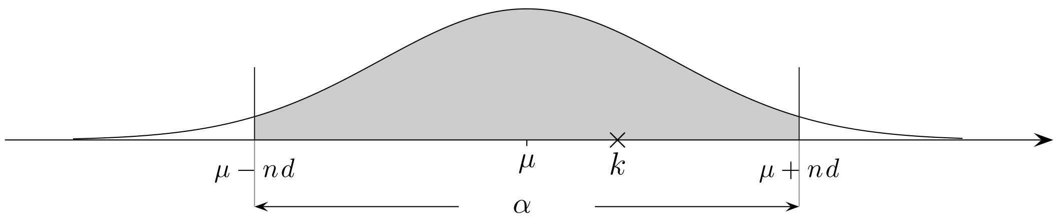
Variation
$\alpha = 90\,\%,\ d = 0{,}02,\ n \ge 940$

Genauigkeit relativer Häufigkeiten

Wie groß ist die Anzahl n der benötigten Würfe, so dass die relative Häufigkeit für das Werfen einer 6 mit höchstens 5%-iger Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{6}$ um mehr als $d = 0{,}01$ abweicht?
Verallgemeinere das Ergebnis.
(Jakob Bernoulli, Gesetz der großen Zahlen 1689)

Lösung:





$$
\begin{aligned}
P(p-d \leq \frac{X}{n} \leq p+d) &= \alpha \\
\iff \quad P(\mu - nd \leq X \leq \mu + nd) &= \alpha \\
\iff \quad nd &= z\sigma \qquad \text{mit} \quad z = \Phi^{-1}\big(\tfrac{1+\alpha}{2}\big) \\
n &\approx \frac{z^2}{d^2} \cdot pq \\
n &\approx 5336
\end{aligned}
$$

Variation
$\alpha = 92\%,\ d = 0{,}02,\ n \geq 1065$

Erläutere und interpretiere ($\sqrt{n}$-Gesetz)

$$
\begin{aligned}
nd &= z\sigma \\
\iff \quad d &= \frac{z\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

↑ Aufgaben

1. Stichprobenmittel
   Das Füllgewicht von Zuckertüten sei normalverteilt, $\mu = 1\,kg$, $\sigma = 15\,g$.
   Es wird eine Stichprobe von $n = 20$ Tüten untersucht.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe das durchschnittliche Füllgewicht

      1) mindestens $995\,g$ beträgt,

      2) zwischen $995\,g$ und $1005\,g$ liegt?

   b) In welchem zum Erwartungswert symmetrischen Gewichtsbereich liegt das durchschnittliche Füllgewicht mit einer Wahrscheinlichkeit von $95\,\%$?

   c) Überprüfen Sie, ob ein durchschnittliches Füllgewicht von $1006\,g$ eine signifikante Vergrößerung (Irrtumswahrscheinlichkeit $5\,\%$) des Füllgewichts darstellt?

2. Gewichtsklassen
   Das Putengewicht sei normalverteilt, $\mu = 5160\,g$, $\sigma = 250\,g$.
   Wie müssen die Grenzen dreier Gewichtsklassen festgelegt werden, damit sie gleich stark sind?

3. Normalverteilung
   $\sigma = 10{,}5$
   $P(X \leq 140) = 17\,\%$
   $\mu = ?$

4. Normalverteilung
   $\mu = 250$
   $P(X \leq 210) = 8\,\%$
   $\sigma = ?$

Aufgaben

1. Stichprobenmittel
   Das Füllgewicht von Zuckertüten sei normalverteilt, $\mu = 1\,kg$, $\sigma = 15\,g$.
   Es wird eine Stichprobe von $n = 20$ Tüten untersucht.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe das durchschnittliche Füllgewicht

      1) mindestens $995\,g$ beträgt,

      2) zwischen $995\,g$ und $1005\,g$ liegt?

   b) In welchem zum Erwartungswert symmetrischen Gewichtsbereich liegt das durchschnittliche Füllgewicht mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %?

   c) Überprüfen Sie, ob ein durchschnittliches Füllgewicht von $1006\,g$ eine signifikante Vergrößerung (Irrtumswahrscheinlichkeit 5 %) des Füllgewichts darstellt?

