Leibnizschule Hannover

- Seminararbeit -

Filtervorgänge

J. L.

Schuljahr: 2010

Fach: Mathematik

...

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Aufgabenstellung

Das Thema meiner Facharbeit lautet „Filtervorgänge“.
Die Aufgabe ist, das Volumen von Wasser und dessen Änderung in einem Filter, z.B. dem einer Kaffeemaschine, zu erfassen. Die temporären Verläufe sollen modelliert werden.

1.2 Problembeschreibung

Aus einem Behälter $B1$ fließt Wasser in einen Filter B2.
Der Zufluss Z, der angibt, welches Wasservolumen in einem bestimmten Zeitpunkt zufließt, ist konstant.
Zu einem bekannten Zeitpunkt t_E stoppt der Zufluss abrupt.
Der Filter $B2$ hat die Form eines geraden Kreiskegels ohne Grundseite, mit der Öffnung nach oben.
Der Öffnungswinkel β ist bekannt.
Desweiteren wird davon ausgegangen, dass der Filter das Volumen des Wassers in jedem Fall fasst, was es überflüssig macht, die Höhe, die Seitenlänge oder die Mantelfläche des Kegels zu kennen.
Die Filterkonstante D gibt an, welches Volumen des Wassers durch eine bestimmte Fläche des Filters in einem bestimmten Zeitraum fließt. Sie ist bekannt.
Das Wasser, dass aus dem Filter $B2$ austritt, gelangt in einen 3. Behälter $B3$. Dieser ist weitestgehend uninteressant.

Teile dieser Problematik wie die Filterform oder die Zuflussgeschwindigkeit werden später variiert.

1.3 Aufbau der Arbeit

Nach der Einleitung werde ich den analytischen und den iterativen Lösungsweg darlegen.
Danach werden Teile der Problematik verändert.
Der Schlussteil enthält eine Zusammenfassung des Hauptteils, so wie ein Resümee.

2 Lösungswege

Wie ich bereits erwähnte, gibt es 2 Lösungswege, die in dieser Facharbeit dargestellt werden.

Zum Einen den klassischen, analytischen Weg, der die Proportionalität zwischen der zeitlichen Änderung des Volumens und dem Volumen selbst bestimmt und durch Integration zu einer exakten Lösung führt.

Zum Anderen den iterativen Weg. Hierbei werden wiederholt Zufluss und Abfluss in einem kleinen Zeitraum unabhängig von einander berechnet und zum bereits vorhandenen Bestand addiert.
Der resultierende Graph ist jedoch nur eine Näherung.

2.1 Analytische Lösung

Die Veränderung des Volumens ΔV im Filter, in einem bestimmten Zeitraum Δt, ist die Differenz aus dem in diesem Zeitraum zugeflossenen Volumen und dem in diesem Zeitraum abgeflossenen Volumen.
Da der Zufluss Z konstant ist, wird das zugeflossene Volumen wie folgt berechnet:

$$\Delta V_{\mathit{Zufluss}} = Z \cdot \Delta t$$

Die Filterkonstante D gibt an, welches Volumen durch eine bestimmte Fläche des Filters in einer bestimmten Zeit fließt. Nun wird die vereinfachende Annahme getroffen, dass D von der Höhe des Wasserstandes im Kegel abhängig ist und nicht vom Druck. Diese Annahme macht es überflüssig, die exakte Auswirkung des Druckes zu bestimmen, was sehr umständlich wäre und nicht Thema dieser Arbeit werden soll.
Daraus folgt für das im Zeitraum Δt abgeflossene Volumen:

$$\Delta V_{\mathit{Abfluss}} = D \cdot M \cdot h \cdot \Delta t,$$

wobei M die Mantelfläche ist, die vom Wasser benetzt wird.
Die Veränderung des Volumens im Filter ergibt sich:

$$\Delta V = Z \cdot \Delta t - D \cdot M \cdot h \cdot \Delta t$$

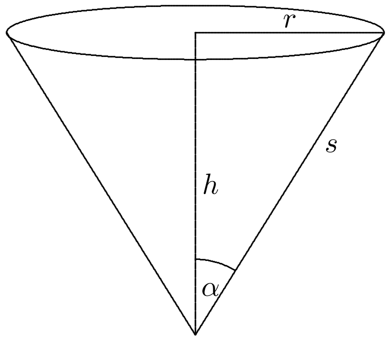
Da die Form des Kegels bekannt ist, lässt sich für jedes Volumen eine Mantelfläche und eine Höhe bestimmen.
Es muss also möglich sein, die folgende Formel aufzustellen.

$$k \cdot V = M \cdot h$$

Unter Einbezug der Formeln der Mantelfläche und des Volumens eines geraden Kreiskegels lässt sich k bestimmen.

$k = 3 \cdot \frac{s}{r}$,

wobei s die Mantellinie des Kegels und r der Radius der Grundseite ist (siehe folgende Skizze).



r sowie s sind nicht konstant, sondern vom Volumen abhängig, aber das Verhältnis der beiden Größen zu einander bleibt gleich, da sie in dem gedachten rechtwinkligen Dreieck, dass die Mantellinie mit der Höhe und dem Radius der Grundseite bildet, die Ankathete des Winkels α und die Hypothenuse sind. Wobei α die Hälfte des bekannten Öffnungswinkels β ist. Daraus folgt:

$k = \frac{3}{\sin \alpha}$

Durch Einsetzen erhalten wir, die folgende Gleichung.

$\Delta V = Z \cdot \Delta t - D \cdot k \cdot V \cdot \Delta t$

Division durch Δt führt zu einer Differenzialgleichung, da $\frac{\Delta v}{\Delta t} = V'$.

$V' = Z - D \cdot k \cdot V$

Ausklammern von $D \cdot k$ hilft beim Deuten der DGL.

$V' = D \cdot k \cdot (\frac{Z}{D \cdot k} - V)$

Die Änderung des Volumens ist proportional zu der Differenz zwischen einer konstanten Grenze $\frac{Z}{D \cdot k}$ und dem Volumen selbst. Der Proportionalitätsfaktor ist $D \cdot k$.
Offenkundig ist $V(t)$ eine Funktion des beschränkten Wachstums.

Die DGL lässt sich exakt lösen:

$$
\begin{aligned}
V'(t) &= D \cdot k \cdot (\tfrac{Z}{D \cdot k} - V(t)) \qquad {}^{1} \\
\frac{V'(t)}{\frac{Z}{D \cdot k} - V(t)} &= k \cdot D \\
-\ln(\tfrac{Z}{D \cdot k} - V(t)) &= D \cdot k \cdot t + C \\
\ln(\tfrac{Z}{D \cdot k} - V(t)) &= -D \cdot k \cdot t + C \\
\tfrac{Z}{D \cdot k} - V(t) &= e^{-D \cdot k \cdot t - C} \\
V(t) &= \tfrac{Z}{D \cdot k} - e^{-D \cdot k \cdot t - C} \\
V(t) &= \tfrac{Z}{D \cdot k} - a \cdot e^{-D \cdot k \cdot t} \qquad mit \quad a = e^{-C}
\end{aligned}
$$

Da der Filter zum Zeitpunkt $t = 0$ leer ist, gilt $a = \frac{Z}{D \cdot k}$.

