

# Leibnizschule Hannover

- Seminararbeit -

Schleppkurven

J. D.

Schuljahr: 2011

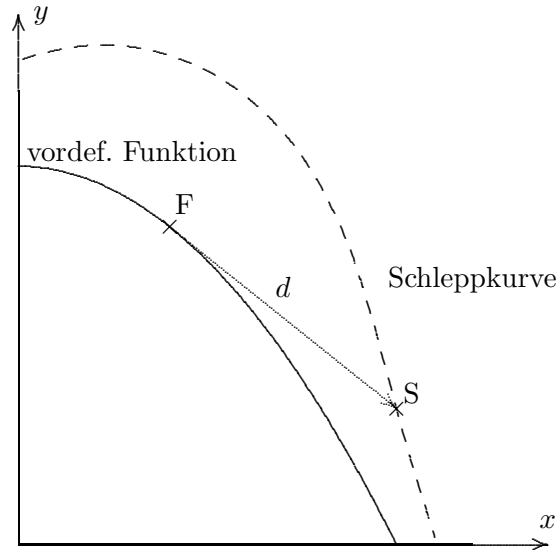
Fach: Mathematik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung: Die Schleppkurve und ihre Anwendung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Erarbeitung eines Verfahrens zur Berechnung</b>	<b>3</b>
2.1	Herleitung . . . . .	3
2.2	Schleppkurve einer Parameterkurve . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Beispiele von Schleppkurven</b>	<b>6</b>
3.1	Durchfahren einer Kurve mit einem zweiachsigen Fahrzeug . . . . .	6
3.2	Durchfahren einer Kurve mit einem mehrgelenkigen Fahrzeug . . . . .	7
3.3	Durchfahren eines Kreises . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Schleppkurven und Flächenberechnung</b>	<b>10</b>
4.1	Weitere Überlegungen . . . . .	10
4.2	Lastzug . . . . .	10
4.2.1	Die Maße . . . . .	10
4.2.2	Die überstrichene Fläche im Stabmodell . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Anhang</b>	<b>14</b>
5.1	Literaturverzeichnis . . . . .	14

# 1 Einleitung: Die Schleppkurve und ihre Anwendung

Bei einer Schleppkurve handelt es sich um eine Kurve, die das Verhalten eines Punktes  $S$  zu einem Punkt  $F$  beschreibt. Dabei bewegt sich der Punkt  $F$  auf einer vordefinierten Kurve, der Punkt  $S$  liegt auf der Tangente im Punkt  $F$  im konstanten Abstand  $d$  zu  $F$ . Die Menge der Punkte  $S$  liefert die Schleppkurve.



Ein Anwendungsgebiet von Schleppkurven ist die Berechnung der vom Fahrzeug überstrichenen Fläche beim Durchfahren einer Kurve bzw. im Verlauf eines beliebigen Fahrweges. Ausschlaggebend für die Größe dieser Fläche sind unter anderem die Anzahl der Gelenke (z.B. Anhängerkupplung bei einem Pkw mit Anhänger) und deren Abstände zueinander, sowie die Breite des Fahrzeuges.

In dieser Seminararbeit behandle ich die Anwendung von Schleppkurven bei der Planung von Straßenführungen zur Ermittlung der von einem mehrgelenkigen Fahrzeug überstrichenen Fläche beim Durchfahren gekrümmter Fahrwege.

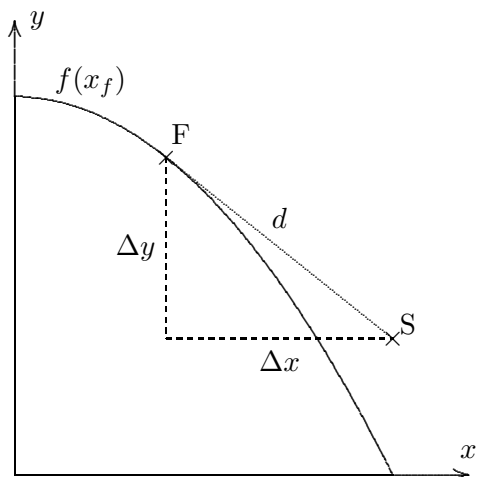
## 2 Erarbeitung eines Verfahrens zur Berechnung von Schleppkurven

Es handelt sich bei einer Schleppkurve um eine Menge von Punkten, deren  $x$ - und  $y$ -Koordinaten sich aus einer vordefinierten Kurve  $f(x_f)$  errechnen lassen.

Dabei besteht die Möglichkeit, dass einer  $x$ -Koordinate zwei oder mehrere  $y$ -Koordinaten zuzuordnen sind. Daher verwende ich für die Schleppkurve eine parametrische Darstellung: Die Koordinaten des Punktes  $S$  auf der Schleppkurve werden durch die Funktionen  $S_x(x_f)$  und  $S_y(x_f)$  beschrieben.

### 2.1 Herleitung

Ein Verfahren zur Berechnung einer Schleppkurve zu einer vordefinierten Kurve (Leitkurve) soll entwickelt werden. Gegeben ist die Funktion  $f(x_f)$ , auf der der Punkt  $F$  verläuft, sowie der Abstand  $d$  des Punktes  $F$  zu dem Punkt  $S$ , der die Schleppkurve beschreibt.



