Leibnizschule Hannover

- Seminararbeit -

Schneeschaufeln Modellierung

Chr. M. und Chr. P.

Schuljahr: 2009 / 2010

Fach: Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Unser Thema „Schneeschaufeln“ setzt sich mit einem mathematischen Modell auseinander. Folgende Voraussetzungen wurden gegeben:

Nachdem eine Zeit lang Schnee auf eine Fläche gefallen ist, wird angefangen, diese Fläche, bei andauerndem Schneefall zu räumen. Die freigeschaufelte Fläche ist dabei abhängig von der Zeit, in der bereits Schnee geschaufelt wurde. Diese Abhängigkeit und die Abhängigkeiten weiterer Parameter (Schaufelleistung, Schneefall) sollen in dieser Seminararbeit mathematisch ermittelt werden. Als letztes wollen wir unser Modell anhand eines Beispiels ausprobieren.

Zuerst werden die verschiedenen Parameter und ihre Eigenschaften vorgestellt. Im zweiten Teil gehen wir auf die Herleitung einer bereits gegebenen Formel ein, auf die die Seminararbeit später aufbaut. Anschließend werden Abhängigkeiten der unterschiedlichen Parameter aufgestellt. Dazu gehört auch die Untersuchung bei funktionalen zusammenhängenden Parametern.

Für die Berechnungen und die graphischen Darstellungen verwenden wir das Programm Maple.

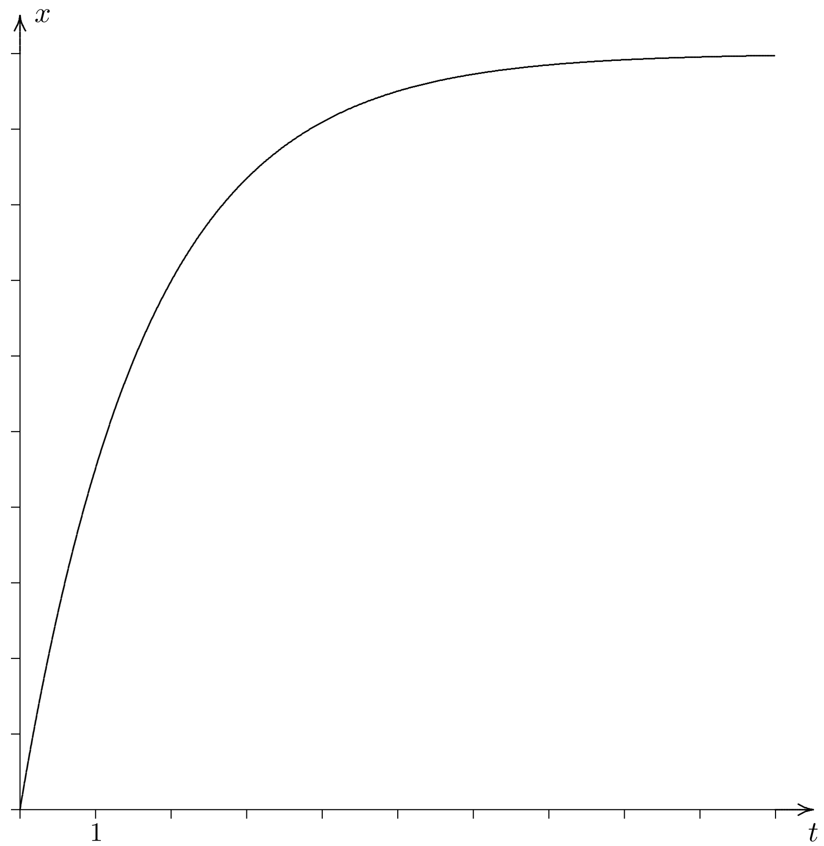
1.1 Parameter und ihre Eigenschaften

- Schneefall
  Der Schneefall gibt die Schneemenge, die pro Stunde auf einen Quadratmeter fällt, an. In diesem mathematischen Modell wird der Schneefall mit Hilfe einer Funktion beschrieben. In einfachen Fällen ist der Schneefall konstant, d.h. die Funktion entspricht einer zur t-Achse parallelen Geraden. In diesem Fall folgt, dass die Schneemenge auf dem Quadratmeter vor dem Schaufelnden linear steigt. In weiteren Überlegungen wird der Schneefall auch mit anderen Funktionen dargestellt. Außerdem wird angenommen, dass der Schnee nicht schmilzt.