Die vollständige Formel des Volumens im Filter in Abhängigkeit von der Zeit für die Zulaufphase $[0; t_E]$ lautet:

$V(t) = \frac{Z}{D \cdot k} - \frac{Z}{D \cdot k} \cdot e^{-D \cdot k \cdot t}$

Zur Bestimmung der Änderung des Volumens in der Auslaufphase $]t_E; \infty]$, in der kein Wasser mehr zufließt wird der selbe Ansatz verwendet, ohne Zufluss:

$$\Delta V = -D \cdot k \cdot V \cdot \Delta t$$

Division durch Δt führt zu:

$$V'(t) = -D \cdot k \cdot V(t)$$

Das heißt, dass der Zuwachs an jeder Stelle t proportional ist zum bereits vorhandenen Volumen. Der Proportionalitätsfaktor ist $-D \cdot k$.
$V(t)$ ist hier eine Funktion des exponentiellen Zerfalls, da der Proportionalitätsfaktor negativ ist.

Auch diese DGL lässt sich exakt lösen:

$$\begin{aligned}
V(t) &= -D \cdot k \cdot V(t) \qquad \text{[2]} \\
\frac{V'(t)}{V(t)} &= -D \cdot k \\
\ln V(t) &= -D \cdot k \cdot t + C \\
V(t) &= e^{-D \cdot k \cdot t + C} \\
V(t) &= e^{-D \cdot k \cdot t} \cdot e^{C} \\
V(t) &= a \cdot e^{-D \cdot k \cdot t}
\end{aligned}$$

Da die Funktion $V(t)$ der Ausflussphase das Volumen des Wassers im zeitlichen Verlauf nach der Zuflussphase beschreibt, muss sie bis zur Stelle t_E verschoben werden. Weil der Anfangswert dieser Funktion dem Funktionswert von $V(t)$ zum besagten Zeitpunkt entspricht, ist $a = \frac{Z}{D \cdot k} - \frac{Z}{D \cdot k} \cdot e^{-D \cdot k \cdot t_E}$.

Die vollständige Formel für das Volumen im Filter, in Abhängigkeit von der Zeit, für die Auslaufphase lautet:

$$V(t) = \left(\frac{Z}{D \cdot k} - \frac{Z}{D \cdot k} \cdot e^{-D \cdot k \cdot t_E}\right) \cdot e^{-D \cdot k \cdot (t - t_E)}$$

Die beiden Formeln

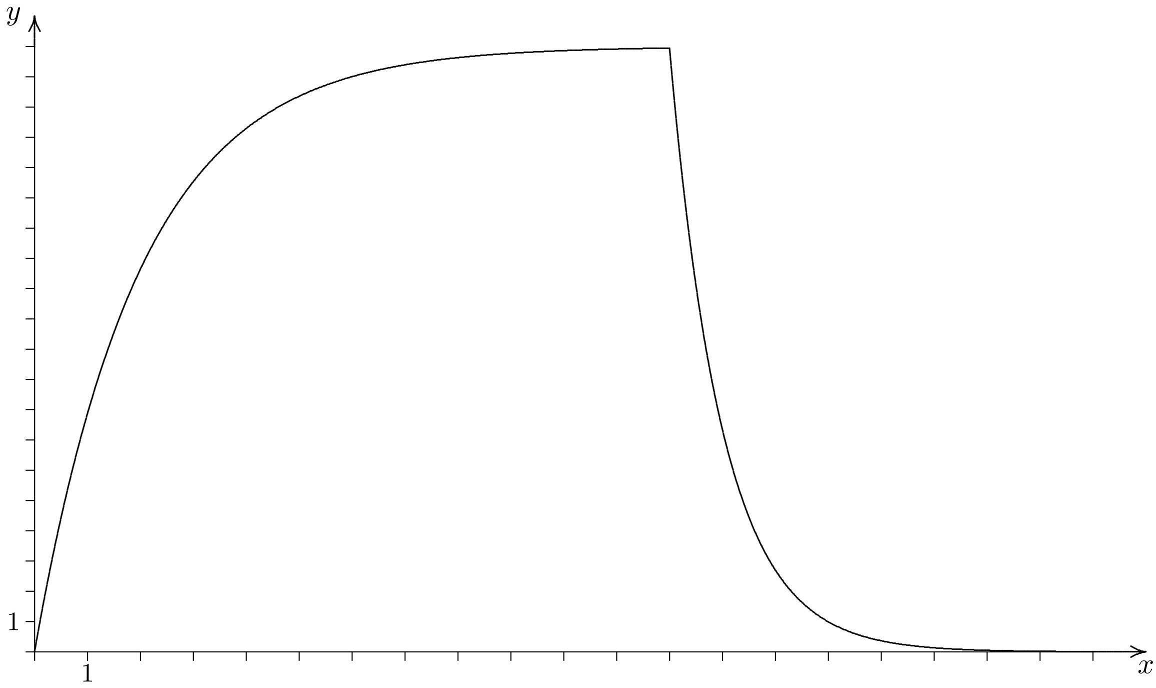
$$V(t) = \frac{Z}{D \cdot k} - \frac{Z}{D \cdot k} \cdot e^{-D \cdot k \cdot t}$$