2. Gewichtsklassen
   Das Putengewicht sei normalverteilt, $\mu = 5160\,g$, $\sigma = 250\,g$.
   Wie müssen die Grenzen dreier Gewichtsklassen festgelegt werden, damit sie gleich stark sind?

3. Normalverteilung
   $\sigma = 10{,}5$
   $P(X \leq 140) = 17\,\%$
   $\mu = ?$

4. Normalverteilung
   $\mu = 250$
   $P(X \leq 210) = 8\,\%$
   $\sigma = ?$

5. Normalverteilung
   $P(X \leq 20) = 65\,\%$
   $P(X \leq 15) = 15\,\%$
   $\mu,\ \sigma = ?$

Ergebnisse

1. a) $\overline{\mu} = 15$, $\overline{\sigma} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

   1) 93,2 %

   2) 86,4 %

   b) $[993{,}4;\ 1006{,}5]$

   c) $P(X \geq 1006) = 3{,}7\,\%$

2. 1. Klasse bis zu einem Gewicht von $5052{,}3\,g$ $\qquad P(X \leq k_1) = \dfrac{1}{3}$

   2. Klasse bis zu einem Gewicht von $5267{,}7\,g$ $\qquad P(X \leq k_2) = \dfrac{2}{3}$

3. $\Phi(\dfrac{140-\mu}{\sigma}) = 0{,}17 \quad \Longrightarrow \quad \mu = 150$ $\qquad$ GTR: Solver 0 = normalcdf(0, 140, X, 10.5) − 0.17
   Grenzen wählen

4. $\Phi(\dfrac{210-\mu}{\sigma}) = 0{,}08 \quad \Longrightarrow \quad \sigma = 28{,}5$

5. $P(Y \leq 20) \ = \ \Phi(\dfrac{20-\mu}{\sigma}) = 65\,\%$

   $P(Y \leq 15) \ = \ \Phi(\dfrac{15-\mu}{\sigma}) = 15\,\%$

   $\Phi^{-1}\big(0{,}65\big) = 0{,}385$

   $\Phi^{-1}\big(0{,}15\big) = -1{,}036$

   $\mu = 18{,}6;\ \ \sigma = 3{,}5$

Merkzettel   Normalverteilung

Die Zufallsvariable X ist normalverteilt, μ, σ gegeben.

a) $P(X \leq k) = \int\limits_{-\infty}^{k} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$ Diese Darstellung wird für Berechnungen nicht verwendet.

b) $P(X \leq k) = \text{normalcdf}(0, k, \mu, \sigma)$ $X \geq 0$

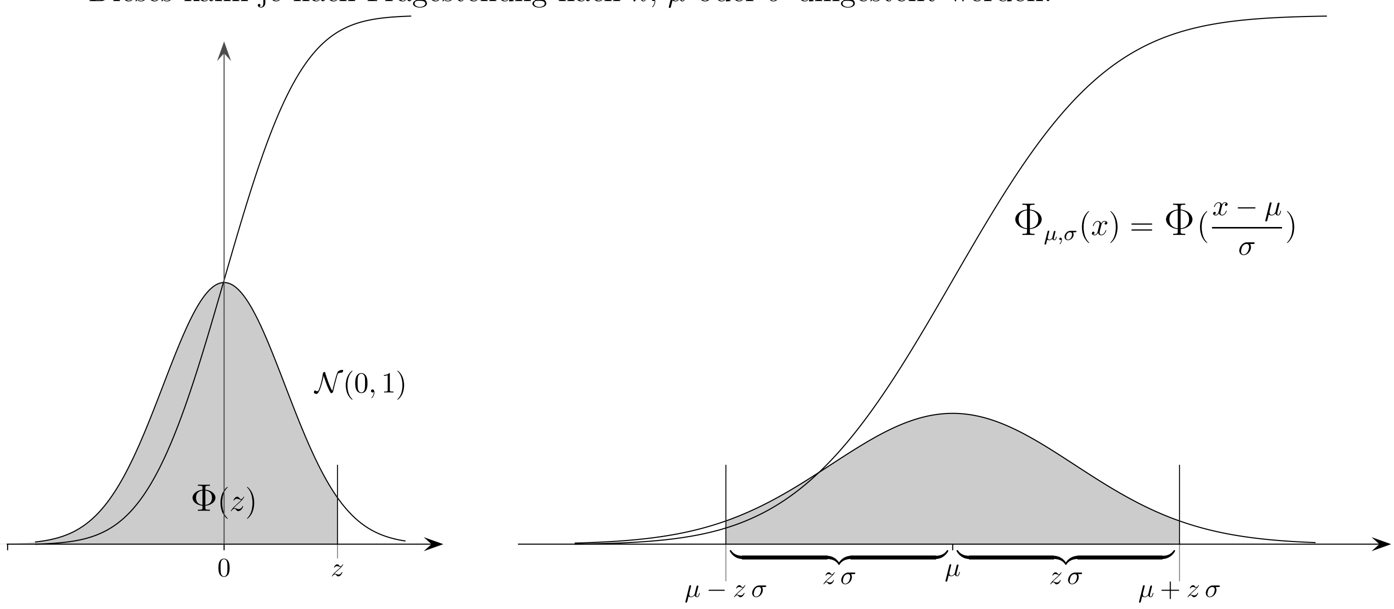
c) $P(a \leq X \leq b) = \text{normalcdf}(a, b, \mu, \sigma)$