Aus der Zeichnung erkennt man, in welcher Relation der Punkt  $S$  zum Punkt  $F$  steht:

$$F(x_f | f(x_f))$$

$$S(x_f + \Delta x | f(x_f) + \Delta y)$$

Da die Strecke  $d$  die Steigung der Kurve  $f(x_f)$  am Punkt  $F$  besitzt, ergibt sich so der Zusammenhang von  $\Delta x$  und  $\Delta y$ :

$$f'(x_f) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras ergibt sich:

$$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

und daraus folgt:

$$\Delta y = \sqrt{d^2 - (\Delta x)^2}$$

Dieser Ausdruck für  $\Delta y$  wird in die Gleichung für die Steigung der Leitkurve eingesetzt und diese dann nach  $\Delta x$  umgeformt:

$$\begin{aligned}
f'(x_f) &= \frac{\sqrt{d^2 - \Delta x^2}}{\Delta x} \\
f'(x_f)^2 &= \frac{d^2 - \Delta x^2}{\Delta x^2} \\
f'(x_f)^2 &= \frac{d^2}{\Delta x^2} - 1 \\
f'(x_f)^2 + 1 &= \frac{d^2}{\Delta x^2} \\
\Delta x^2 \cdot (f'(x_f)^2 + 1) &= d^2 \\
\Delta x^2 &= \frac{d^2}{f'(x_f)^2 + 1} \\
\Delta x &= \frac{d}{\pm \sqrt{f'(x_f)^2 + 1}}
\end{aligned}$$

Nun lässt sich  $\Delta y$  durch den gefundenen Ausdruck von  $\Delta x$  errechnen.

$$\begin{aligned}
f'(x_f) &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
f'(x_f) &= \frac{\Delta y}{\pm \frac{d}{\sqrt{f'(x_f)^2 + 1}}} \\
\Delta y &= \pm \frac{f'(x_f) \cdot d}{\sqrt{f'(x_f)^2 + 1}}
\end{aligned}$$

Damit sind  $\Delta x$  und  $\Delta y$  in Abhängigkeit des Abstandes  $d$  und der Steigung der Leitkurve  $f'(x_f)$  ausgedrückt.

Hieraus folgen die Koordinatengleichungen für den zugehörigen Punkt  $S$  der Schleppkurve:

$$\begin{aligned}
S_x(x_f) &= x_f \pm \frac{d}{\sqrt{f'(x)^2 + 1}} \\
S_y(x_f) &= f(x_f) \pm \frac{f'(x_f) \cdot d}{\sqrt{f'(x)^2 + 1}}
\end{aligned}$$

Das Vorzeichen berücksichtigt hierbei die Tatsache, dass die Schleppkurve in zwei Richtungen vom Tangentenpunkt aus gebildet werden kann. Wird das  $x$ -Vorzeichen positiv gewählt, so muss das  $y$ -Vorzeichen auch positiv sein.

## 2.2 Schleppkurve einer Parameterkurve

Aus der Herleitung sind uns nun folgende Formeln zur Berechnung der Schleppkurve bekannt:

$$\begin{aligned}
S_x(x_f) &= x_f \pm \frac{d}{\sqrt{f'(x)^2 + 1}} \\
S_y(x_f) &= f(x_f) \pm \frac{f'(x_f) \cdot d}{\sqrt{f'(x)^2 + 1}}
\end{aligned}$$

Habe ich als Leitkurve aber nicht eine Funktion  $f(x_f)$ , sondern eine Parameterkurve  $(P_x(t)|P_y(t))$  gegeben, so müssen die Gleichungen für die Schleppkurve angepasst werden.

Aus  $x_f$  wird dabei  $P_x$ , aus  $f(x_f)$  wird  $P_y$ , die Ableitung der Parameterkurve ergibt sich aus:

$$P' = \frac{dy}{dx} = \frac{dP_y(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dP_x(t)} = \frac{P'_y(t)}{P'_x(t)}$$

Zusammengefasst erhält man:

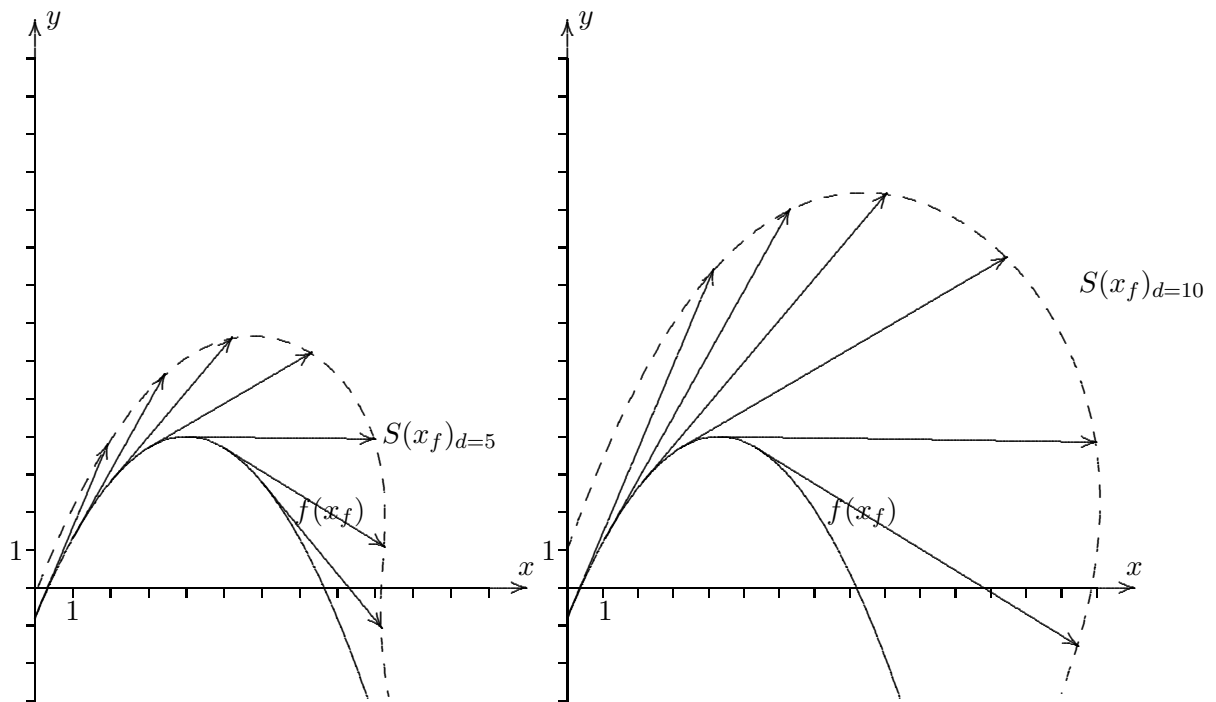
$$S_x(t) = P_x(t) \pm \frac{d}{\sqrt{\left(\frac{P'_y(t)}{P'_x(t)}\right)^2 + 1}}$$
$$S_y(t) = P_y(t) \pm \frac{P'_y(t) \cdot d}{P'_x(t) \cdot \sqrt{\left(\frac{P'_y(t)}{P'_x(t)}\right)^2 + 1}}$$

### 3 Beispiele von Schleppkurven

#### 3.1 Durchfahren einer Kurve mit einem zweiachsigen Fahrzeug

Bei dieser Berechnung werden die Breite des Fahrzeuges, sowie Überstände bei Vorder- und Hinterachse nicht berücksichtigt. Außerdem hat das Fahrzeug keine Gelenke. Als Leitkurve nehme ich einen parabelförmigen Verlauf an:

$$f(x_f) = -0,3(x + 4)^2 + 4$$



Der Parameter  $d$  gibt den Abstand der Vorderachse zur Hinterachse an. Die Hinterachse fährt dabei auf der Leitkurve, während sich die Vorderräder auf der Schleppkurve bewegen<sup>1</sup>. Der Winkel, den die Tangente mit der Schleppkurve bildet, ist gleich dem Einschlagswinkel der Vorderräder. Aus den Diagrammen erkennt man, dass ein größeres  $d$  ebenfalls eine verhältnismäßig weitere Schleppkurve zur Folge hat.

---

<sup>1</sup>Zuerst war mir dieser Umstand nicht bewusst, doch mir fiel beim Autofahren auf, dass die Hinterräder eine engere Kurve beschreiben als die Vorderräder. Dies ließ mich darauf schließen, dass die Vorderräder auf der Schleppkurve fahren, während sie die Hinterräder so hinter sich 'schleppen', dass diese die Leitkurve beschreiben.

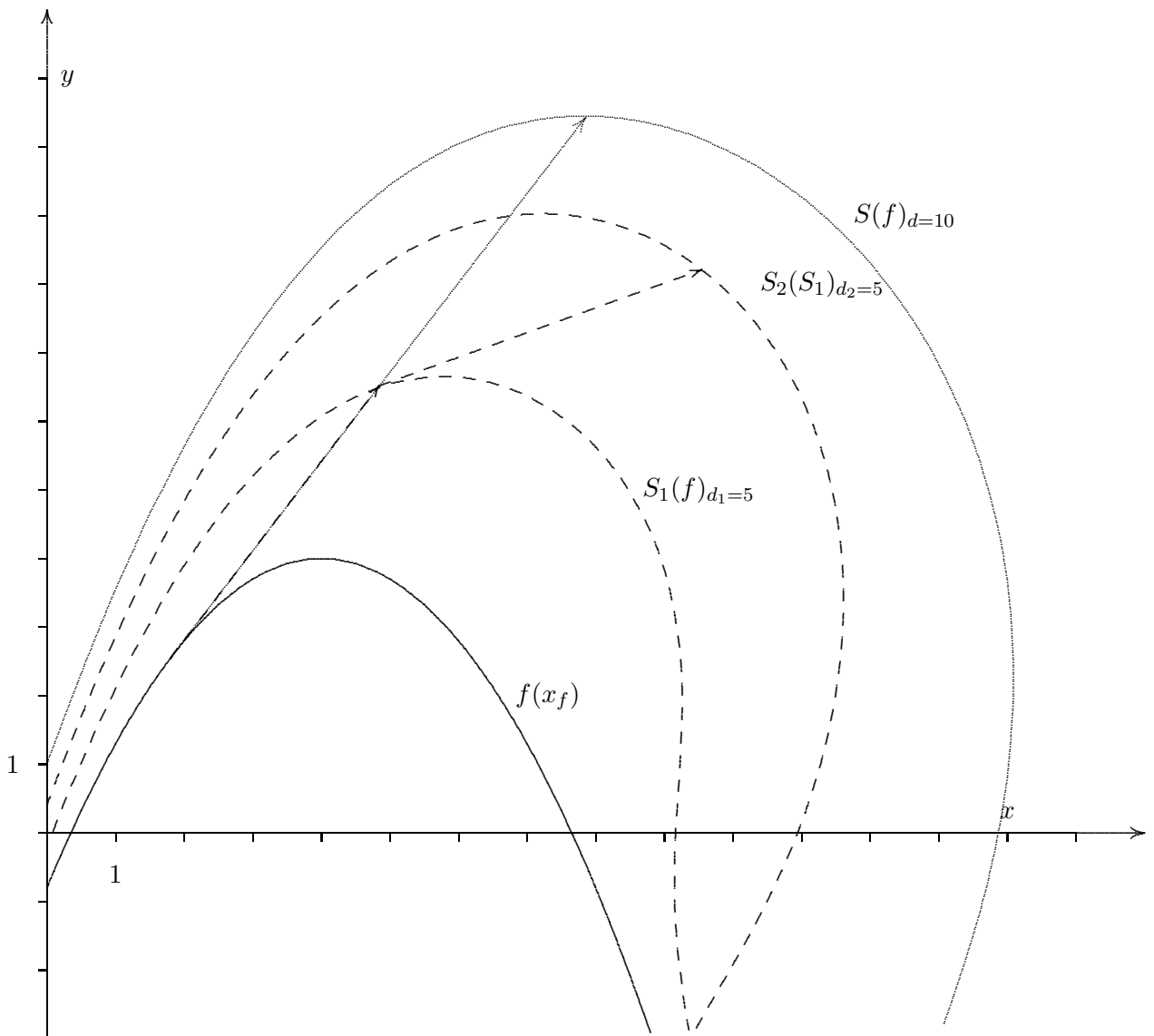
### 3.2 Durchfahren einer Kurve mit einem mehrgelenkigen Fahrzeug