für die Zuflussphase $[0; t_E]$ und

$$V(t) = \left(\frac{Z}{D \cdot k} - \frac{Z}{D \cdot k} \cdot e^{-D \cdot k \cdot t_E}\right) \cdot e^{-D \cdot k \cdot (t - t_E)}$$

für die Abflussphase $]t_E; \infty]$ beschreiben nun zusammen das Volumen im Filter, exakt, wenn man von der Ungenauigkeit absieht, die durch die eine vereinfachende Annahme entsteht.

Graph dieser Funktionen:



2.2 Iterative Näherung

Das iterative Verfahren berechnet, wie schon erwähnt, das zugeflossene und das abgeflossene Volumen unabhängig von einander für einen sehr kleinen Zeitraum T und addiert diese Volumen dann zu dem bereits vorhandenen.
Da der Zufluss konstant ist, ist die Berechnung des zufließenden Volumens klar:

$$V_Z = Z \cdot T$$

Der Ausfluss hängt, wie zuvor, von D, M, h und Δt ab. Allerdings ist $\Delta t = T$.

$$V_A = D \cdot M \cdot h \cdot T$$

Die Differenz aus zugeflossenem und abgeflossenem Volumen ist folglich:

$$\Delta V = Z \cdot T - D \cdot M \cdot h \cdot T$$

Da nicht die Änderung des Volumens im Zeitraum T, sondern das absolute Volumen gesucht wird, muss das bereits vorhandene Volumen addiert werden.

$$V_n = V_{n-1} + Z \cdot T - D \cdot M \cdot h \cdot T$$

Sowohl h als auch M sind keine Konstanten, sondern vom Volumen abhängig. $M \cdot h$ lässt sich durch $k \cdot V$ ersetzen (siehe analytische Lösung).
Dann ist $k = \frac{3}{\sin \alpha}$.
Das Volumen wird über den Zeitraum T als konstant angenommen, was die Ungenauigkeit dieser Näherung, im Vergleich zur analytischen Lösung bedingt, die jedoch schrumpft,

wenn T nur klein genug gewählt wird.

$$V_n = V_{n-1} + Z \cdot T - D \cdot T \cdot k \cdot V_{n-1}$$

Der Zufluss versiegt abrupt zum Zeitpunkt t_E, weshalb diese Formel einen eingeschränkten Gültigkeitsbereich hat.