  Hieraus lässt sich schließen, wie viele Minuten vor Beginn der Betrachtung der Schneefall eingesetzt hat.

- Schaufelleistung
  Sie gibt an, wie viel Schnee man pro Stunde vom Weg schaufelt. Die Schaufelleistung bleibt in unserem Modell immer gleich, das heißt, der Schaufelnde schaufelt immer mit der gleichen Kraft den Schnee vom Weg. Die Schaufelleistung wird als Formel durch $p(\mathit{Schaufelleistung}) = \frac{m(\mathit{Schneemenge})}{t(\mathit{Schneeschaufelzeit})}$ beschrieben.

- Freigeschaufelte Fläche
  Die freigeschaufelte Fläche ergibt sich aus der Wegbreite b, die in diesem Modell nicht verändert wird, und der freigeschaufelten Weglänge x, die von der Zeit t abhängig ist.
  Stellt man die oben genannte Formel nach t um, so ergibt sich $t = \frac{m}{p}$.
  Da die Schneemenge mit jedem weiteren Quadratmeter zunimmt, nimmt auch die Zeit, die benötigt wird, um den nächsten Quadratmeter freizuschaufeln zu. Die neu freigeschaufelte Weglänge verkleinert sich mit jeder weiteren Zeiteinheit um einen konstanten Faktor k $(1 > k > 0)$.
  So kann auch nur eine maximale Fläche freigeschaufelt werden. Die Fläche wird als Grenzwert erkennbar, wenn man die freigeschaufelte Fläche gegenüber der Zeit aufträgt:



2 Berechnungen

2.1 Herleitung der Funktion $x(t)$

Um die bereits freigeschaufelte Weglänge $x(t)$ zu jedem Zeitpunkt berechnen zu können, suchen wir zunächst eine Funktion, die dies beschreibt.

Die Weglänge ergibt, mit der Breite des Weges multipliziert, die Fläche des Wegstücks.

$$A = x \cdot b$$

Diese Formel gilt jedoch praktisch nur für kleine Zeitintervalle, da der Weg hinter dem Schaufelnden wieder zuschneit. In unserem Modell wird dies allerdings aus Gründen der Einfachheit außer Acht gelassen.

Da die freigeschaufelte Weglänge von t abhängig ist, gilt dies auch für die freigeschaufelte Fläche:

$$A = x(\Delta t) \cdot b$$

Die Schneemenge W, die der Schaufelnde bereits vom Weg geschaufelt hat ist abhängig von der freigeschaufelten Fläche, dem Schneefall s und der bereits geschaufelten Zeit. Da es auch schon vor Beginn des Schaufelns bereits schneite, ist die Schneemenge auch von dieser Zeit abhängig. Diese Zeit wird mit T bezeichnet.

$$W \approx A \cdot s \cdot (t + T)$$

Für A wird diese nun in die Formel eingesetzt:

$$W \approx x(\Delta t) \cdot b \cdot s \cdot (t + T)$$

Um eine Formel $x(\Delta t)$ zu erhalten, wird Obige hiernach umgestellt

$$x(\Delta t) \approx \frac{W}{b \cdot s \cdot (t + T)}$$

Die weggeschaufelte Schneemenge kann auch als Arbeit des Schaufelnden aufgefasst werden. Die Arbeit ist physikalisch definiert als:

$$W = p \cdot \Delta t$$

Auch diese Formel setzten wir in die Vorherige ein. Es entsteht:

$$\begin{aligned} x(\Delta t) &\approx \frac{p \cdot \Delta t}{b \cdot s \cdot (t+T)} \\ \frac{x(\Delta t)}{\Delta t} &\approx \frac{p}{b \cdot s \cdot (t+T)} \end{aligned}$$

