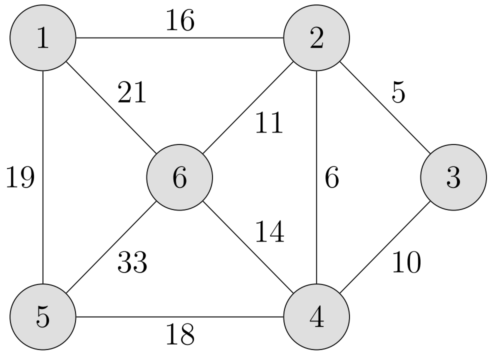
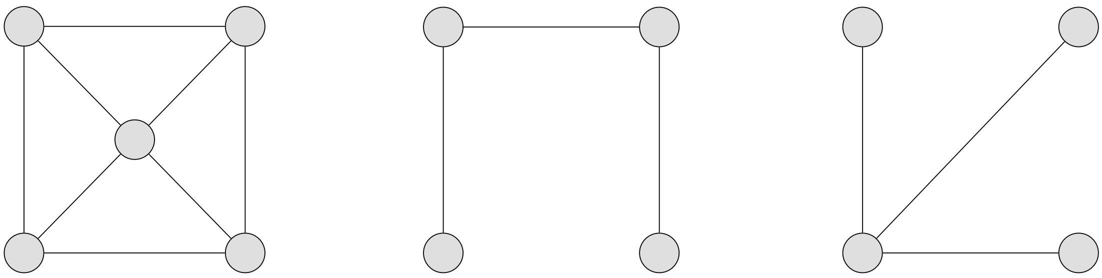
Minimal spannender Baum



Die Kreise zeigen die vorgesehenen Standorte neu zu errichtender Filialen einer Bank. Entlang der bestehenden Straßen sollen Telefonleitungen so gelegt werden, dass alle Filialen miteinander verbunden sind und die Verlegungskosten minimal sind. Die Zahl - in Geldeinheiten - an jeder Kante gibt an, wie teuer die Errichtung einer Telefonverbindung zwischen ihren Endpunkten ist.

In der Sprache der Graphentheorie ist ein minimaler spannender Baum gesucht, d. h. ein zusammenhängender Teilgraph ohne Schleifen und mit allen Knoten, bei dem die Summe der Kantenbelegungen minimal ist.



Graph mit zwei seiner spannenden Bäume

Algorithmus von Prim (1957)

1. Schritt: *Suche eine Kante mit minimalen Kosten.*
Diese Kante bildet mit den zugehörigen Endknoten den Anfang des Baums.

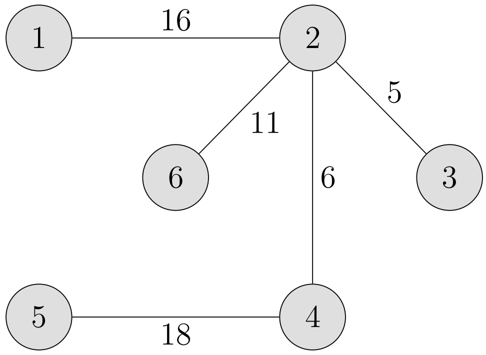
2. Schritt: *Suche unter allen Kanten, die von einem Knoten des Baums zu einem Knoten führen, der nicht zum Baum gehört, eine mit minimaler Belegung und füge diese Kante mit ihren Endknoten dem Baum hinzu.*

Wiederhole diesen Schritt, bis es keinen solchen Knoten mehr gibt.

Algorithmus von Prim

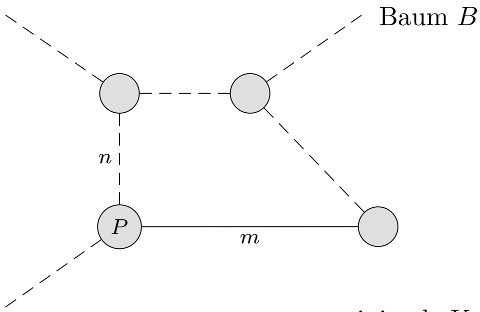
Dieser Algorithmus endet mit einem minimal spannenden Baum.
Nachweis?

Der Algorithmus kann noch vereinfacht werden, indem im l. Schritt mit einem beliebigen Knoten begonnen wird, der dann den Anfang des Baums darstellt.