d) $P(X < k) = P(X \leq k)$ Für binomialverteiltes X gilt: $P(X < k) = P(X \leq k-1)$

e) $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k)$ Für binomialverteiltes X gilt: $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$

f) $\underbrace{P(X \leq k)}_{\beta} = \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$

Falls β gegeben ist, folgt $\frac{k-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\beta)$ invNorm( )
Dieses kann je nach Fragestellung nach k, μ oder σ umgestellt werden.



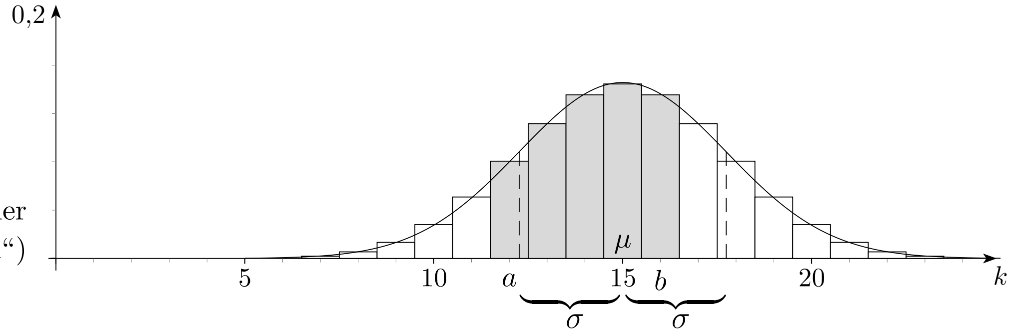
g) $P(\mu - z\,\sigma \leq X \leq \mu + z\,\sigma) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1$

h) Wenn z. B. ein Füllgewicht X alle Zwischenwerte annehmen kann, ist $P(X < k) = P(X \leq k)$ gültig. Wenn jedoch das Füllgewicht in halbe Gramm (gerundet) gemessen wird, dann wäre z. B. $P(X < 50) = P(X \leq 49{,}5)$ sinnvoll.

i) Für $-\infty < X < \infty$ wäre $P(X \leq k) = \text{normalcdf}(-\text{E}99, k, \mu, \sigma)$,   E mit 2nd EE (oder -10)

Der zentrale Grenzwertsatz

Binomialverteilung:
$n = 30$
$p = 0{,}5$
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}, \quad \mu = n\,p$
(z. B. 30-maliges Werfen einer Münze, X Anzahl von "Zahl")



Eine binomialverteilte Zufallsgröße X lässt sich als Summe von n unabhängigen Zufallsgrößen X_i darstellen, die jeweils die Werte 1 und 0 mit den Wahrscheinlichkeiten p und q annehmen:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \qquad \text{mit} \quad \mu = E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = np \quad \text{und}$$
$$\sigma^2 = V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n) = npq$$