Da $\frac{x(\Delta t)}{\Delta t}$ die Ableitung von x darstellt, haben wir hiermit die Rate, mit der sich die freigeschaufelte Weglänge ändert. Damit ist $x'(t)$ die momentane Schaufelgeschwindigkeit $(\frac{\textit{freigeschaufelter Weg}}{\textit{Zeit}})$.

$$x'(t) \approx \frac{p}{b \cdot s \cdot (t+T)}$$

In dieser Gleichung erkennt man Schwächen des Modells. Die Funktion ist nur von t abhängig, nicht jedoch von $x(t)$. Dies ist aber in der Realität der Fall, da die Schaufelleistung durch zunehmende Erschöpfung mit der Zeit abnimmt.
Um die Funktion $x(t)$ zu erhalten, integrieren wir die Funktion mit Hilfe von Maple

$$\int [x'(t)]\, dt$$

$$x(t) = \frac{p \cdot \ln(t+T)}{b \cdot s} + c$$

Diese Gleichung beschreibt nun die freigeschaufelte Weglänge abhängig von der Zeit. Um die Integrationskonstante c zu bestimmen, benutzen wir folgende Startvoraussetzung: Zu dem Zeitpunkt $t = 0$ ist auch die freigeschaufelte Weglänge $x = 0$; allgemein $x(0) = 0$
In der Gleichung wird so für t 0 eingesetzt:

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{p \cdot \ln(0+T)}{b \cdot s} + c \\ 0 &= \frac{p}{b \cdot s} \cdot \ln(T) + c \end{aligned}$$

Durch Umstellen der Gleichung ergibt sich

$$c = -\frac{p}{b \cdot s} \cdot \ln(t)$$

Als neue Formel für x erhalten wir somit

$$x(t) = \frac{p \cdot \ln(t+T)}{b \cdot s} - \frac{p}{b \cdot s} \cdot \ln(T)$$

die wir nun nach den Logarithmenregeln umstellen, sodass wir

$$x(t) = \frac{p}{b \cdot s} \cdot \ln(\frac{t+T}{T})$$

erhalten. Dies können wir nun als endgültige Formel für die freigeschaufelte Weglänge nutzen.

2.2 Ermittlung des Schneefallbeginns

2.2.1 mit Termumformung

Um herauszufinden, wann der Schneefall eingesetzt hat, suchen wir eine Gleichung mit $T =$. Hierzu stellen wir zunächst die Formel so um, dass wir auf der einen Seite sämtliche Terme mit T haben und auf der anderen Seite die Restlichen. Anschließend potenzieren wir den Term zur Basis e, um den Logarithmus aufzulösen.

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{x(t) \cdot b \cdot s}{p}} &= \frac{t+T}{T} \\
T \cdot e^{\frac{x(t) \cdot b \cdot s}{p}} &= t+T \\
T \cdot e^{\frac{x(t) \cdot b \cdot s}{p}} - T &= t
\end{aligned}
$$

Damit T allein auf einer Seite steht, wird T ausgeklammert und mit dem Klammerterm dividiert.

$$
\begin{aligned}
T \cdot (e^{\frac{x(t) \cdot b \cdot s}{p}} - 1) &= t \\
T &= \frac{t}{e^{\frac{x(t) \cdot b \cdot s}{p}} - 1}
\end{aligned}
$$

Mit dieser Gleichung lässt sich der Beginn des Schneefalls mit Hilfe der bereits geschaufelten Zeit, der bereits freigeschaufelten Fläche, der Schaufelleistung und des Schneefalls ermitteln. Für diese Gleichung reichen ein x-Wert und ein t-Wert.

