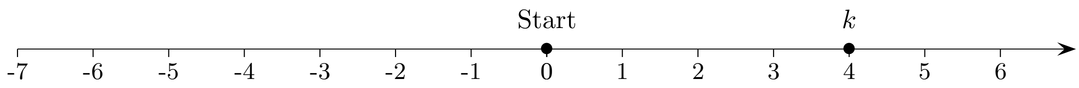
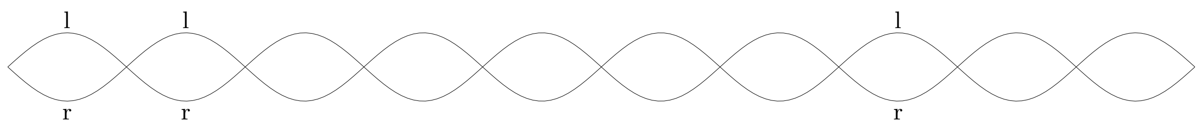
Irrfahrt n Schritte

Ein Teilchen startet in 0 und springt jede Sekunde mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 auf der Geraden einen Schritt nach links oder rechts. Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet die Irrfahrt nach genau $n = 10$ Schritten auf dem Platz $k = 4$?

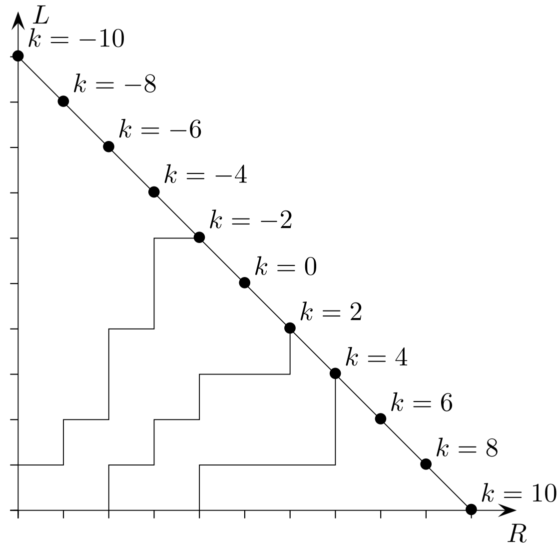


Der Bezug zur Bernoulli-Kette mit der Länge $n = 10$ ist offensichtlich.



Die möglichen Pfade lassen sich zweidimensional besonders gut erfassen. R bezeichnet die Anzahl der Rechts-Schritte und L die Anzahl der Links-Schritte. Nach 10 Schritten endet die Irrfahrt auf der Geraden $R + L = 10$, d. h. $L = -R + 10$ (vertrauter ist die Schreibweise $y = -x + 10$).
Damit die Irrfahrt in $k = 4$ endet, sind 7 Rechts- und 3 Linksschritte erforderlich, d. h. $R - L = 4$.
Hierfür bestehen $\binom{10}{7}$ $(= \binom{10}{3})$ Möglichkeiten.

Aus
$$\begin{aligned} R - L &= k \\ R + L &= n \\ \hline R &= \tfrac{n+k}{2} \\ L &= \tfrac{n-k}{2} \end{aligned}$$
folgt unmittelbar



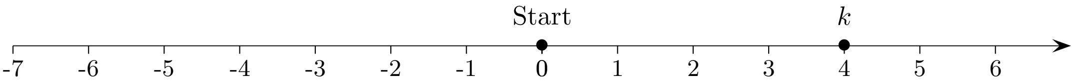
Zusammengefasst:

Die Irrfahrt endet nach genau n Schritten mit der Wahrscheinlichkeit

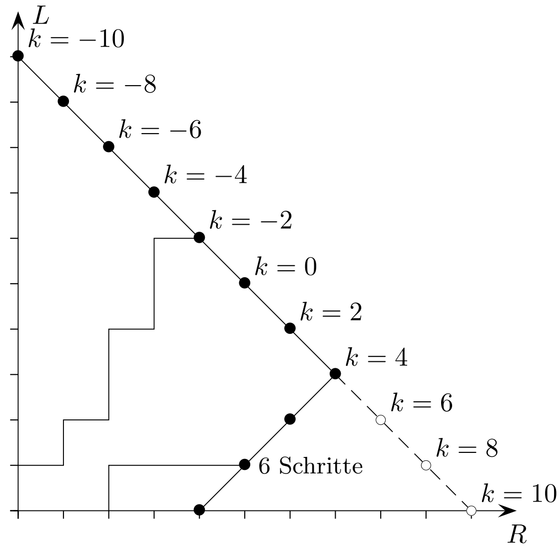
$$P = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \frac{1}{2^n} \qquad \left(= \binom{n}{\frac{n-k}{2}} \frac{1}{2^n}\right)$$

auf Platz k,
vorausgesetzt, $n + k$ ist gerade.

