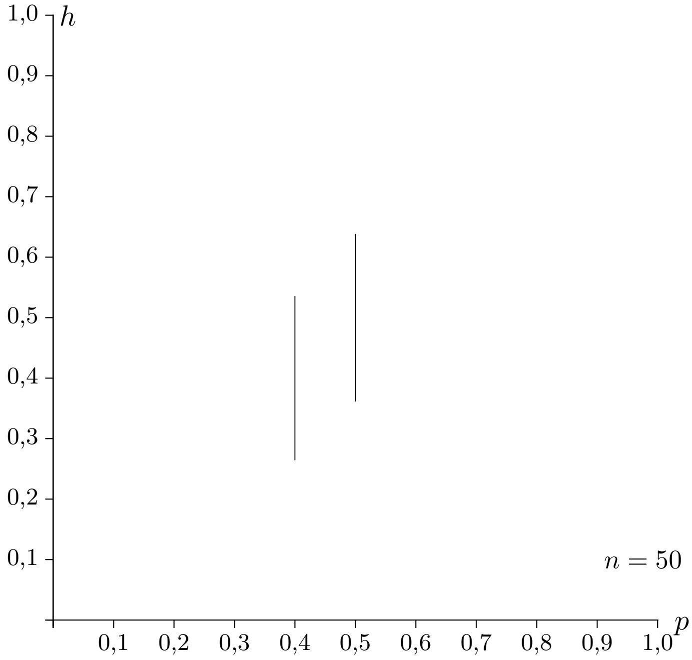
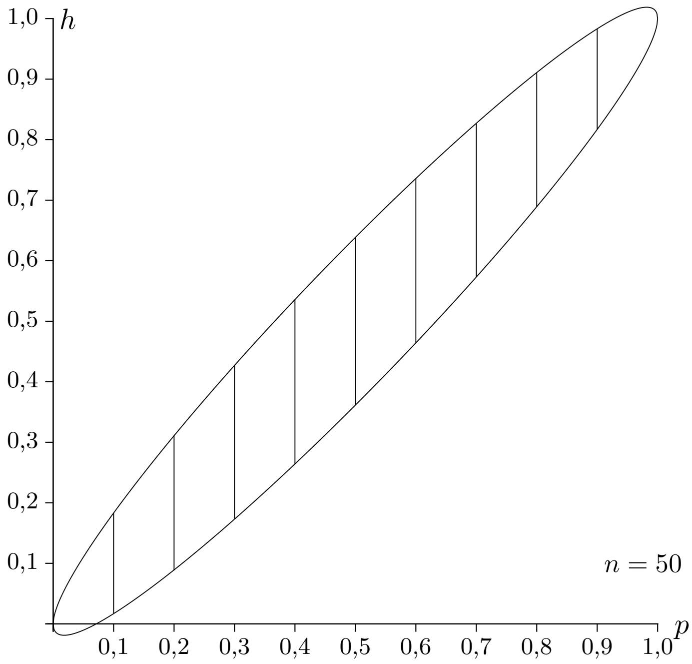
95 %-Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten



Erläutere die Berechnung dieser und weiterer 95 %-Prognoseintervalle.