2.2.2 mit Abhängigkeit der freigeschaufelten Weglänge pro Zeitabschnitt

Um T ohne die Schaufelleistung und den Schneefall bestimmen zu können, kann man auch wie folgt vorgehen:

Als Ausgangspunkt wird die Gleichung

$$x(t) = \frac{p}{b \cdot s} \cdot \ln(\frac{t+T}{T})$$

genommen.
Für diesen Weg benötigen wir zwei Wegabschnitte zu den entsprechenden Zeitpunkten

$$
\begin{aligned}
x(t_1) &= \frac{p}{b \cdot s} \cdot \ln(\frac{t_1+T}{T}) \\
x(t_2) &= \frac{p}{b \cdot s} \cdot \ln(\frac{t_2+T}{T})
\end{aligned}
$$

Beide Gleichungen werden so umgestellt, dass sie anschließend gleichgesetzt werden können. Bei der ersten Gleichung wird durch $x(t_1)$ dividiert, bei der zweiten Gleichung durch $x(t_2)$.

Auf beiden Seiten erhalten wir den Quotienten 1.

$$1 = \frac{1}{x(t_1)} \cdot \frac{p}{b \cdot s} \cdot \ln(\frac{t_1 + T}{T})$$

$$1 = \frac{1}{x(t_2)} \cdot \frac{p}{b \cdot s} \cdot \ln(\frac{t_2 + T}{T})$$

Nun können die Formeln gleichgesetzt werden

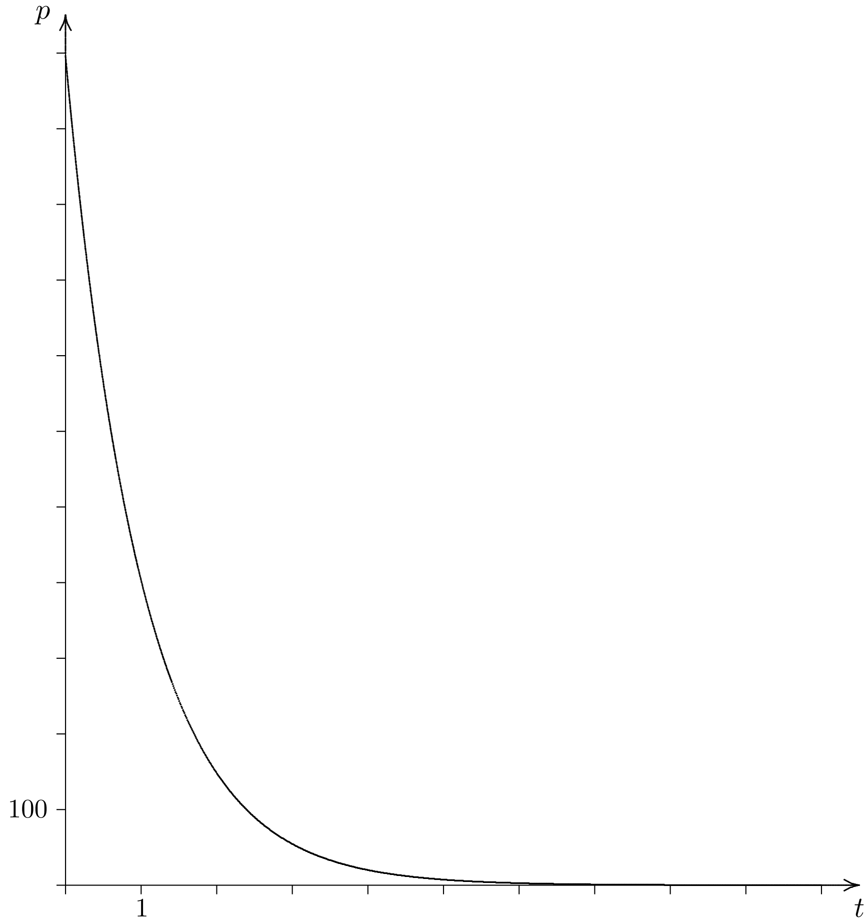
$$\frac{1}{x(t_1)} \cdot \frac{p}{b \cdot s} \cdot \ln(\frac{t_1 + T}{T}) = \frac{1}{x(t_2)} \cdot \frac{p}{b \cdot s} \cdot \ln(\frac{t_2 + T}{T})$$

$$\frac{1}{x(t_1)} \cdot \ln(\frac{t_1 + T}{T}) = \frac{1}{x(t_2)} \cdot \ln(\frac{t_2 + T}{T})$$

Setzen wir für t_1, t_2, $x(t_1)$, $x(t_2)$ Werte ein, enthält die Gleichung nur noch die Unbekannte T. Diese lässt sich zum Beispiel mit Hilfe von Maple ermitteln. Ist der Schneefall keine Konstante, müssen für s neue zeitabhängige Werte berechnet werden.