Irrfahrt Absorption



Das Vorige soll dahingehend geändert werden, dass das Teilchen stoppt, wenn der Platz $k = 4$ erreicht wurde ($k = 4$ ist absorbierend). Das Ziel kann in 4, 6, 8 oder 10 Schritten erreicht werden. Die Anzahl der möglichen Pfade wird sukzessive ermittelt.



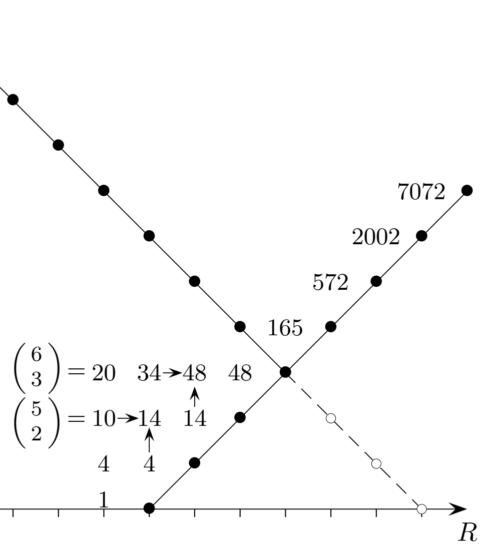
An den Zwischenstellen stehen (zentriert) die Anzahlen der Teilpfade. Für die Wahrscheinlichkeit, nach maximal 10 Schritten in $k = 4$ absorbiert zu werden, erhalten wir:

$$P = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0{,}23$$

Lassen wir nun die Beschränkung auf 10 Schritte fallen. Die Folge 1, 4, 14, 48 wird fortgesetzt durch:

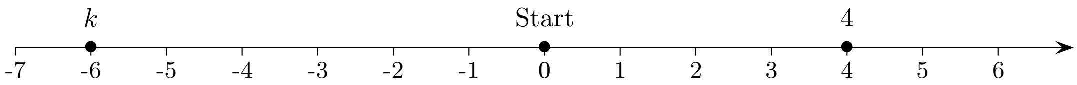
165, 572, 2002, 7072, 25194, 90440, 326876, 1188640, 4345965, 15967980, 58929450, 218349120, 811985790, ...

516 Summanden ergeben $P = 0{,}90$.
Dann überschreitet mein Computer-Programm den zulässigen Zahlbereich.

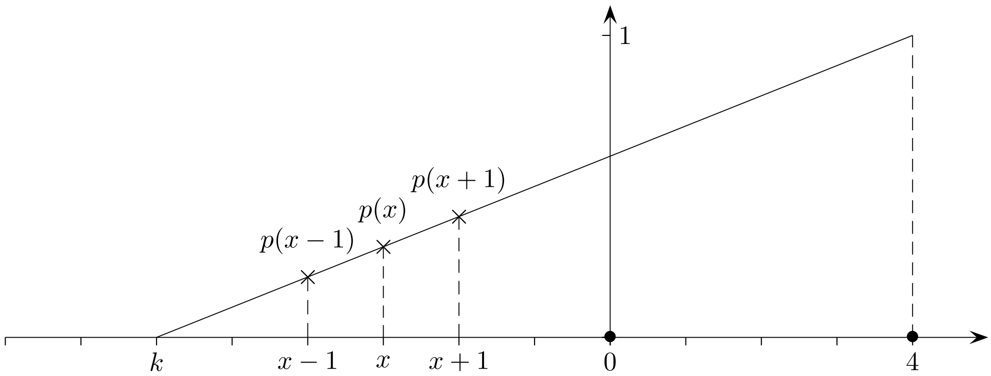


Die Vermutung liegt nahe, dass die Wahrscheinlichkeit, in 4 absorbiert zu werden, 1 beträgt.
Der Nachweis folgt.

Irrfahrt Wahrscheinlichkeit der Absorption



Ein Teilchen startet in 0 und springt jede Sekunde mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 auf der Geraden einen Schritt nach links oder rechts. In 4 und $k = -6$ wird es gestoppt, d. h. der absorbierende Rand ist $\{k,\ 4\}$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet die Irrfahrt in 4?



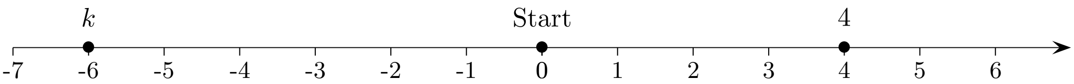
Sei $p(x)$ die Wahrscheinlichkeit, von x aus in 4 absorbiert zu werden.
Für $p(x)$ gilt dann:
(Dieses Vorgehen ist typisch für eine absorbierende Markow-Kette, die sich als Irrfahrt auf einem gerichteten Graphen deuten lässt.)

$$p(k) = 0$$
$$p(4) = 1$$
$$p(x) = \frac{1}{2}\left(p(x-1) + p(x+1)\right)$$

Daraus schließen wir, dass die Werte $p(x)$ auf einer Geraden liegen, die durch $(k \mid 0)$ und $(4 \mid 1)$ verläuft.

