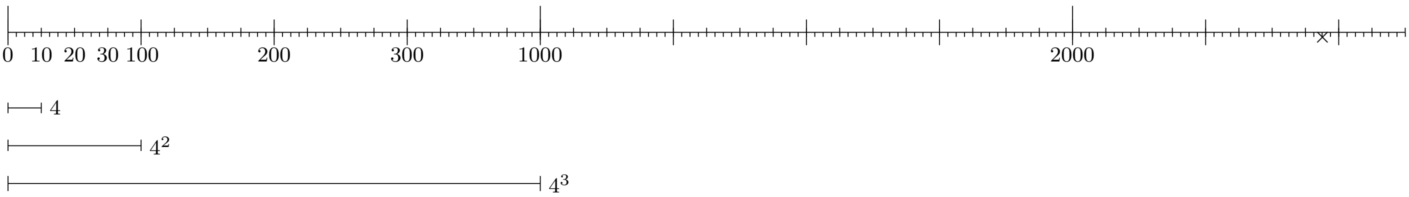
Stellenwertsystem

Ein Zweifinger-Faultier (es kann bis 4 zählen) möchte die Anzahl die Blätter (senkrechte Striche) bis zur Knospe (×) zählen, um einem anderen Faultier die Position mitzuteilen.
Zunächst wird das Faultier jeweils 4 Blätter zu einer 4-Einheit bündeln. 4 dieser 4-Einheiten ergeben die nächst größere 4^2-Einheit, 4 dieser 4^2-Einheiten ergeben die nächst größere 4^3-Einheit.

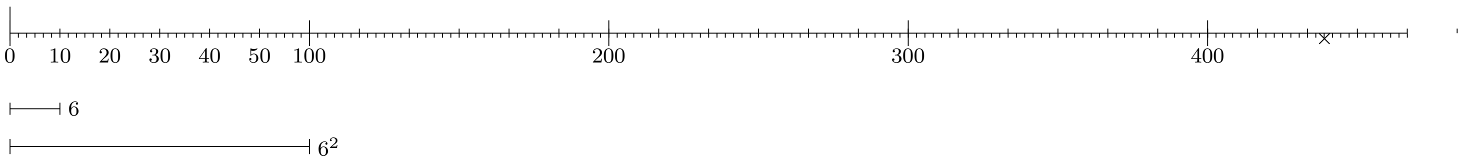


Erläutere die Zählweise.

$$
\begin{array}{r}
1 \\
2 \\
3 \\
4 = 10 \\
11 \\
12 \\
13 \\
20 \\
2 \cdot 4 + 1 = 21 \\
22 \\
23 \\
30 \\
31 \\
32 \\
33 \\
4^2 = 100 \\
\ldots \\
4^2 + 4 + 1 = 111 \\
\ldots \\
4^3 = 1000 \\
\ldots \\
2 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 2 = 2132
\end{array}
$$

Stellenwertsystem

Wie sieht das Ergebnis für ein Dreifinger-Faultier (es kann bis 6 zählen) aus?
Zunächst wird das Faultier jeweils 6 Blätter zu einer 6-Einheit bündeln. 6 dieser 6-Einheiten ergeben die nächst größere 6^2-Einheit.