Mehrere Gelenke bedeuten, dass eine Verkettung von Schleppkurven stattfindet. Die Schleppkurve von einer Schleppkurve wird gebildet.

Man stelle sich hierbei einen Gelenkbus vor, dessen Hinterräder auf der Leitkurve ( $f$ ) fahren. Die Vorderräder des Busses fahren auf der Schleppkurve ( $S_2$ ) zur Kurve des Gelenkes ( $S_1$ ), welche die Schleppkurve der Leitkurve ist.

Auch in dieser Berechnung wurden Überstände und Fahrzeugbreiten nicht berücksichtigt. Als Leitkurve nehme ich wieder einen parabelförmigen Verlauf an:

$$f(x_f) = -0,3(x + 4)^2 + 4$$



Vergleicht man nun die Schleppkurve des gelenklosen Fahrzeuges (gemeint ist  $S(f)_{d=10}$ ) mit der äußeren Schleppkurve des Gelenkbusses ( $S_2(S_1)_{d_2=5}$ ), bemerkt man, dass die Kurve des Gelenkbusses enger ist, d.h. dass die Fläche, welche das Fahrzeug überstreicht, wesentlich geringer ist.

Allgemein lässt sich sagen, je mehr Gelenke ein Fahrzeug besitzt, desto kleiner ist die beim Durchqueren einer Kurve überstrichene Fläche.



### 3.3 Durchfahren eines Kreises

Sei die Leitkurve durch

$$P_x(t) = r \cdot \cos(t)$$

$$P_y(t) = r \cdot \sin(t)$$

gegeben. Bei der Schleppkurve eines Kreises handelt es sich um einen Spezialfall. Denn sobald ein Fahrzeug dauerhaft die Vorderräder eingeschlagen hat und auf der Kreisbahn fährt, bewegen sich die restlichen Räder ebenfalls auf einer Kreisbahn, der einzige Unterschied besteht darin, dass sich die Radien der Kreisbahnen unterscheiden.

Dieser Umstand lässt sich rechnerisch beweisen:

$$S_x(t) = \cos(t) \cdot r \pm \frac{d}{\sqrt{\left(-\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\right)^2 + 1}}$$

$$S_x(t) = \cos(t) \cdot r \pm d \cdot \frac{1}{\sqrt{\cot(t)^2 + 1}}$$

$$S_x(t) = \cos(t) \cdot r \pm d \cdot \sin(t)$$

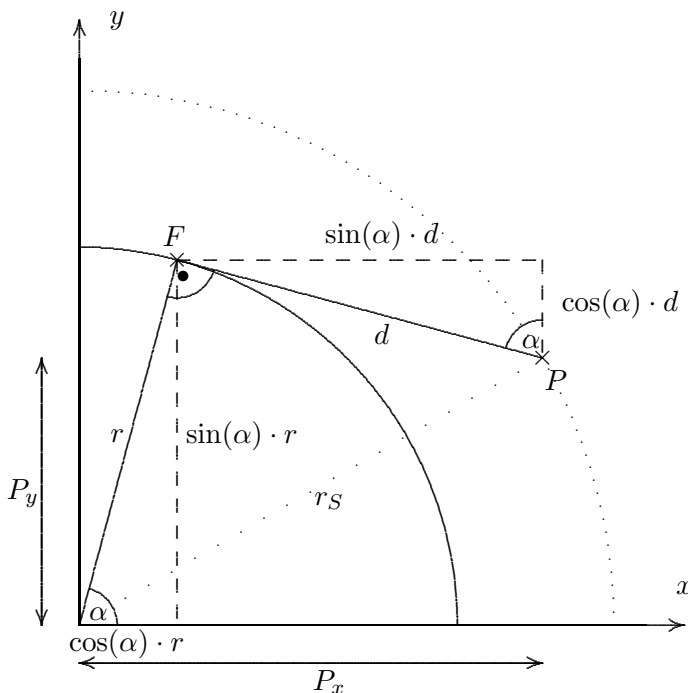
$$S_y(t) = \sin(t) \cdot r \pm \frac{\cos(t) \cdot d}{-\sin(t) \cdot \sqrt{\left(-\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\right)^2 + 1}}$$