Lösung der obigen Aufgabe

Im minimal spannenden Baum gehört zu jedem Knoten die minimale Kante.



m minimale Kante von P

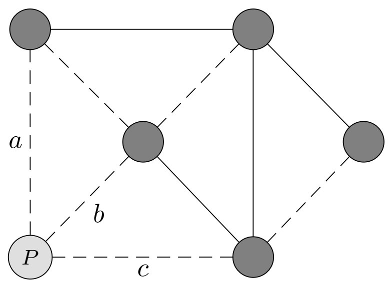
Indirekter Beweis:
Es sei ein minimaler spannender Baum B gegeben, der einen Knoten P enthält, dessen minimale Kante m nicht zu B gehört, sondern die Kante n; es ist Kosten(n) > Kosten(m). Das Hinzufügen von m zu B erzeugt eine einzige Schleife in B. Entfernt man die in B liegende Kante n, dann wird die Schleife aufgebrochen und es entsteht wieder ein spannender Baum, der wegen Kosten(n) > Kosten(m) einen geringeren Kostenaufwand als B hat. Dies stellt einen Widerspruch zur Annahme dar, dass schon B ein minimaler spannender Baum war.

Algorithmus von Prim

Behauptung:
Der Algorithmus von Prim endet mit einem minimal spannenden Baum.

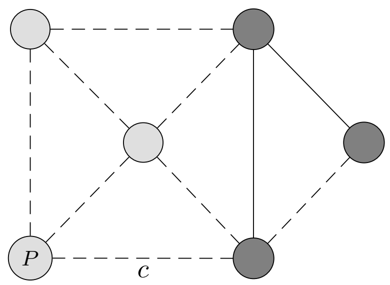
Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.
Zunächst beweisen wir die Aussage:

Der Algorithmus von Prim erzeugt zu jedem Knoten die minimale Kante.



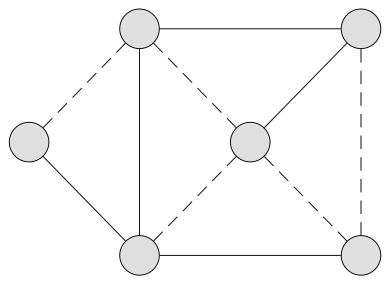
Beweis:
Wir betrachten die Situation, in der z. B. P zum schon erzeugten Baum hinzugefügt wird. Zwei Fälle werden unterschieden:

1. Fall
Im erzeugten Baum fehlt nur noch P. Dann liefert der Algorithmus die minimale Kante, die von P ausgeht.



2. Fall
Im schon erzeugten Baum fehlt nicht nur P.
Wird P erzeugt, so hat unter allen Kanten, die vom schon bestehenden Baum ausgehen, c die minimale Belegung. Nachdem P dem Baum hinzugefügt wurde, wird im nächsten Schritt die minimale Kante - falls sie nicht schon c ist - erzeugt, da sie die kleinste Belegung der in Betracht kommenden Kanten hat.

Aufg.
Geben Sie eine mögliche Kantenbelegung an, so dass die durchgezogenen Kanten die zu den Knoten jeweils minimalen sind.



Algorithmus von Prim

Wenn wir zu jedem Knoten die minimale Kante aufsuchen und damit einen zusammenhängenden und alle Knoten umfassenden Baum erhalten, so würde dieser Graph auch vom Algorithmus von Prim erzeugt werden und es muss der minimale spannende Baum sein, da jeder Knoten durch eine Kante verbunden werden muss und die minimale Kante die geringsten Gesamtkosten verursacht.
Jedoch wäre denkbar, dass bei diesem Verfahren kein zusammenhängender Graph entsteht.

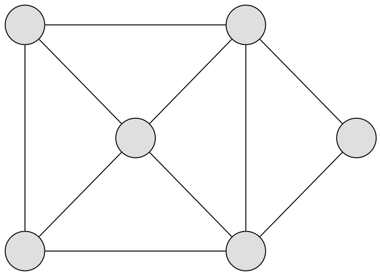
Beide Teilgraphen müssen durch eine Kante verbunden werden. Der Algorithmus von Prim liefert unter allen möglichen Kanten diejenige mit minimaler Belegung und damit den minimalen spannenden Baum. Falls mehr als zwei Teilgraphen zunächst entstehen, so müssen sie optimal verbunden werden, was durch den Algorithmus gewährleistet ist.

Algorithmus von Kruskal

zur Bestimmung eines minimal spannenden Baumes.

Durchlaufe alle Kanten in aufsteigender Reihenfolge nach ihrem Gewicht
und füge dabei diejenigen Kanten dem minimal spannenden Baum hinzu,
durch die kein Kreis entsteht.
Die kürzeste Kante bildet den Anfang des minimal spannenden Baums.

Eulerscher Polyedersatz



Für einen zusammenhängenden planaren Graphen gilt:

Knotenzahl + Flächenzahl = Kantenzahl + 2