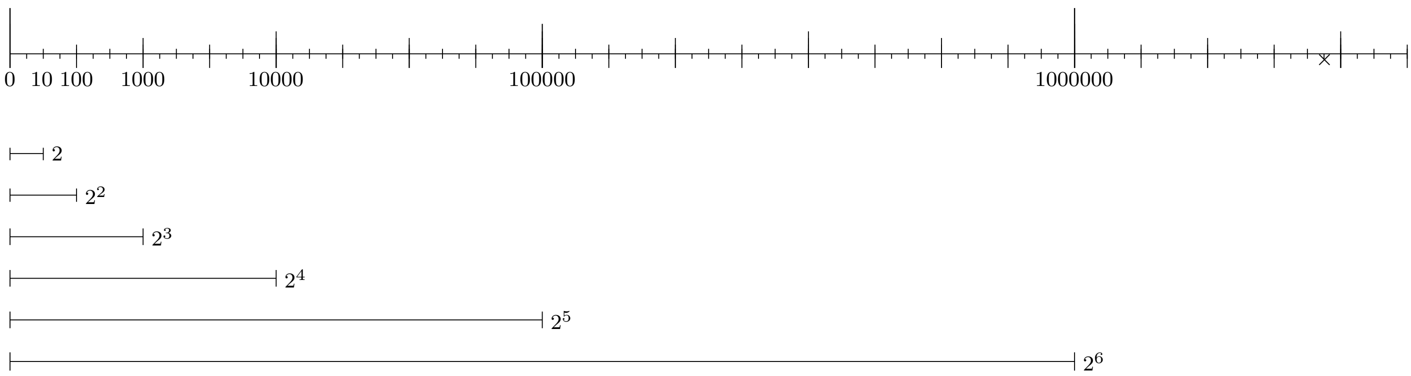
Erläutere die Zählweise.

$$
\begin{aligned}
&1\\
&2\\
&3\\
&4\\
&5\\
6 &= 10\\
&11\\
&12\\
&13\\
&14\\
&15\\
&20\\
2\cdot 6+1 &= 21\\
&22\\
&23\\
&24\\
&25\\
&30\\
&\dots\\
6^2 &= 100\\
&\dots\\
6^2+6+1 &= 111\\
&\dots\\
4\cdot 6^2+2\cdot 6+2 &= 422
\end{aligned}
$$

Wie sieht das Ergebnis für ein Fünffinger-Faultier aus?

Dual-, Binärsystem

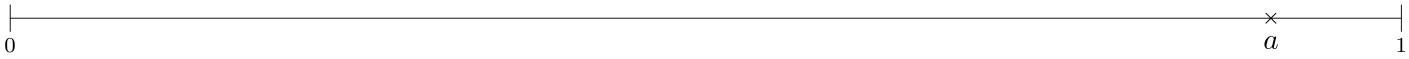
Wir zählen die Anzahl der senkrechten Striche bis × einschließlich
und bündeln zunächst jeweils 2 Striche zu einer 2er-Einheit (dual 10).
2 dieser 2er-Einheiten ergeben die nächst größere 4er-Einheit (dual 100).
2 dieser 4er-Einheiten ergeben die nächst größere 8er-Einheit (dual 1000).



Erläutere die Zählweise.

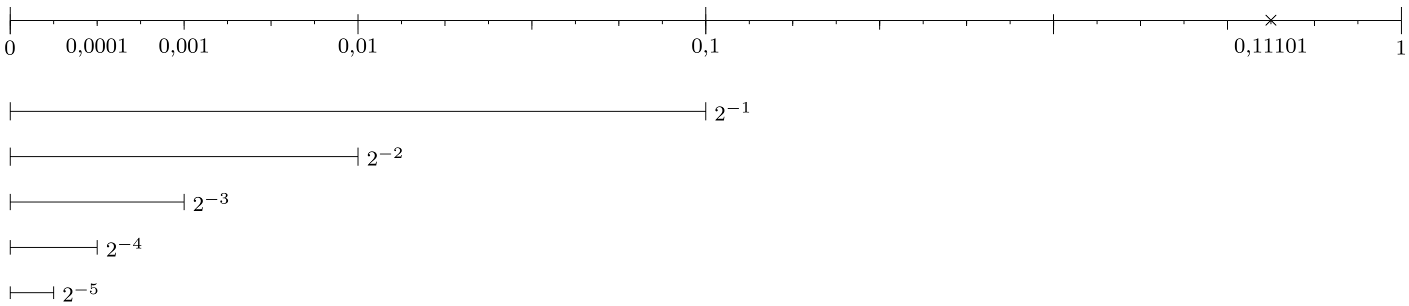
1
10
11
100
101
110
111
1000
...
1111
10000
...
100000
...
1000000
...
$2^6 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 1001111 \quad = 79_{10}$

Gebrochene Dualzahlen



Gesucht ist die duale Position a von $\times$.