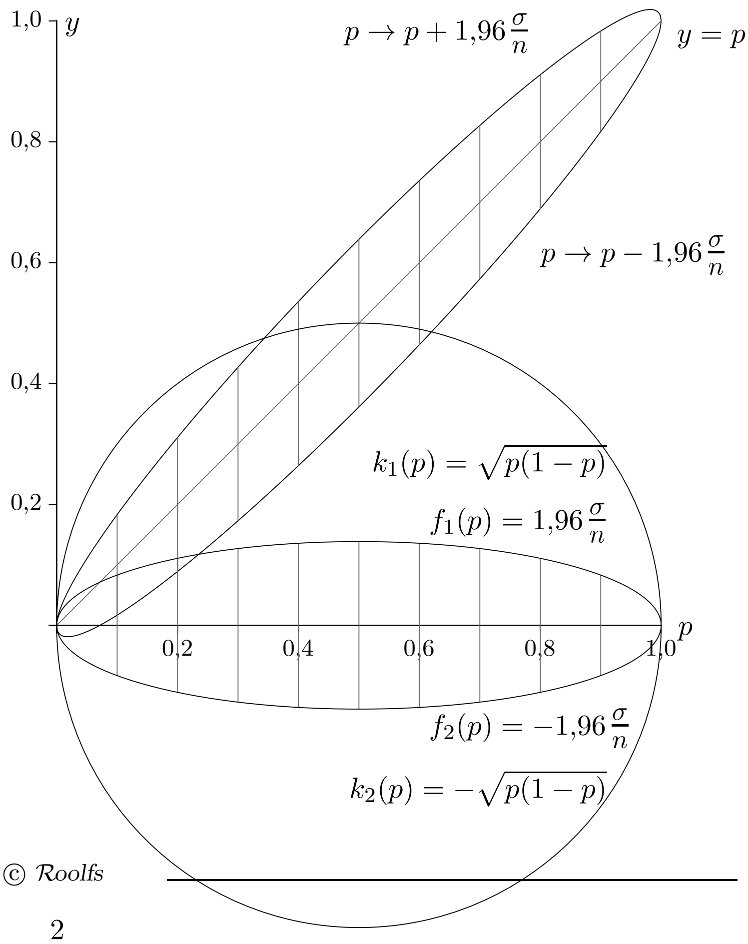
95 %-Prognoseintervalle für relative Häufigkeiten



Zu gegebenem p werden die 95 %-Prognoseintervalle mit $\left[p - 1{,}96\,\frac{\sigma}{n};\, p + 1{,}96\,\frac{\sigma}{n}\right]$ berechnet.
Die obere und untere Grenze können in Abhängigkeit von p als Funktionen erfasst werden.
Bei einer Stichprobe liegt nun das Stichprobenergebnis $X = 28$ vor, p ist nicht bekannt.
Erläutere, wie das Wilson-Vertrauensintervall grafisch ermittelt werden kann.

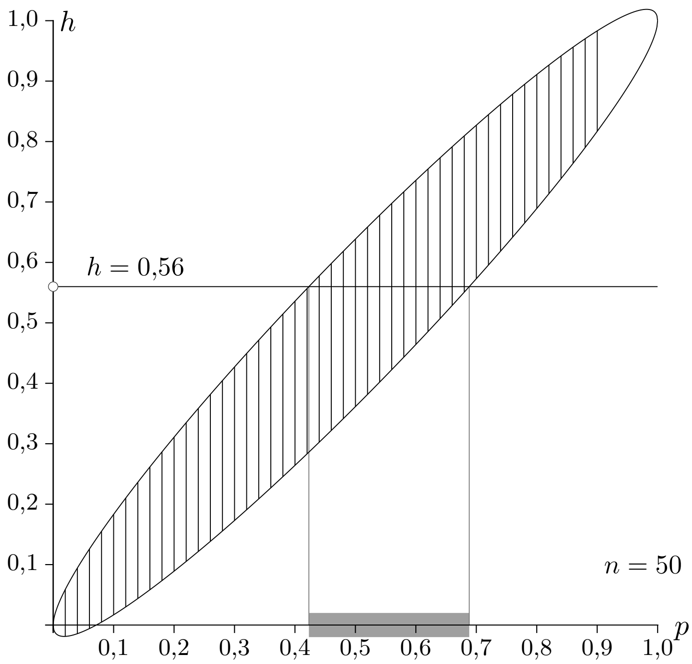
Die obere Kurve kann dadurch erhalten werden, dass ein Kreis zu einer Ellipse gestaucht und anschließend geschert wird.

Genauer:
k_1 und k_2 bilden den Kreis $y^2 + (p - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.
Es ist $f_1(p) = \frac{1{,}96}{\sqrt{n}}\, k_1(p)$.
Die Scherung erfolgt mit der Addition von p.