Für $k \to -\infty$ folgt $p(0) \to 1$.

Irrfahrt mittlere Schrittzahl



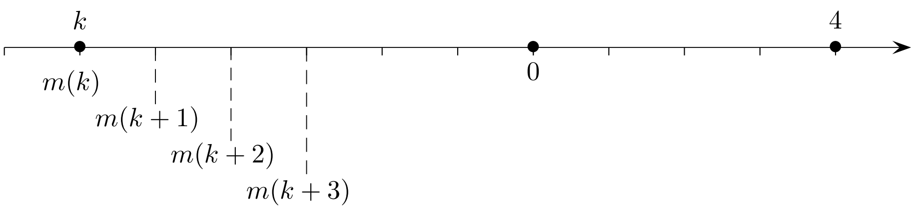
Ein Teilchen startet in 0 und springt jede Sekunde mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 auf der Geraden einen Schritt nach links oder rechts. In 4 und $k = -6$ wird es gestoppt, d.h. der absorbierende Rand ist $\{k,\ 4\}$. Wie groß ist die mittlere Dauer der Irrfahrt bis zur Absorption?

Sei $m(x)$ die mittlere Schrittzahl von x aus bis zur Absorption in 4.
Für $m(x)$ gilt dann:

$$m(k) = 0$$
$$m(4) = 0$$
$$m(x) = 1 + \frac{1}{2}(m(x-1) + m(x+1))$$

Dieses Vorgehen ist wieder typisch für eine absorbierende Markow-Kette:

Erwartungswert $m(x)$ eines inneren Zustands =
1 + gewichtetes Mittel der Erwartungswerte seiner Nachbarn.



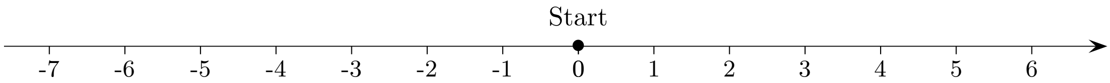
Mit der rekursiven Beziehung für $m(x)$ (nach $m(x+1)$ umstellen) werden die Erwartungswerte $m(k+2)$, $m(k+3)$, $m(k+4)$, ... bestimmt. Hierzu ist $m(k+1) = a$ zu setzen. a wird dann aus $m(4) = 0$ ermittelt.

$$m(k) = 0$$
$$m(k+1) = a$$
$$m(k+2) = 2(a-1)$$
$$m(k+3) = 3(a-2)$$
$$\cdots$$
$$*\ m(k+x) = x(a-(x-1))$$
$$m(4) = (-k+4)(a+k-3))$$
$$\Longrightarrow\ a = 3-k$$

$x = -k \quad \overset{*}{\Longrightarrow} \quad m(0) = |\,k\,| \cdot 4$
Für $k \to -\infty$ folgt $m(0) \to \infty$.

Das Teilchen wird also mit Wahrscheinlichkeit 1 in 4 absorbiert,
die mittlere Schrittzahl bis zur Absorption ist unendlich.

Irrfahrt   Mittlere Entfernung



Ein Teilchen startet in 0 und springt jede Sekunde mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 auf der Geraden einen Schritt nach links oder rechts. Wie groß ist die mittlere Entfernung vom Ursprung nach n Sekunden?

Sei X_n die Zufallsvariable mit Werten aus $\mathbb{Z}$, die den Ort nach n Schritten ergibt.
D sei die Zufallsvariable mit Werten aus $\{1, -1\}$, die einen Schritt beschreibt.
Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned} X_1 &= D \\ X_n &= X_{n-1} + D \end{aligned}$$

Um die Entfernung zum Ursprung zu erhalten, betrachten wir zunächst die Quadrate

$$\begin{aligned} X_1^2 &= D^2 = 1 \\ X_n^2 &= (X_{n-1} + D)^2 \\ &= X_{n-1}^2 + 2X_{n-1}D + D^2 \end{aligned}$$

und gehen dann zum Erwartungswert über:

$$\begin{aligned} E[X_1^2] &= 1 \\ E[X_n^2] &= E[X_{n-1}^2] + \underbrace{E[2X_{n-1}D]}_{\text{Terme heben sich wegen } D = \pm 1 \text{ auf.}} + E[D^2] \\ &= E[X_{n-1}^2] + E[D^2] \end{aligned}$$

Mit der Rekursionsgleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} E[X_1^2] &= 1 \\ E[X_2^2] &= 2 \\ E[X_3^2] &= 3 \\ &\dots \\ E[X_n^2] &= n \end{aligned}$$

Die mittlere Entfernung des Teilchens vom Ursprung beträgt somit $E[\,|X_n|\,] = \sqrt{n}$.
Das Ergebnis kann für eine Irrfahrt in der Ebene verallgemeinert werden (Vektorrechnung, Skalarprodukt).