Nach dem Satz von Moivre und Laplace gilt

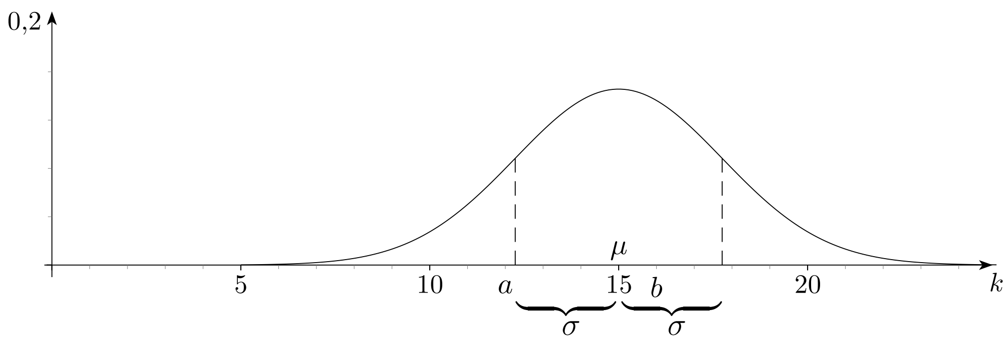
$$P_p^n(X \le k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right),$$ wobei für größeres n die Stetigkeitskorrektur $+\,0{,}5$ entfallen kann.

A. Ljapunow (1857 - 1918) konnte beweisen, dass diese Näherung für alle Zufallsgrößen X gilt, die sich als Summe von n unabhängigen Zufallsgrößen X_i darstellen lassen,

$$P(X \le k) \approx \Phi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)$$

wobei nur wenige Voraussetzungen erfüllt sein müssen,
z. B. dass die Varianzen $V(X_i)$ nicht beliebig groß werden.
Die Näherung ist umso besser je größer n ist.

Dieser sogenannte zentrale Grenzwertsatz liefert die theoretische Begründung für die Beobachtung, dass viele empirische Häufigkeitsverteilungen glockenförmig sind.
Hierbei scheinen ursächlich viele unabhängige Einflüsse additiv zusammenzuwirken.



Der Beweis des zentralen Grenzwertsatzes beruht auf der Tatsache, dass jeder Verteilung in eindeutiger Weise eine Funktion (sogenannte charakteristische Funktion) zugeordnet werden kann, wobei der Addition von Zufallsgrößen einer leichter handhabbareren Multiplikation von Funktionen entspricht.

Summe von Zufallsvariablen, $\sqrt{n}$ - Gesetz

Für die Summe

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

von n Zufallsvariablen (z. B. binomial- oder normalverteilt) gilt:

$$\mu_Y = E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$$

und falls die Zufallsvariablen unabhängig sind, überdies:

$$\sigma_Y^2 = V(Y) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n) \qquad \text{(siehe Varianz der Binomialverteilung)}$$

Für identische Zufallsvariablen vereinfacht sich dies zu:

$$Y = X + X + \ldots + X \quad (n\text{-mal})$$

$$\mu_Y = n \cdot E(X) = n \cdot \mu_X$$

$$\sigma_Y^2 = n \cdot V(X)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{n} \cdot \sqrt{V(X)} = \sqrt{n} \cdot \sigma_X \qquad \text{(siehe Abitur 2007 Bayern LK III 5.)}$$

Für das Stichprobenmittel $\overline{X} = \frac{1}{n}\Big(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\Big)$ gilt,
falls die X_i gleichen Erwartungswert μ und gleiche Varianz σ haben:

$$\mu_{\overline{X}} = \mu$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\sigma$$

$$V(\overline{X}) = V\Big(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\Big) = \frac{1}{n^2}\sum V(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{\overline{X}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\sigma$$

Um einen Messwert auf eine Dezimalstelle genauer angeben zu können (Genauigkeit verzehnfachen), sind 100mal so viele Messungen erforderlich.

↑ Stichprobenmittel Aufgaben

Das Stichprobenmittel ist (bisher) nicht im niedersächsischen Lehrplan enthalten.

1. Fruchtsaft wird mit einer Sollmenge von 1000 ml bei einer Standardabweichung von 10 ml in Flaschen gefüllt. Bei einer Kontrolle von 15 Flaschen betrug die mittlere Füllmenge 994 ml.
   Kann die Annahme, dass sich der Erwartungswert nicht verändert hat, auf dem 95 %-Niveau aufrechterhalten werden?