2.3 Veränderung der Schaufelleistung

Um das Modell realistischer zu gestalten, wird angenommen, dass die Schaufelleistung p mit der Zeit abnimmt. In unserem Beispiel soll dies durch die Funktion $p(t) = e^{-t+7}$ beschrieben werden.



Bei diesem Beispiel werden zu dem Zeitpunkt $t = 0$ $1096 \frac{kg}{Stunde}$ geschaufelt. Dies nimmt dann exponentiell ab.

Zunächst untersuchen wir die Auswirkung auf $x(t)$. Da nun jedoch p nicht mehr eine Konstante ist, sondern als Funktion definiert wurde, müssen wir die Formel für die Schaufelgeschwindigkeit (x') neu integrieren Dazu setzen wir in x' p ein:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{p}{b \cdot s \cdot (t+T)} \\ x'(t) &= \frac{e^{-t+7}}{b \cdot s \cdot (t+T)} \end{aligned}$$

Da wir die Funktion selbst nicht integrieren können, benutzen wir Maple und geben hierfür folgende Werte vor:

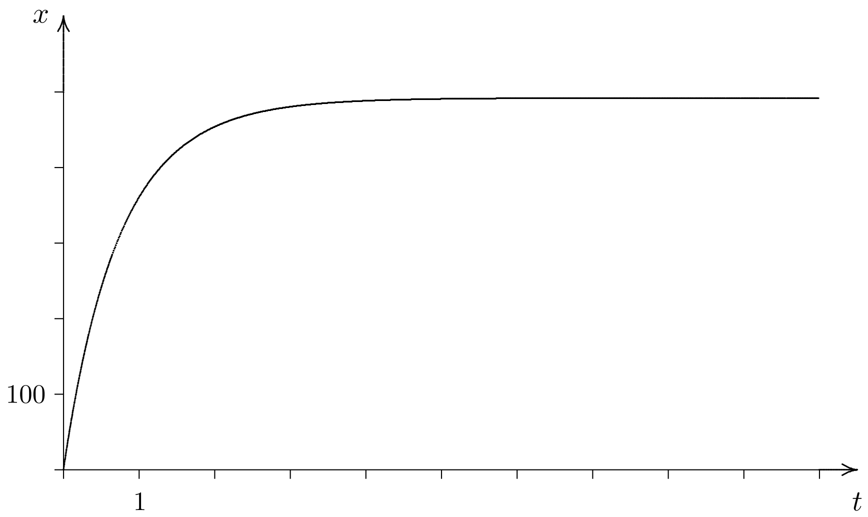
$$b = 1\ m s = 0{,}8\ \frac{kg}{h} t = 2\ h$$

Als Ergebnis erhalten wir

$$-10128,85491 Ei(1; t+2)$$

Ei steht bei Maple für exponentielles Integral[1]

Mit dieser Funktion können wir zwar nicht weiterrechnen, da uns eine solche Gleichung nicht bekannt ist, jedoch können wir den Graphen darstellen.



Interpretation des Graphen:
Die Funktion verläuft durch den Ursprung, da zu dem Zeitpunkt $t = 0$ noch kein Schnee geschaufelt wurde. Ab $t = 3$ nähert sich die Funktion stark einem Grenzwert an. Dies ist dann die maximal freigeschaufelte Weglänge. Um den Grenzwert zu ermitteln, lassen wir t gegen Unendlich streben.

$$\lim_{t \to \infty} x(t)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t+7}}{b \cdot s \cdot (t+T)}\ dt$$

Von Maple erhalten wir als Grenzwert 495,3 m

[1] http://www.maplesoft.com/support/help/AddOns/view.aspx?path=Ei, 28.2.2010

Um herauszufinden, zu wie viel Prozent der Grenzwert bereits erreicht wurde, berechnen wir zu unterschiedlichen Zeitpunkten die dazugehörigen Weglängen. Die stellen wir anschließend prozentual zu dem Grenzwert dar:

t/h	2	4	6
$x(t)/m$	475,03	491,66	494,92
$\frac{x(t)}{G}/\%$	92,3	99,3	99,9

Bereits nach 6 Stunden ist der Grenzwert erreicht.