Die für die Schule nicht relevante Frage:
Ist eine gescherte Ellipse eine Ellipse?
wird ↑hier geklärt.

Prognose- und Vertrauensintervall



Ein 95 %-Vertrauensintervall besteht aus allen p-Werten,
in deren 95 %-Prognoseintervall h liegt.

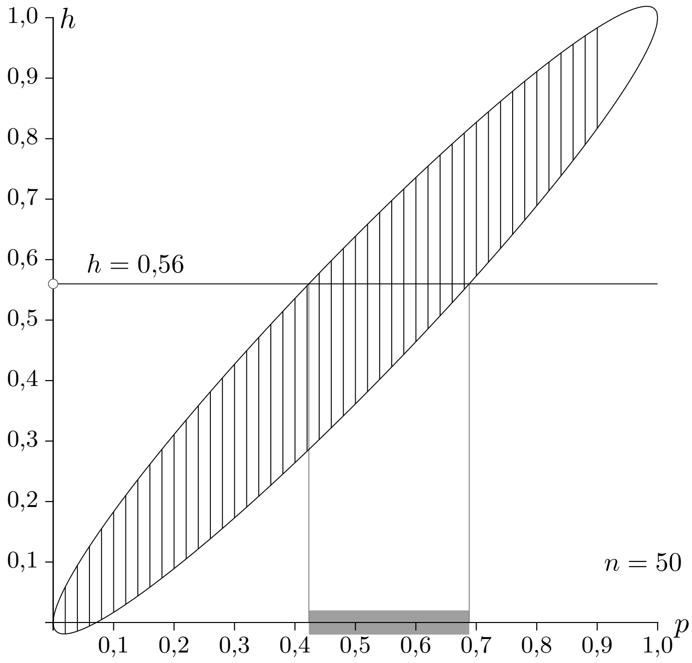
Die Grenzen können durch Lösen der beiden Gleichungen

$$h = p \pm 1{,}96\,\frac{\sigma}{n}$$

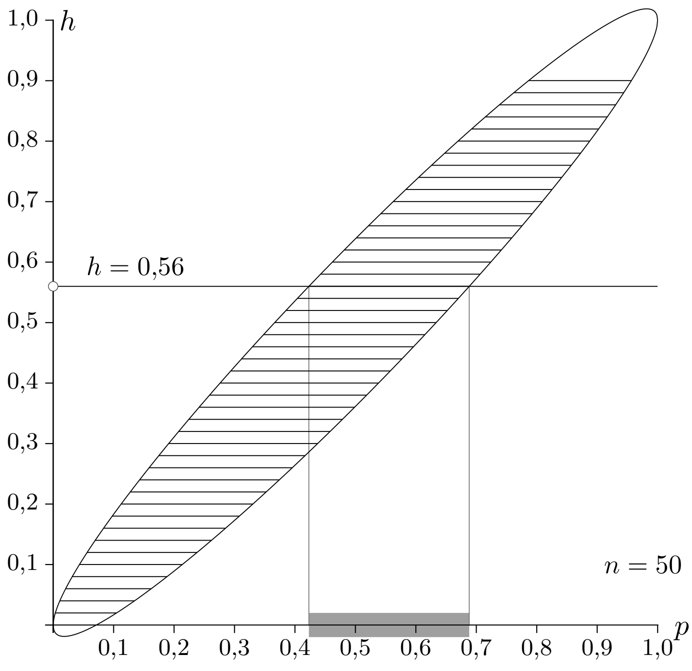
ermittelt werden.

Berechne die Grenzen.