$$S_y(t) = \sin(t) \cdot r \pm -\cot(t) \cdot d \cdot \frac{1}{\sqrt{\cot(t)^2 + 1}}$$

$$S_y(t) = \sin(t) \cdot r \mp d \cdot \cot(t) \cdot \sin(t)$$

$$S_y(t) = \sin(t) \cdot r \mp d \cdot \cos(t)$$

Geometrisch lässt sich die Rechnung auch belegen:



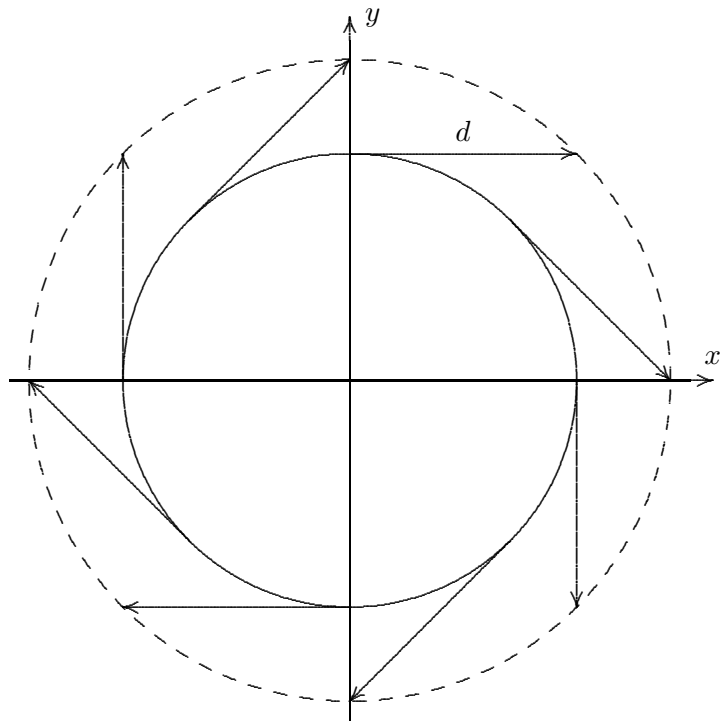
Aus dem Diagramm ergibt sich für  $P_x$  und  $P_y$ :

$$P_x = \cos(\alpha) \cdot r + \sin(\alpha) \cdot d$$

$$P_y = \sin(\alpha) \cdot r - \cos(\alpha) \cdot d$$

Das Diagramm liefert neben den oben genannten Zusammenhängen eine Möglichkeit, den Radius der Kreisschleppkurve zu berechnen:

$$r_s = \sqrt{r^2 + d^2}$$



## 4 Schleppkurven und Flächenberechnung

### 4.1 Weitere Überlegungen

Die von einem Lastzug überstrichene Fläche beim Durchqueren einer Kurve soll berechnet werden. Um ein realitätsnahes Beispiel zu nutzen, nehme ich hier als Automodell ein 60-t-Lastzug, wie er in Unterlagen der Bundesanstalt für Strassenwesen erwähnt wird<sup>1</sup>.

Nun soll berechnet werden, wie breit die Fahrbahn sein muss, damit der Lastzug die Kurve durchfahren kann. Zuerst verwende ich hierfür ein sogenanntes Stabmodell<sup>2</sup>. Hierbei wird angenommen, dass das Fahrzeug die Breite  $b = 0$  besitzt. Hat man nun auf diese Art und Weise die Schleppkurven berechnet, baut man auf dieses Stabmodell das Fahrzeug symmetrisch auf, um auf die angegebene Breite  $b$  zu kommen.

Da das Fahrzeug die Kurve in beiden Richtungen durchfährt, muss dies bei der Berechnung der Fläche berücksichtigt werden.

### 4.2 Lastzug

#### 4.2.1 Die Maße

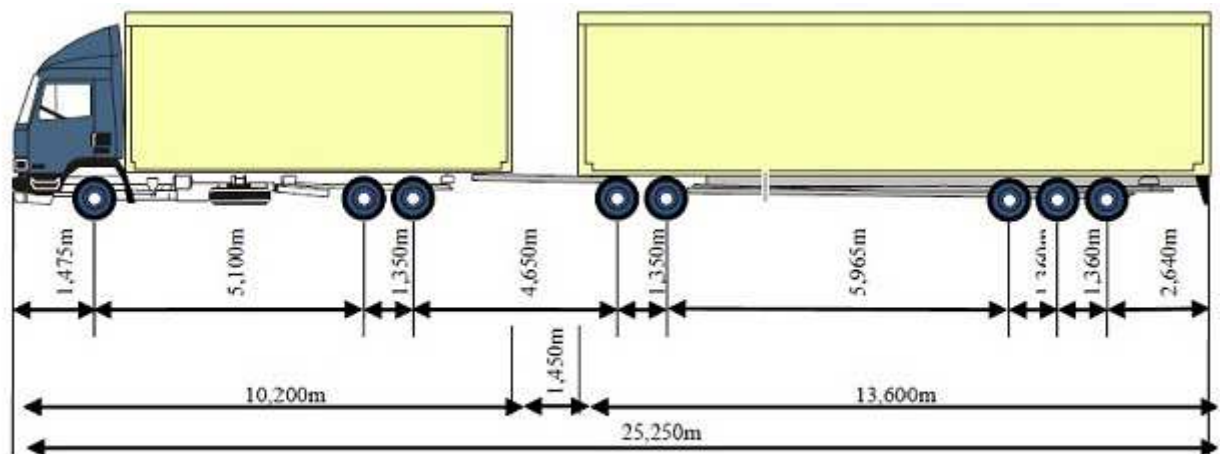


Abbildung 4.9: 60 t-Lastzugkombination.