2.4 Veränderung des Schneefalls

Im nächsten Fall betrachten wir eine Veränderung des Schneefalls.
Zunächst lassen wir dabei die Schaufelleistung wieder konstant. Als Funktion erhält der Schneefall

$$s(t) = \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}$$

Auch diese Funktion wird wie bei der Schneeschaufelleistung in $x'(t)$ eingesetzt.

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{p}{b \cdot s \cdot (t+T)} \\ x'(t) &= \frac{p}{b \cdot (\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}) \cdot (t+T)} \end{aligned}$$

Für eine graphische Darstellung setzen wir für b und T die bereits oben verwendeten Werte ein ($b = 1m, T = 2h$). Für p nehmen wir den Startwert aus den vorherigen Untersuchungen.

$$x'(t) = \frac{1096}{1 \cdot (\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}) \cdot (t+2)}$$

Für die momentane Schaufelgeschwindigkeit ergibt sich ein Graph, der nicht einer realistischen Schaufelgeschwindigkeit entspricht, weshalb wir ihn nur in Maple zur Übersicht darstellen lassen und hier nicht weiter wiedergeben.

Für die freigeschaufelte Weglänge integrieren wir die Funktion mit Maple und erhalten erneut einen Graph, der keinem realistischen Verhalten. Zur Auswertung des Graphen verfahren wir deshalb wie zuvor.

Da dieser Graph in keiner Weise, auch nicht durch Variation der Werte, realistischem Schaufelverhalten entspricht, brechen wir die Rechnung mit dieser Variante des Modells ab.

Für einen zweiten Fall versuchen wir unsere Funktion der Konstante aus unseren ersten Untersuchungen anzugleichen. Dies hat den Vorteil, dass sich Ergebnisse von der Konstante mit den Ergebnissen der Funktion ähneln müssen. Als Funktion für den Schneefall nehmen wir die Parabel

$$s = -0{,}002 \cdot (t-20)^2 + 1$$

In diesem Fall muss beachtet werden, dass der Schneefall an der Stelle $t = 42{,}5$ unter die t-Achse fällt. Dies würde bedeuten, dass mit zunehmender Zeit Schnee wieder verloren geht. Aus diesem Grund wird die Schneeräumung nur bis zu dem Zeitpunkt $t = 30$ betrachtet.

Für die neue Schneeschaufelfunktion ergibt sich nach dem Einsetzten von s

$$x'(t) = \frac{1096}{(-0{,}002 \cdot (t-20)^2 + 1) \cdot (t+2)}$$

Leider ergeben sich ähnliche Ergebnisse wie bei den Sinus-Untersuchungen, sodass wir auch hier nicht weiterrechnen. Als Fazit müssen wir feststellen, dass sich der Schneefall in unserem Modell nicht variieren lässt.

3 Anwendung des Modells

Nach 2 Stunden Schneefall fängt Herr P. vor seinem Haus an Schnee zu räumen. Herr M. wohnt 700 m von Herrn P. entfernt. Die Schaufelleistung von Herrn M. ist um $\frac{3}{2}$größer als die von Herrn P. Da Herr M. ein Langschläfer ist, möchte er jede Minute Schlaf nutzen. Trotzdem möchte er noch genau so viel Weglänge freischaufeln wie Herr P. (Beide Schaufelnden treffen sich in der Mitte, also bei 350 Metern). Wie lange kann Herr M. länger schlafen, damit er sich trotzdem noch in der Mitte mit Herrn P. trifft.

Als Ausgangspunkt für Schaufelleistung für Herrn P. nehmen wir die Funktion $p = e^{-t+7}$. Also hat Herr M. eine Schaufelleistung von $p = \frac{3}{2}e^{-t+7}$.

