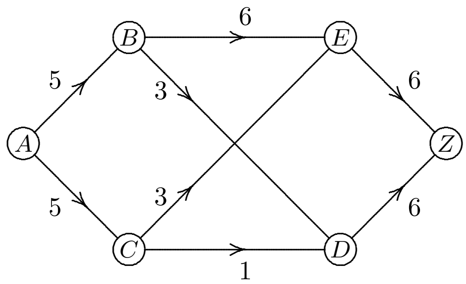
Maximaler Fluss

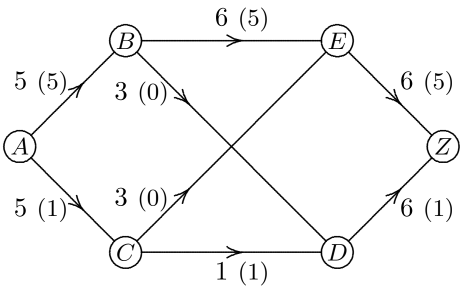
Ein multinationaler Südfrüchtekonzern hat Bananen von den mittelamerikanischen Plantagen zu den europäischen Märkten zu transportieren. Er möchte die freien Transportkapazitäten seiner Schifffahrtslinien optimal nutzen.
Wir beschränken uns auf einen Ausgangshafen A und einen Zielhafen Z, die Häfen B und C liegen an der amerikanischen Küste, die Häfen D und E an der europäischen.



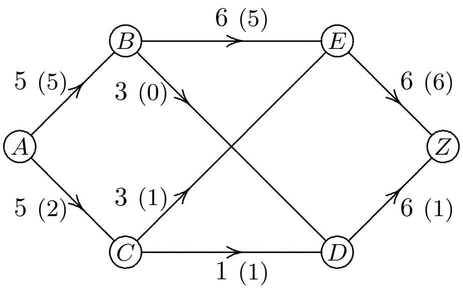
Die Zahlen an den gerichteten Kanten geben die freie Transportkapazität (etwa in 10000 BRT) zwischen ihren Anfangs- und Endpunkten an.

Wie groß ist die maximale von A nach Z transportierbare Bananenmenge, wenn unterwegs keine Bananen verloren gehen, dazukommen oder gelagert werden?
In der Sprache der Graphentheorie ist der maximale Fluss von der Quelle A zur Senke Z gesucht.

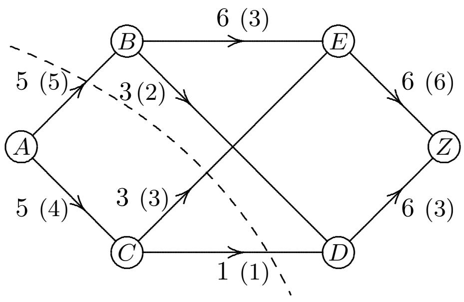
Wir probieren:
Auf dem Weg $ABEZ$ lassen sich maximal 5 Einheiten transportieren, weil dann die Kante AB bereits gesättigt ist. Auf dem Weg $ACDZ$ lässt sich maximal eine weitere Einheit nach Z schaffen.
Wir notieren uns die bisher erreichte Auslastung der Kanten hinter ihren Kapazitäten:



Der Weg $ACEZ$ enthält sämtlich ungesättigte Kanten. Über ihn kann maximal eine zusätzliche Einheit nach Z transportiert werden. Mehr als insgesamt 7 Einheiten scheint man also nicht von A nach Z schaffen zu können:



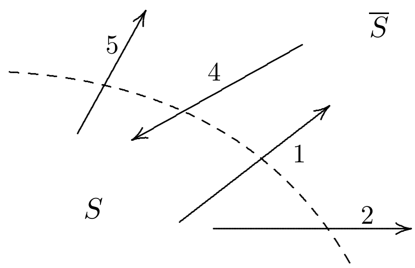
Der so gefundene Fluss ist jedoch nicht maximal! Überzeugen wir uns:



Offensichtlich hätte man die Suche nach einem maximalen Fluss noch nicht abbrechen dürfen. Hätte man längs des Wegs $ACEBDZ$ den Fluss dadurch vergrößert, dass man ihn auf allen vorwärts gerichteten Kanten um 2 Einheiten erhöht und auf der rückwärts gerichteten Kante zwischen E und B um 2 vermindert hätte, so wäre man zum angegebenen Fluss gekommen.
Der angegebene Fluss lässt sich nun nicht weiter vergrößern, denn die Kanten AB, CE und CD des Schnittes (gestrichelte Linie) sind alle gesättigt, d. h. es kann nicht mehr von A nach Z fließen, als die Summe dieser Kapazitäten beträgt, nämlich 9 Einheiten.

Wie groß kann der Fluss in einem Graphen werden?
Zur einfachen Formulierung der Antwort sind einige Definitionen hilfreich:

Zerlegt man die Menge der Knoten des Graphen in zwei Teilmengen S und $\overline{S}$, mit $A \in S$ und $Z \in \overline{S}$, dann heißt die Menge aller Kanten, die von einem Knoten von S zu einem Knoten von $\overline{S}$ führen, der Schnitt von S. Unter der Kapazität eines Schnittes verstehen wir die Summe der Kapazitäten aller Kanten, die von S nach $\overline{S}$ führen.