2. Die erwartete Leuchtdauer von Glühlampen beträgt 500 Stunden bei einer Standardabweichung von 20 Stunden. Bei einem Test mit 50 Lampen betrug die mittlere Leuchtdauer 495 Stunden.
   Kann die Annahme, dass sich die Leuchtdauer nicht verändert hat, auf dem 95 %-Niveau aufrechterhalten werden?

3. Wie viele Menschen benötigt man für eine 200 m lange Menschenkette, wenn die Spannweite der Arme normalverteilt ist mit dem Erwartungswert 1,7 m und der Standardabweichung 0,3 m (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95,5 %)?

↑ Stichprobenmittel Aufgaben

1. Fruchtsaft wird mit einer Sollmenge von 1000 ml bei einer Standardabweichung von 10 ml in Flaschen gefüllt. Bei einer Kontrolle von 15 Flaschen betrug die mittlere Füllmenge 994 ml. Kann die Annahme, dass sich der Erwartungswert nicht verändert hat, auf dem 95 %-Niveau aufrechterhalten werden?

2. Die erwartete Leuchtdauer von Glühlampen beträgt 500 Stunden bei einer Standardabweichung von 20 Stunden. Bei einem Test mit 50 Lampen betrug die mittlere Leuchtdauer 495 Stunden. Kann die Annahme, dass sich die Leuchtdauer nicht verändert hat, auf dem 95 %-Niveau aufrechterhalten werden?

3. Wie viele Menschen benötigt man für eine 200 m lange Menschenkette, wenn die Spannweite der Arme normalverteilt ist mit dem Erwartungswert 1,7 m und der Standardabweichung 0,3 m (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95,5 %)?

1. $\overline{\mu} = 1000$
   $n = 15$
   $\overline{\sigma} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}58$
   $z\overline{\sigma}$-Umgebung: [995, 1005] (zur sicheren Seite gerundert, Runden ist jedoch nicht erforderlich)
   994 liegt außerhalb,
   alternativ:
   $P(X \leq 994) = 0{,}01$

2. $\overline{\mu} = 500$
   $n = 50$
   $\overline{\sigma} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}83$
   $z\overline{\sigma}$-Umgebung: [495, 505]
   495 liegt innerhalb,
   alternativ:
   $P(X \leq 495) = 0{,}038$

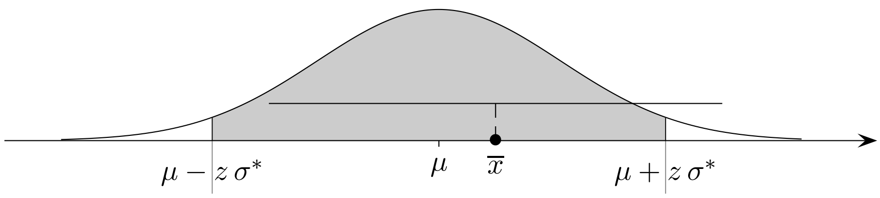
3. $\mu^* = n \cdot \mu = n \cdot 1{,}7$
   $\sigma^* = \sqrt{n} \cdot 0{,}3$
   200 muss in der $2\sigma^*$-Umgebung $[\mu^* - 2\sigma^*,\ \mu^* + 2\sigma^*]$ liegen.
   $200 = \mu^* - 2\sigma^* \implies n = 122$
   $200 = \mu^* + 2\sigma^* \implies n = 114$

Konfidenzintervall für den Erwartungswert

1. Das Gewicht von Schrauben ist normalverteilt mit der Standardabweichung σ von 0,6 g.
   Bei einer Stichprobe wiegen 50 Schrauben 228,7 g. Welches Gewicht kann man für eine Schraube erwarten (Sicherheitswahrscheinlichkeit $\alpha = 95{,}5\,\%$)?