Folglich hat Herr P. eine Schaufelgeschwindigkeit von

$$x'(t) = \frac{e^{-t+7}}{b \cdot s \cdot (t+T)}$$

In unserm Modell gehen wir zunächst von einer Wegbreite von 1m und von einem Schneefall von $0.8 \cdot \frac{m^3}{h}$ aus. T ist in der Aufgabenstellung bereits mit 2 Stunden vorgegeben. Diese Parameter sind für beide Personen gleich gewählt. Als Funktion ergibt sich für P:

$$x'_P(t) = \frac{e^{-t+7}}{0{,}8 \cdot (t+2)}$$

Für Herrn M. erhalten wir

$$x'_M(t) = \frac{1,5 \cdot e^{-t+7}}{0{,}8 \cdot (t+2+T)}$$

T ist jetzt die Zeit, die Herr M. später anfangen wird, als Herr P. Würde man die Zeit berechnen, die Herr M. bis zur 350 m-Marke benötigt ($x_M(t) = 350$) und diese dann von der Zeit, die Herr P. bis zur 350 m-Marke benötigt ($x_P(t) = 350$), abziehen, würde man davon ausgehen, dass Herr M. und Herr P. gleichzeitig anfangen. Die ermittelte Zeit ist also die Wartezeit von Herrn M. auf der Hälfte der Strecke. Mit T wird berücksichtigt, dass Herr M. auch den Schnee wegschaufelt, der noch fällt, während Herr P. schon schaufelt.

Da beide Personen die gleiche Wegstrecke zurücklegen, kann man die beiden Funktionen von x_M und x_P gleich setzen.

$$\int x'_P = \int x'_M$$

$$\int \frac{e^{-t+7}}{0{,}8 \cdot (t+2)}\ dt = \int \frac{1,5 \cdot e^{-t+7}}{0{,}8 \cdot (t+2+T)}\ dt$$

Damit haben wir eine Gleichung mit zwei Unbekannten; nämlich t und T. Allerdings wissen wir, das Herr P. sofort nach 2 Stunden Schneefall mit dem Schaufeln beginnt, daher hat er keine zusätzliche Zeit T.

Daraus folgt: $\int \frac{e^{-t+7}}{0{,}8 \cdot (t+2)}\ dt$

Da Maple jedoch hierfür eine imaginäre Zahl als Antwort ausgibt, werden wir es im Weiteren mit einem Näherungsverfahren versuchen. Dazu schreiben wir die Funktionswerte zunächst in Einerschritten bis zum Erreichen des Grenzwerts in einer Tabelle auf.

t/h	0	1	2	3	4	5	6
$x(t)/m$	0	363,14	457,03	483,68	491,66	494,14	494,92

Aus der Tabelle kann man nun erkennen, dass der Funktionswert 350 zwischen Null und Eins liegen muss.

t/h	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$x(t)/m$	0	63,7	118,6	166,1	207,2

t/h	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$x(t)/m$	242,9	274	301	324,6	345,2	363,1

Hier sieht man wiederum, dass der gesuchte Wert zwischen 0,9 und 1 liegt. Verfolgt man dieses System weiter, so erhalten wir für die Stelle $x(t) = 350$ für $t = 0{,}925644$

Diesen t-Wert setzen wir in die Gleichung x_M. Da Maple jedoch auch hier wieder eine imaginäre Zahl als Lösung ausgibt, müssen wir erneut abbrechen. An dieser Stelle mit einem Näherungsverfahren fortzufahren, wäre ein Fehler, da hierbei die Integrationskonstante übergangen wird. Auf diese Weise wird die Funktion in y-Richtung verschoben, was wiederum bedeutet, dass sich auch der vorgegeben $x(t)$-Wert verschiebt. Also wird die Gleichung mit der Bedingung, dass die Leistung von Herrn P. 1 Tonne pro Stunde und die des Herrn M. 1,5 Tonnen pro Stunde beträgt, genommen. Mit dieser Bedingung können wir nun unsere Aufgabe lösen. Da jetzt auch p nicht mehr als Funktion definiert ist, können wir als Formel für $x(t)$ auch wieder die am Anfang hergeleitete Funktion benutzen.