Die Kapazität dieses Schnittes beträgt 8

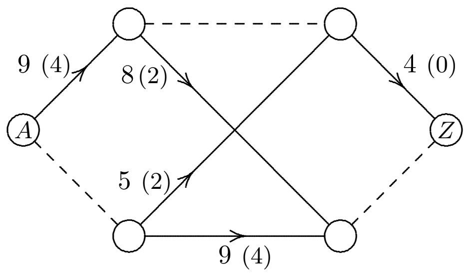
Es ist offensichtlich, dass der maximale Fluss höchstens so groß sein kann wie ein Schnitt mit kleinster Kapazität (minimaler Schnitt). Es gilt sogar:

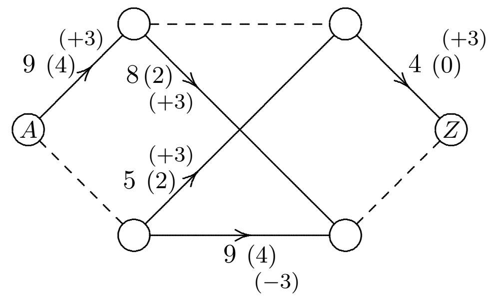
Der Wert eines maximalen Flusses ist gleich der Kapazität eines minimalen Schnittes.

(Ford, Fulkerson, 1957)

Die Beweisidee besteht darin, dass ein Anfangsfluss schrittweise verbessert wird, bis ein Schnitt mit gesättigten Kanten entsteht. Dies muss dann ein minimaler Schnitt sein.

Die folgende Aufgabe soll das Verfahren zur Flussvergrößerung verdeutlichen:
Um wie viele Einheiten kann dieser Fluss vergrößert werden?



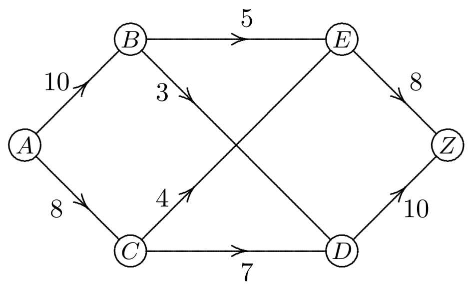


Eine Erhöhung des Flusses in den Vorwärtskanten um 3 Einheiten und eine Verringerung in der Rückwärtskante um denselben Betrag vergrößert insgesamt den Fluss um 3 Einheiten. Dies ist das Minimum aller offenen Kapazitäten bei den Vorwärtskanten und dem Fluss in der Rückwärtskante. Die teilweise Umlenkung dieses Kantenflusses vergrößert den Gesamtfluss. Bei mehreren Rückwärtskanten sind natürlich alle ihre Kantenflüsse bei der Bestimmung des Minimums zu berücksichtigen.

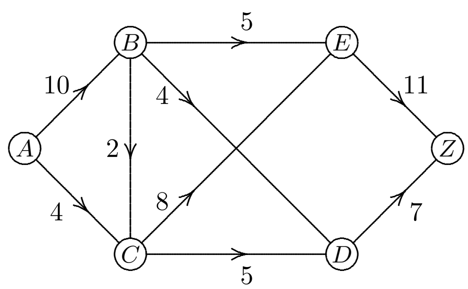
Ein Fluss lässt sich also stets vergrößern, falls der Graph noch einen Kantenzug enthält, dessen Vorwärtskanten sämtlich nicht gesättigt sind und dessen Rückwärtskanten einen positiven Fluss aufweisen. Ein maximaler Fluss liegt dann vor, wenn die Suche (mit A beginnend) nach Kantenzügen mit dieser Eigenschaft stets in von Z verschiedenen Knoten endet, von denen dann nur gesättigte Vorwärtskanten oder Rückwärtskanten mit dem Fluss null ausgehen. Diese Endknoten bestimmen einen Schnitt, dessen Kapazität der maximale Fluss ist.
Da dieser Fluss durch einen Schnitt bestimmt wird und kleinergleich der Kapazität jeden Schnitts sein muss, hat er die Kapazität eines minimalen Schnitts.

Aufg. Gesucht ist der maximale Fluss.

a)

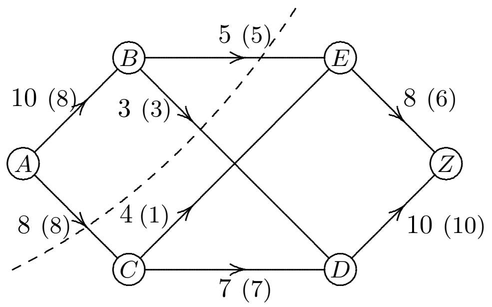


b)



Lösungen:

a)



b)