(1) $0 < n$

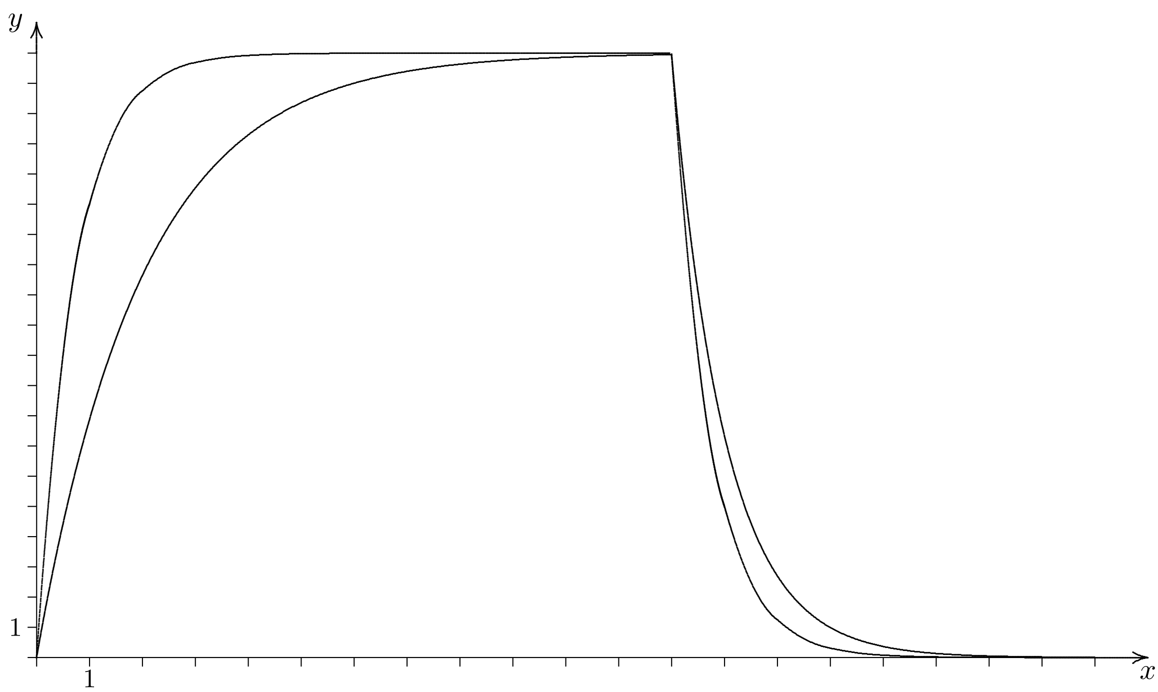
(2) $n \cdot T < t_E$

Für $n \cdot T \geq t_E$ gilt die folgende Gleichung, ohne den Zufluss:

$$V_n = V_{n-1} - D \cdot T \cdot k \cdot V_{n-1}$$

$V(0) = 0$, weil der Filter zum Zeitpunkt $0 \cdot T$ leer ist.
Diese beiden Formeln nähern den exakten Verlauf von $V(t)$ relativ gut an.
Der Vorteil dieses Verfahrens ist der geringe mathematische Aufwand.

Ein Vergleich der analytisch ermittelten Funktionen (siehe Analytische Lösung), mit der Kurve, die mit der iterativen Gleichung errechnet wurde:



3 Variationen der Problematik

3.1 Variation der Filterform

Nun soll die Form des Filters verändert werden. Ich betrachte jetzt einen zylinderförmigen Filter.
In dieser Betrachtung wird auf die vereinfachende Annahme verzichtet, dass D von der Höhe des Wasserstandes abhängt, da diese zu einem komplizierten Problem führt. Stattdessen wird D als konstant und von Druck unabhängig betrachtet. Nur der Radius r, der Grundseite G ist bekannt. Wieder wird davon ausgegangen, dass der Filter das Volumen des Wassers fasst, weshalb die Höhe unwichtig ist.

Der Ansatz:

$$\Delta V = Z \cdot \Delta t - D \cdot M \Delta t$$

M lässt sich, mit Hilfe der Formeln für das Volumen und für die Mantelfläche eines Zylinders umformen zu $k \cdot V$, mit $k = \frac{2}{r}$.