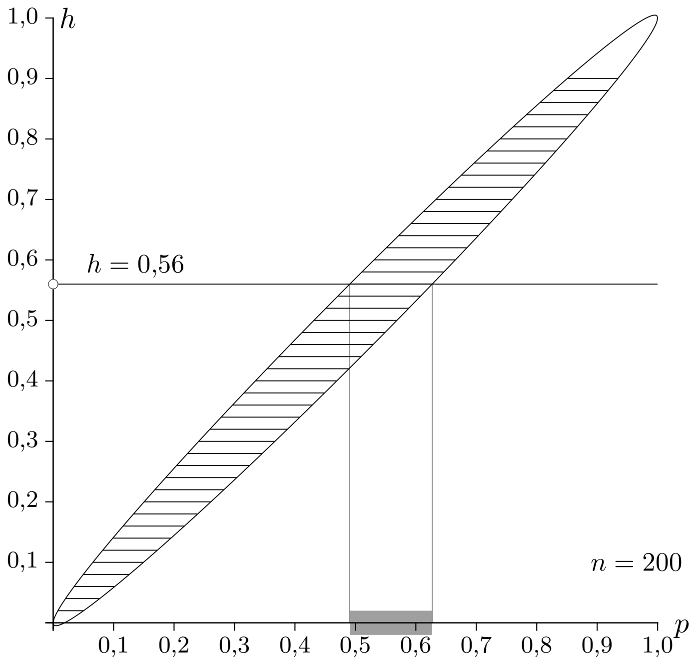
Prognose- und Vertrauensintervall



$[0{,}423; 0{,}688]$



Diese Grafik enthält zu Häufigkeiten die Vertrauensintervalle.
Was ändert sich für $n = 200$?



Beim vierfachen Stichprobenumfang halbiert sich die Länge der Vertrauensintervalle.

Eine Stichprobe vom Umfang 200 ergibt 36 Treffer und das Vertrauensintervall $[0{,}1428;\, p_{\max}]$ zu einer nicht genannten Sicherheitswahrscheinlichkeit. Ermitteln Sie die obere Intervallgrenze.

Eine Stichprobe vom Umfang 200 ergibt 36 Treffer und das Vertrauensintervall $[0{,}1428;\, p_{\max}]$ zu einer nicht genannten Sicherheitswahrscheinlichkeit. Ermitteln Sie die obere Intervallgrenze.

$n = 200$
$X = 36$
$p_{\min} = 0{,}1428$
$h = {}^{36}\!\big/_{200}$

<u>Wald</u>

Gleichung für z:

$$p_{\min} = h - z\,\frac{\sqrt{n \cdot h \cdot (1-h)}}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad z = 1{,}3694$$

$$p_{\max} = h + z\,\frac{\sqrt{n \cdot h \cdot (1-h)}}{n} = 0{,}2172 \qquad \text{oder einfacher aufgrund der Symmetrie:} \quad p_{\max} = h + (h - 0{,}1428)$$

$$[0{,}1428;\, 0{,}2172]$$

<u>Wilson</u>

Gleichung für z:

$$h = p_{\min} + z\,\frac{\sqrt{n \cdot p_{\min} \cdot (1-p_{\min})}}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad z = 1{,}5037$$

Gleichung für $p_{\max}$:

$$h = p_{\max} - z\,\frac{\sqrt{n \cdot p_{\max} \cdot (1-p_{\max})}}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad p_{\max} = 0{,}2244$$

$$[0{,}1428;\, 0{,}2244] \qquad \text{zu } h \text{ nicht symmetrisch}$$

Eine Stichprobe vom Umfang 100 ergibt 42 Treffer und das Vertrauensintervall $[p_{\min}; 0{,}4920]$ zu einer nicht genannten Sicherheitswahrscheinlichkeit. Ermitteln Sie die untere Intervallgrenze.

Eine Stichprobe vom Umfang 100 ergibt 42 Treffer und das Vertrauensintervall $[p_{\text{min}}; 0{,}4920]$ zu einer nicht genannten Sicherheitswahrscheinlichkeit. Ermitteln Sie die untere Intervallgrenze.

<u>Wald</u> $[0{,}3480; 0{,}4920]$, ($z = 1{,}4588$ muss wegen der Symmetrie nicht ermittelt werden.)

<u>Wilson</u> $[0{,}3513; 0{,}4920]$, $z = 1{,}4402$

Stochastik

Startseite