   Das Stichprobenmittel $\overline{X}$ (Standardabweichung $\sigma^* = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}085$) liegt mit der Wahrscheinlichkeit α im Schwankungsintervall

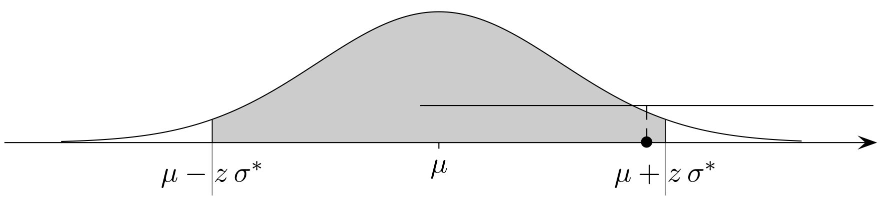
   $$[\mu - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \mu + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]\,, \qquad z = \Phi^{-1}(\frac{1+\alpha}{2})$$

   $\overline{X}$ nimmt hier den Wert $\overline{x} = 4{,}57$ an.
   Ein Konfidenzintervall für $\overline{x}$ sollte den Mittelwert μ mit der Wahrscheinlichkeit α (bei wiederholter Stichprobennahme) überdecken.
   Dies leistet offensichtlich das Intervall

   $$[\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

   $[4{,}40;\ 4{,}74]$.

2. Variation der Aufgabe
   $\alpha = 80\,\%$
   μ liegt im Intervall $[4{,}47;\ 4{,}68]$.

Das Konfidenzintervall für den Erwartungswert hat eine einfachere Struktur als das Konfidenzintervall für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit p, da seine Länge nicht vom Stichprobenergebnis abhängt. Für unbekanntes σ ist die sogenannte t-Verteilung heranzuziehen, deren Herleitung über den schulischen Bereich weit hinausgeht (siehe Verschiedenes).

Wurst-Aufgabe

1. Wurst wird in Dosen zu je 300 g maschinell abgefüllt.
   In einer Stichprobe von 20 Dosen werden die Füllgewichte in g ermittelt:

302,1	299,1	300,4	299,6	292,2	296,6	305,6	301,1	304,2	297,5
293,6	308,0	302,4	298,9	302,5	292,3	307,2	290,5	297,9	317,1

   Die Abfüllanlage arbeitet laut Herstellerangabe mit einer Standardabweichung von 6 g. Ferner wird angenommen, dass die Füllgewichte normalverteilt sind.

   a) Ermitteln Sie den Mittelwert und die Standardabweichung der Stichprobe.

   b) Bestimmen Sie aufgrund der Herstellerangaben ein 95 %-Konfidenzintervall für das durchschnittliche Füllgewicht.

   c) Wie groß muss der Stichprobenumfang gewählt werden, damit der Schätzwert $\overline{X}$ für das durchschnittliche Füllgewicht bei einer Veränderung des Sollwerts (bei gleichbleibender Standardabweichung) auf 301 g mit 95 %-iger Sicherheit über 300 g liegt?

2. Variation der Aufgabe

   Dosen zu je 500 g

507,6	505,4	495,8	493,6	498,3	506,8	506,1	502,3	492,7	498,0
498,9	496,0	497,1	503,6	500,3	497,3	496,4	508,3	505,0	502,1

   Standardabweichung 5 g laut Herstellerangabe

   a) Mittelwert, Standardabweichung der Stichprobe
   b) 90 %-Konfidenzintervall für das durchschnittliche Füllgewicht
   c) Veränderung des Sollwerts auf 502 g, $\overline{X}$ mit 90 %-iger Sicherheit über 500 g

1. a) $\overline{x} = 300{,}4$
   $\sigma_x = 6{,}11 \quad S_x = 6{,}27$

   b) $\sigma^* = \dfrac{6}{\sqrt{20}} = 1{,}34$

   $[\mu - 1{,}96\,\sigma^*,\ \mu + 1{,}96\,\sigma^*]$, d. h. $\overline{\mu}$ liegt in $[297{,}37;\ 302{,}63]$

   c) $300 < \underbrace{301 - 1{,}96\dfrac{6}{\sqrt{n}}}_{\overline{x}_{\min}} \quad \Longrightarrow \quad n \geq 139$

2. a) $\overline{x} = 500{,}6$
   $\sigma_x = 4{,}72 \quad S_x = 4{,}84$

   b) $\sigma^* = \dfrac{5}{\sqrt{20}} = 1{,}12$

   $[\mu - 1{,}64\,\sigma^*,\ \mu + 1{,}64\,\sigma^*]$, d. h. $\overline{\mu}$ liegt in $[498{,}17;\ 501{,}83]$

   c) $500 < 502 - 1{,}64\dfrac{5}{\sqrt{n}} \quad \Longrightarrow \quad n \geq 17$

Mehltüten-Aufgabe

Eine Mehltüten-Abfüllanlage ist so eingestellt, dass das Füllgewicht X der $1\,kg$-Tüten normalverteilt mit einer Standardabweichung $\sigma = 20\ g$ ist. Es wird eine Stichprobe von $n = 10$ Tüten untersucht.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe das durchschnittliche Füllgewicht $\overline{X}$