Dies ist der einzige Unterschied zu der Berechnung des Volumens im Kegel.
Lösung:

Zulaufphase $[0; t_E]$:

$$V(t) = \frac{Z}{D \cdot k} - \frac{Z}{D \cdot k} \cdot e^{-D \cdot k \cdot t}$$

Ablaufphase $]t_E; \infty]$:

$$V(t) = \left(\frac{Z}{D \cdot k} - \frac{Z}{D \cdot k} \cdot e^{-D \cdot k \cdot t_E}\right) \cdot e^{D \cdot k \cdot (t - t_E)}$$

Die Konstante k gibt an, wie M von V abhängen, was ausschließlich von der Filterform abhängt. Deshalb ist k der einzige Wert, in der Berechnung von $V(t)$, der sich durch eine andere Filterform ändert. k heißt Filterformfaktor.

3.2 Variation des Zulaufs

Nun soll der Zulauf variiert werden. Der Filter hat die Form eines Kegels. Es wird angenommen, dass das Volumen im Behälter $B1$ zu einem Zeitpunkt t durch die folgende Formel erfasst wird:

$$V(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$$

Mit $b < 0$. Das Volumen sinkt streng monoton im Intervall $[0; \infty]$, weshalb die Zuflussphase niemals endet und keine Betrachtung einer Nachlaufphase nötig ist.
Das, bis zu einem Zeitpunkt t, aus dem Behälter $B1$ ausgeflossene Volumen wird durch die folgende Gleichung beschrieben.

$$V(t) = a - a \cdot e^{b \cdot t}$$

Es ist nötig zu wissen, welches Volumen in einem bestimmten Zeitpunkt zufließt, überflüssig ist es zu wissen, welches Volumen bis zu einem Zeitpunkt zufloss. Folglich muss $V(t)$ abgeleitet werden.

$$V'(t) = -a \cdot b \cdot e^{b \cdot t}$$

Der analytische Ansatz wird angepasst.

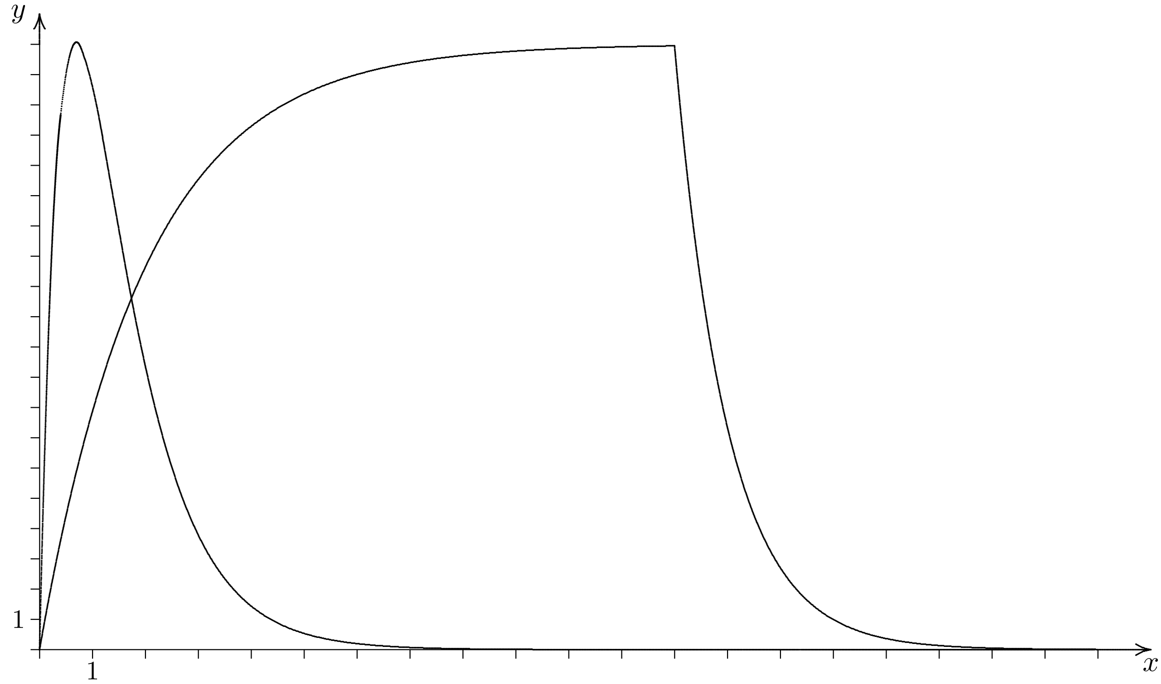
$$\Delta V = -a \cdot b \cdot e^{b \cdot t} \cdot \Delta t - D \cdot k \cdot V \Delta t$$