3

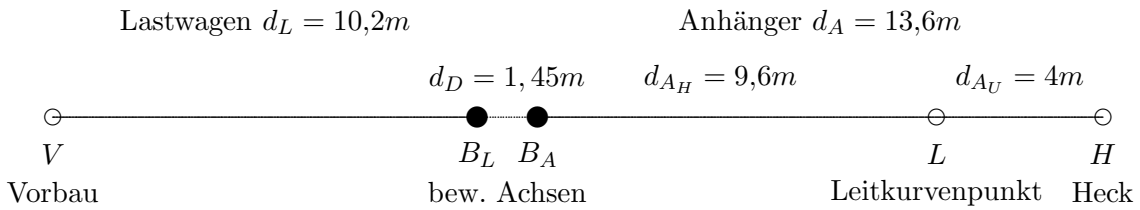
Aus der Grafik lässt sich ein Stabmodell ableiten. Anzumerken ist, dass mehrere Achsen (gemeint sind hier die Achsen, an denen sich die Räder befinden) zu einer verrechnet werden können. So ergibt sich aus den hinteren 3 Achsen eine resultierende Achse, berechnet aus dem Mittelpunkt der 3 Achsen. Um die Berechnung ein wenig zu vereinfachen, habe ich die beweglichen Achsen jeweils an das Ende des Lastwagens bzw. an den Anfang des Anhängers gesetzt.

<sup>1</sup><http://www.nomegatrucks.eu/deu/fakten/wissenschaftliche-studien/bundesanstalt-fuer-strassenwesen-auswirkungen-infrastruktur-riesen-lkw/bast-studie-langfassung.pdf>

<sup>2</sup>[http://www.hs-augsburg.de/~rweber/Herr%20Winter/CAD\\_II\\_Skripte\\_010106/CAD\\_2\\_06\\_Schleppkurve\\_010106.pdf](http://www.hs-augsburg.de/~rweber/Herr%20Winter/CAD_II_Skripte_010106/CAD_2_06_Schleppkurve_010106.pdf)

<sup>3</sup>s. 1

## Stabmodell:



### 4.2.2 Die überstrichene Fläche im Stabmodell

In 4.2.1 habe ich die Maße des Lastzuges bestimmt. Als nächsten Schritt braucht man eine Leitkurve, auf der sich der Leitkurvenpunkt bewegt.

$$f(x) = 0,0024x^3 + 0,016x^2 - 0,2x$$

Die Koeffizienten habe ich so gewählt, dass die Kurve in Anbetracht der Dimensionierung des Lastzuges sinnvoll erscheint. Zur Berechnung der einzelnen Schleppkurven habe ich Maple 13 verwendet. Um die Schleppkurve des Hecks  $H$  zu bestimmen, habe ich eine Schleppkurve der Leitkurve gebildet mit der Länge  $d_{A_U} = 4m$ .

$$H(x - \frac{d_{A_U}}{\sqrt{f'(x)^2 + 1}} \quad | \quad f(x) - \frac{d_{A_U} \cdot f'(x)}{\sqrt{f'(x)^2 + 1}})$$

Der Punkt  $B_A$  bewegt sich ebenfalls auf einer Schleppkurve, die von der Kurve des Leitkurvenpunktes  $L$  ausgeht im Abstand  $d_{A_h}$ , allerdings in die andere Richtung (Vorzeichenwechsel s.2.1).

$$B_A(x + \frac{d_{A_H}}{\sqrt{f'(x)^2 + 1}} \quad | \quad f(x) + \frac{d_{A_H} \cdot f'(x)}{\sqrt{f'(x)^2 + 1}})$$