Das Intervall $[0;1]$ wird halbiert. $\times$ befindet sich in der rechten Hälfte.
a beginnt mit 0,1.
Die rechte Hälfte wird erneut halbiert. $\times$ befindet sich in der neuen rechten Hälfte.
a beginnt mit $0{,}1 + 0{,}01 = 0{,}11$ usw.
0,1110 entsteht, weil $\times$ in der linken Hälfte der Halbierung liegt.

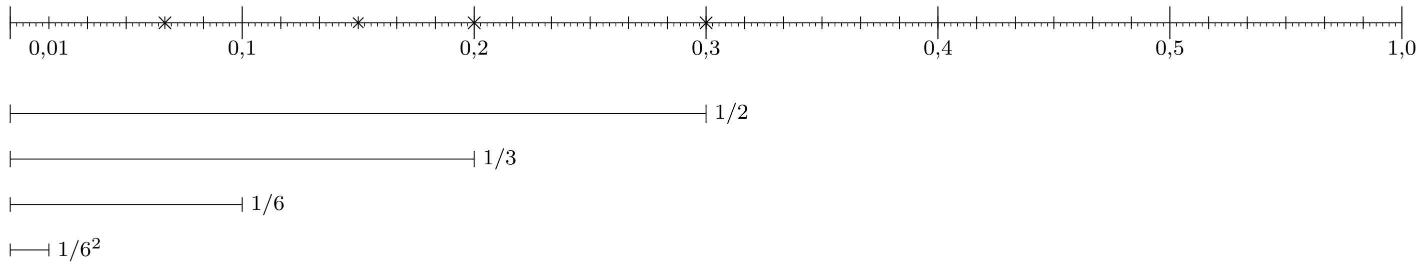


Alle Punkte des Intervalls $[0;1]$ erhalten auf diese Weise eine im Allgemeinen unendliche duale Position.
Dezimal 0,1 ergibt dual $0{,}\overline{1100}$, dezimal 0,9 ergibt dual $0{,}1\overline{1100}$.

Der Halbierungsprozess zeigt:
Nur Zweierpotenzen und deren Summen wie $2^{-3} + 2^{-4} = 3 \cdot 2^{-4}$ lassen sich dual endlich darstellen.

Die Verwendung von z. B. dezimal $0{,}1 + 0{,}2$ im Dualsystem führt in Programmiersprachen,
die auf dem IEEE 754-Standard aufbauen (z. B. JavaScript), wegen des Rundungsfehlers zu einem
minimal abweichenden Ergebnis.

Gebrochene Zahlen zur Basis 6



Welche Punkte des Intervalls $[0;1]$ erhalten eine Position mit endlicher Darstellung zur Basis 6?

$1/3 = 0{,}2_6$ (zur Basis 6)
$1/2 = 0{,}3_6$
$1/5 = 0{,}\overline{1}_6$

Eine 6-fache Unterteilung bewirkt auch eine Halbierung und Drittelung.
Der Zusammenhang ist nun sichtbar.

Nur diejenigen Zahlen, deren Nenner sich aus den Primfaktoren 2 und 3 der Basis 6 (allgemein aus den Primfaktoren der Basis) zusammensetzt, lassen sich endlich darstellen.

$1/2 + 1/3 + 1/6^2 = 31/6^2 = 0{,}51_6$
$1/10 = 0{,}0\overline{3}_6$

Für Zahlen aus $\mathbb{Q}$ ist die Darstellung in jeder Basis endlich oder periodisch. Bei einer Division können nur endlich viele Reste entstehen, so dass eine Wiederholung unabdingbar ist.