   (1) mindestens $990\ g$ beträgt,

   (2) zwischen $985\ g$ und $1010\ g$ liegt?

b) In welchem symmetrischen Bereich um den Erwartungswert $\mu = 1\ kg$ kann das durchschnittliche Füllgewicht der Mehltüten in der Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von $95\,\%$ erwartet werden?

c) Wie verändert sich das Intervall unter b), wenn

   (1) die Sicherheitswahrscheinlichkeit,

   (2) der Stichprobenumfang erhöht wird?

d) In der Stichprobe wurde ein Mittelwert $\overline{x} = 1020\ g$ festgestellt.
Wie lässt sich dieser Wert interpretieren?

e) Die Abfüllanlage musste repariert werden.
Eine neue Stichprobe vom Umfang $n = 25$ ergibt ein durchschnittliches Füllgewicht von $\overline{x} = 995\ g$.
Untersuchen Sie (Sicherheitswahrscheinlichkeit $95\,\%$), ob sich das durchschnittliche Füllgewicht signifikant verkleinert hat.

Mehltüten-Aufgabe   Ergebnisse

Eine Mehltüten-Abfüllanlage ist so eingestellt, dass das Füllgewicht X der 1 kg-Tüten normalverteilt mit einer Standardabweichung $\sigma = 20\ g$ ist. Es wird eine Stichprobe von $n = 10$ Tüten untersucht.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe das durchschnittliche Füllgewicht $\overline{X}$

(1) mindestens 990 g beträgt, $P(\overline{X} \geq 990) = 94{,}3\,\%$

(2) zwischen 985 g und 1010 g liegt? $P(985 \leq \overline{X} \leq 1010) = 93{,}4\,\%$

b) In welchem symmetrischen Bereich um den Erwartungswert $\mu = 1\ kg$ kann das durchschnittliche Füllgewicht der Mehltüten in der Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % erwartet werden? [987,6; 1012,4]

c) Wie verändert sich das Intervall unter b), wenn

(1) die Sicherheitswahrscheinlichkeit, Intervall wird größer.

(2) der Stichprobenumfang erhöht wird? Intervall wird kleiner.

d) In der Stichprobe wurde ein Mittelwert $\overline{x} = 1020\ g$ festgestellt.
Wie lässt sich dieser Wert interpretieren? $P(\overline{X} \geq 1020) = 0{,}08\,\%$
Das Füllgewicht hat sich möglicherweise vergrößert.

e) Die Abfüllanlage musste repariert werden.
Eine neue Stichprobe vom Umfang $n = 25$ ergibt ein durchschnittliches Füllgewicht von $\overline{x} = 995\ g$. Untersuchen Sie (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %), ob sich das durchschnittliche Füllgewicht signifikant verkleinert hat.
$P(\overline{X} \leq 995) = 10{,}6\,\%$
Das Füllgewicht hat sich nicht verkleinert.

↑ Autoreifen-Aufgabe

Die Lebensdauer X (in km) einer Autoreifensorte ist erfahrungsgemäß normalverteilt mit der Standardabweichung $\sigma_X = 5000\,km$. Durch Änderung der Rohstoffzusammensetzung ist die mittlere Lebensdauer der Produktionsserie veränderbar, während sich dadurch aber die Standardabweichung nicht verändert.

a) Die Rohstoffzusammensetzung ist so gewählt, dass die mittlere Lebensdauer eines Reifens dieser Serie $50000\,km$ beträgt. Bei wieviel Prozent der Reifen übersteigt die Lebensdauer $65000\,km$?
Bei wieviel Prozent der Reifen weicht die Lebensdauer um mehr als $7000\,km$ von der mittleren Lebensdauer ab?

b) Wie groß muss die mittlere Lebensdauer der Produktionsserie mindestens sein, damit höchstens 2,5 % der Reifen eine Lebensdauer von weniger als $40000\,km$ haben?