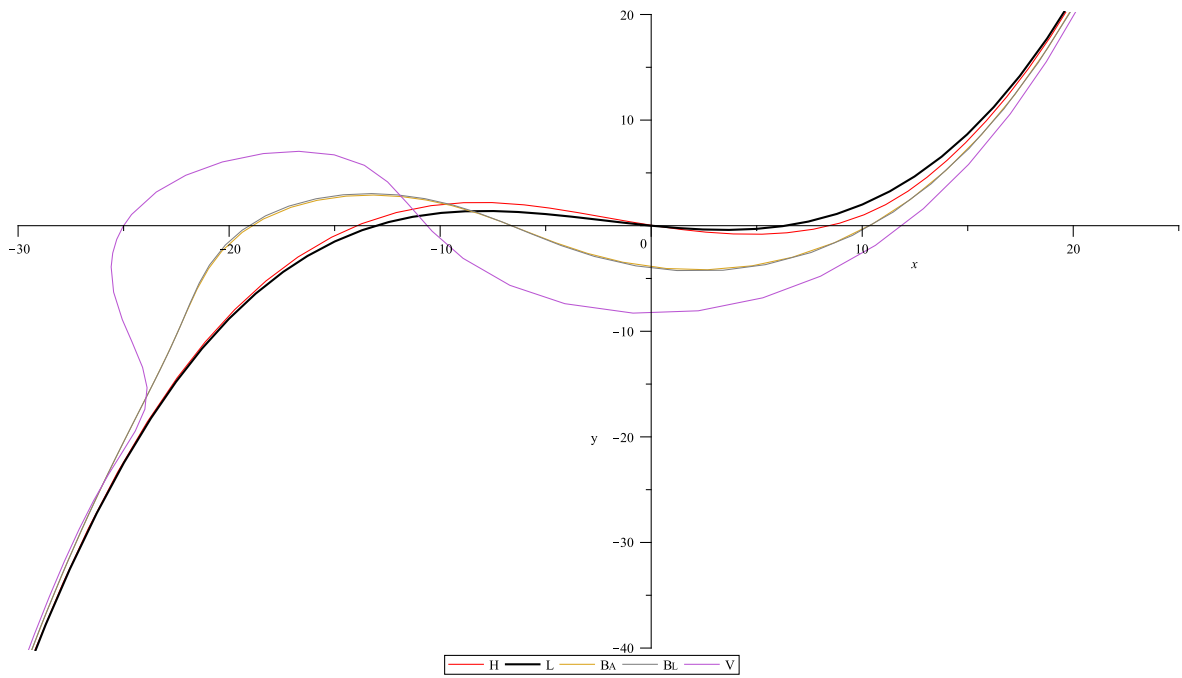
$B_L$  verläuft auf der Schleppkurve von der Kurve auf der sich der Punkt  $B_A$  bewegt. Mit  $(B_A)'$  ist die Steigung der Schleppkurve, die durch  $B_A$  verläuft im Punkt  $B_A$  gemeint.

$$B_L(B_{A_x} + \frac{d_D}{\sqrt{(B_A)'^2 + 1}} \quad | \quad B_{A_y} + \frac{d_D \cdot (B_A)'}{\sqrt{(B_A)'^2 + 1}})$$

Die Schleppkurve auf der sich der Vorbau  $V$  bewegt, basiert auf der Schleppkurve zur Kurve von  $B_A$ .

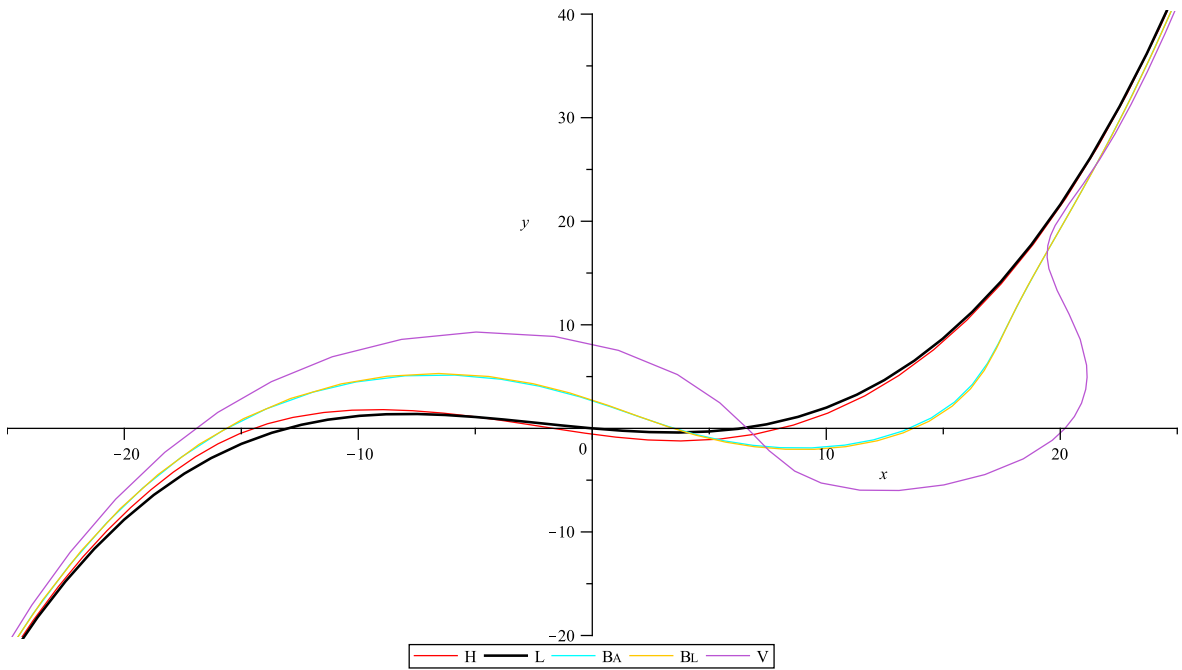
*Das dazugehörige Mapleskript befindet sich im digitalen Anhang.<sup>4</sup>*

<sup>4</sup>In ausgedruckter Form übersteigt es die 1000-Seiten-Marke, im digitalen Anhang befindet sich eine übersichtlichere Fassung