Zunächst wird die benötigte Zeit von Herrn P. berechnet:

$$x_P(t) = \frac{p}{b \cdot s} \cdot \ln \frac{t+T}{T}$$

$$x_P(t) = \frac{1000}{0{,}8} \cdot \ln \frac{t+2}{2}$$

Für x_P wird wieder die Weglänge eingesetzt:

$$350 = \frac{1000}{0{,}8} \cdot \ln \frac{t+2}{2}$$

Diese Gleichung lässt sich von Maple nach t umstellen und berechnen. Die benötigte Zeit beträgt 0,6463 Stunden.
Da Herr M. zum gleichen Zeitpunkt wie Herr P. 350 m geschaufelt haben soll, können wir den berechneten t-Wert von $x_P(t)$ auch in die Formel $x_M(t)$ einsetzen.
In dieser Formel muss dann T neu berechnet werden

$$x_M(0{,}6463) = \frac{1500}{0{,}8} \cdot \ln \frac{0{,}6463 + T + 2}{2 + T}$$

$$T = -1{,}3963$$

Da T die Zeit sein sollte, die Herr M. später anfängt, muss diese positiv sein, was wiederum heißt, dass das mathematische Modell Mängel aufweist.

Als Näherungswert lässt sich die Zeit ermitteln, in der Herr M. 350 m freischaufelt, die dann von der Zeit von Herrn P. abgezogen. Dieser Wert liegt ungefähr bei einer viertel Stunde

4 Fazit

Mit diesem Modell haben wir es zwar geschafft, grundlegende Schneeschaufelprozesse zu beschreiben, jedoch reichte es nicht, um Fragestellungen bezüglich des Schneeschaufelns zu beantworten. So genügte es leider nicht für exakte Berechnungen sondern nur für suboptimale Annäherungen. Mit besseren manuellen Integrationsverfahren wären uns vermutlich genauere Lösungen möglich gewesen. Allerdings reichten unsere schulischen Kenntnisse der Mathematik nicht aus, um diese zu verstehen und anwenden zu können.

Eine funktionale Abhängigkeit konnten wir in unserer Seminararbeit nur in Bezug auf Schaufelleistung herausfinden, jedoch nicht bezüglich des Schneefalls. Wäre uns dieser Schritt gelungen, hätten wir weitere Variationen des Modells in Betracht ziehen können, zum Beispiel eine Vermischung zweier verschiedener Variationen (z.B. Schaufelleistung und Schneefall). Da eine Veränderung der Wegbreite nicht realistisch ist, wurden in diesem Bereich keine Untersuchungen vorgenommen.

Obwohl sich die meisten Lösungen auf Näherungen beziehen, haben wir immer versucht, ein möglichst exaktes Ergebnis zu erhalten. In diesem Punkt lag bei uns die größte Herausforderung an dieser Seminararbeit: Näherungsverfahren verlangen einen neuen Lösungsweg.

Dies war für uns eine neue Erfahrung, da bisher immer exakte Lösungen möglich waren.

Die Unvermeidbarkeit von Näherungen verdeutlicht jedoch auch folgendes Zitat von Frank Schätzing, das als Motto zu unserer Seminararbeit passt:

> „In der Schule haben wir gelernt, dass Lehrerwissen absolutes Wissen ist. Doch Wissenschaft kann niemals absolut sein. Sie ist die Kunst der Annäherung. Sie definiert nicht, sondern kreist ein, zieht keine Trennlinien, sondern schafft Übergänge, kennt keine Dogmen, sondern Entwicklungen. Sie kann nichts verifizieren, sondern nur durch Wegstreichen von Variablen ein möglichst klares Bild entwerfen.“[1]

[1] Frank Schätzing, „Nachrichten aus einem unbekannten Universum“ Seite 17, Frankfurt am Main 2009

5 Anhang

5.1 Literaturverzeichnis

- Internetdokumente des Fachlehrers (http://nibis.ni.schule.de/ lbs-gym/)
- „Analysis Teil 4“, Beat Eicke und Edmung Holzherr, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich(als Ausdruck angefügt)