c) Anhand einer Stichprobe vom Umfang $n = 100$ wird eine mittlere Lebensdauer von $49700\,km$ ermittelt. Ermitteln Sie ein Vertrauensintervall für die mittlere Lebensdauer der Reifen dieser Produktionsserie (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %).
Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %), damit die Länge des Vertrauensintervalls höchstens $2000\,km$ beträgt?

d) Die Autoreifenfirma behauptet, durch Änderung der Rohstoffzusammensetzung sei die Lebensdauer (bisher $50000\,km$) erhöht worden. Ein Test mit einer Stichprobe vom Umfang $n = 100$ soll entscheiden, ob die Angaben der Reifenfirma glaubhaft sind (Signifikanzniveau 5 %). Wie groß ist das Risiko, dass mit dem Test eine Erhöhung der Lebensdauer auf $53000\,km$ nicht erkannt wird?

↑ Autoreifen-Aufgabe

Die Lebensdauer X (in km) einer Autoreifensorte ist erfahrungsgemäß normalverteilt mit der Standardabweichung $\sigma_X = 5000\,km$. Durch Änderung der Rohstoffzusammensetzung ist die mittlere Lebensdauer der Produktionsserie veränderbar, während sich dadurch aber die Standardabweichung nicht verändert.

a) Die Rohstoffzusammensetzung ist so gewählt, dass die mittlere Lebensdauer eines Reifens dieser Serie 50000 km beträgt. Bei wieviel Prozent der Reifen übersteigt die Lebensdauer 65000 km? Bei wieviel Prozent der Reifen weicht die Lebensdauer um mehr als 7000 km von der mittleren Lebensdauer ab?

$$\mu_X = 5000$$

$$P(X > 65000) \;=\; 1 - \Phi\Big(\frac{65000 - \mu_X}{\sigma_X}\Big) = 0{,}1\,\%$$

$$P(\mid X - \mu_X \mid > 7000) \;=\; 2\Big[1 - \Phi\Big(\frac{7000}{\sigma_X}\Big)\Big] = 16{,}2\,\%$$

b) Wie groß muss die mittlere Lebensdauer der Produktionsserie mindestens sein, damit höchstens 2,5 % der Reifen eine Lebensdauer von weniger als 40000 km haben?

$$P(X < 40000) \;=\; \Phi\Big(\frac{40000 - \mu}{\sigma_X}\Big) \le 2{,}5\,\% \quad\Longrightarrow\quad \mu \ge 49800$$

c) Anhand einer Stichprobe vom Umfang $n = 100$ wird eine mittlere Lebensdauer von 49700 km ermittelt. Ermitteln Sie ein Vertrauensintervall für die mittlere Lebensdauer der Reifen dieser Produktionsserie (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %).

$$\overline{x} = 49700$$

$$\overline{x} \pm 1{,}96\,\frac{\sigma_X}{10} = \overline{x} \pm 980$$

$$[48720, 50680]$$

Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %), damit die Länge des Vertrauensintervalls höchstens 2000 km beträgt?

$$n = \frac{4 \cdot 1{,}96^2 \cdot \sigma_X^2}{2000^2} = 96{,}04$$

Der Stichprobenumfang muss mindestens $n = 97$ sein.

d) Die Autoreifenfirma behauptet, durch Änderung der Rohstoffzusammensetzung sei die Lebensdauer (bisher 50000 km) erhöht worden. Ein Test mit einer Stichprobe vom Umfang $n = 100$ soll entscheiden, ob die Angaben der Reifenfirma glaubhaft sind (Signifikanzniveau 5 %). Wie groß ist das Risiko, dass mit dem Test eine Erhöhung der Lebensdauer auf 53000 km nicht erkannt wird?

$$\alpha = P(\overline{X} > g) \;=\; 1 - \Phi\Big(\frac{g - 40000}{\frac{\sigma_X}{10}}\Big) \le 5\,\% \quad\Longrightarrow\quad g \ge 50822{,}5$$

$$\beta = P(\overline{X} \le g) \;=\; 1 - \Phi\Big(\frac{50822{,}5 - 53000}{\frac{\sigma_X}{10}}\Big) = 0$$

Stochastik

Startseite