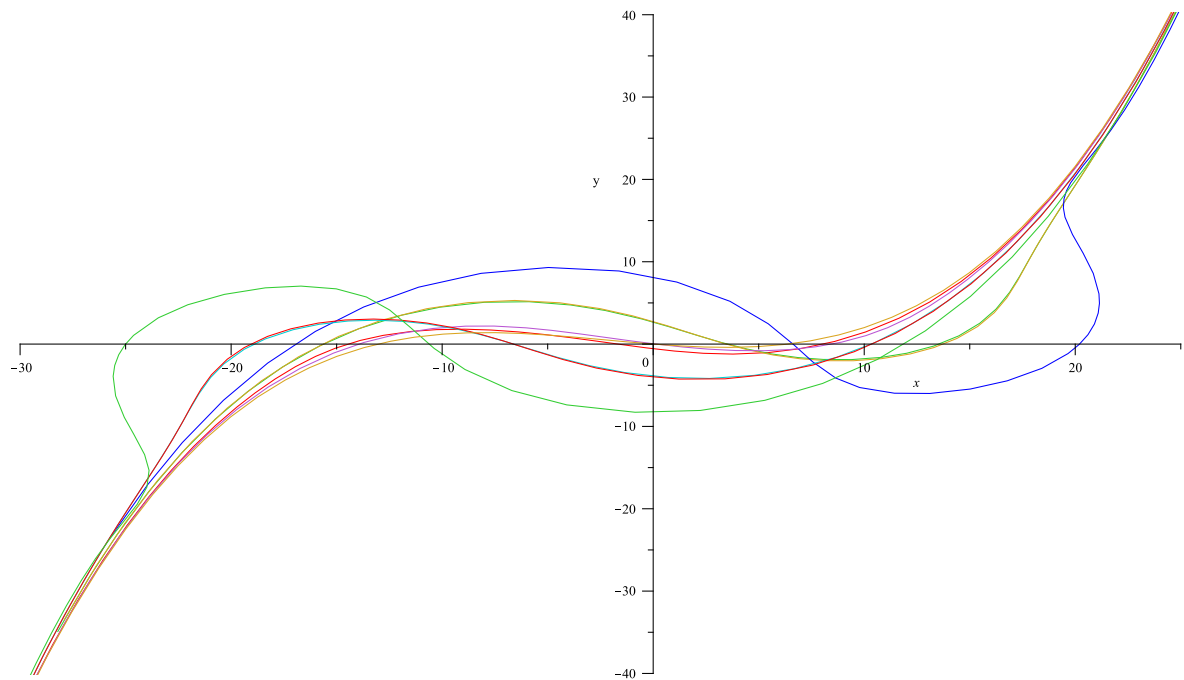
Eine weitere Einschränkung bildet hier außerdem die Tatsache, dass der Laster diese Kurve lediglich aus einer Richtung durchfährt. Um das Kurvenverhalten des Lastwagens zu modellieren, wenn er aus der entgegengesetzten Richtung kommt, müssen bei der Berechnung die Vorzeichen geändert werden:

$$S(x_f + \Delta x | f(x) + \Delta y) \Rightarrow S(x_f - \Delta x | f(x) - \Delta y)$$



Legt man nun beide Graphen übereinander, ergibt sich die von einem Lastzug mit der Breite  $b = 0$  überstrichene Fläche beim Durchfahren dieser Kurve in beiden Richtungen,

zur Vereinfachung gehe ich von einer Fahrbahn aus, die in beiden Richtungen befahren wird, allerdings nur einen Fahrstreifen zu bieten hat.



Die Breite des Lastzuges war Null.

Um die von einem Lastzug mit der Breite  $b = 2,4$  überstrichene Fläche zu errechnen, wird das Stabmodell zu Hilfe genommen. Nehme man einmal an, dass die bisher ermittelten Kurven die Schleppkurven der Fahrzeugmitte darstellen, so bildet man nun von diesen Kurven Parallelkurven für beide Richtungen mit dem Abstand  $\frac{b}{2}$ . Insgesamt ergibt das also 18 Kurven. Aufgrund der Komplexität der Berechnungen der Parallelkurven konnte ich diese nicht berechnen<sup>5</sup>.

Hat man nun die Parallelkurven gebildet, müssen lediglich die äußeren Kurven zu Hüllkurven zusammengeschlossen werden, so ergibt die Fläche zwischen diesen beiden Kurven die vom Fahrzeug überstrichene Fläche.

---

<sup>5</sup>In Maple brach die Berechnung aufgrund eines Arbeitsplatzspeicherdefizits ab.

# 5 Anhang

## 5.1 Literaturverzeichnis

- (1) Angaben und Kopien vom Fachlehrer  
(besonders <http://www.card-1.com/de/produkt/card1-tour/schleppkurve/video-tour-schleppkurve/>)
- (2) <http://did.mat.uni-bayreuth.de/susanne/verfolgung/Schleppmenue.html>  
(besonders dabei <http://did.mat.uni-bayreuth.de/susanne/verfolgung/Gliederzug.html>)
- (3) [http://www.hs-augsburg.de/~rweber/Herr%20Winter/CAD\\_II\\_Skripte\\_010106/CAD\\_2\\_06\\_Schleppkurve\\_010106.pdf](http://www.hs-augsburg.de/~rweber/Herr%20Winter/CAD_II_Skripte_010106/CAD_2_06_Schleppkurve_010106.pdf)
- (4) <http://www.nomegatrucks.eu/deu/fakten/wissenschaftliche-studien/bundesanstalt-fuer-strassenwesen-auswirkungen-infrastruktur-riesen-lkw/bast-studie-langfassung.pdf>

...