Division durch Δt führt wiederum zu der DGL des beschränkten Wachstums (siehe analytische Lösung). Diese lässt sich exakt lösen:

$$V(t) = \frac{-a \cdot b \cdot e^{b \cdot t}}{D \cdot k} - \frac{-a \cdot b \cdot e^{b \cdot t}}{D \cdot k} \cdot e^{-D \cdot k \cdot t}$$

Der wesentliche Unterschied zur Lösung mit konstantem Zufluss ist, dass Z hier von t abhängig ist.

Vergleich zwischen konstantem Zufluss bis zu einem Zeitpunkt und nicht konstantem Zufluss:



y
1
1
x

4 Schluss

4.1 Zusammenfassung

Ich habe im Kapitel „Lösungswege“ den analytischen Lösungsweg beschrieben. Diese exakte Möglichkeit der Modellierung des temporären Verlaufes des Volumens führte über die DGL des beschränkten Wachstums zum Ziel. Dies ist der Fall, weil bei einem größeren Volumen im Kegel die benetzte Fläche, durch die das Wasser ausfließt, größer ist. Damit ist auch der Ausfluss größer, wodurch das Volumen selbstverständlich langsamer steigt. Es liegt also auf der Hand, dass es sich um eine Funktion des beschränkten Wachstums handelt.
Ist der Kegel aber gefüllt und versiegt dann der Zufluss, so fließt das Wasser ab. Dadurch sinkt wiederum die Fläche, durch die es fließt, was den Ausfluss senkt.
Es ist klar, dass das Volumen in der Ausflussphase exponential sinkt.
Desweiteren habe ich noch eine alternative, zwar ungenauere aber einfachere, Lösungsmöglichkeit dargestellt, den iterativen Ansatz.

Im Kapitel Variationen habe ich erstens gezeigt, dass die Veränderung der Filterform lediglich die Konstante k beeinflusst. Wobei dies nur für einfache Körper gilt. Für solche, die sich in der Höhe wieder verengen, gilt dies nicht.
Zweitens habe ich gezeigt, dass, wenn der Zufluss Z von der Zeit t abhängig ist, die Funktion $Z(t)$ für Z in die bereits im Kapitel „analytische Lösung“ aufgestellte Funktion des beschränkten Wachstums für die Zulaufphase eingesetzt werden muss.

4.2 Resümee

...

5 Anhang

5.1 Literaturverzeichnis

(1) Direkt übernommen von:
http://nibis.ni.schule.de/ lbs-gym/AnalysisTeil2pdf/BeschraenktesWachstum.pdf

(2) Direkt übernommen von:
http://nibis.ni.schule.de/ lbs-gym/AnalysisTeil2pdf/Wachstum.pdf

(3) Alfred Rosings „Der Kaffee ist fertig...“
Ein Beitrag, der sich am Beispiel der Kaffeefiltrierung mit der Beschreibung eines kontinuierlich ablaufenden Prozesses, durch ein diskret, dynamisches Modell befasst.
Der analytische Lösungsweg wurde dort bereits grob umrissen.

(4) „Das große Tafelwerk“ Cornelsen-Verlag
Formelsammlung für Sek 1 und Sek 2

. . .