

# Schwerpunkte von Flächen und Rotationskörpern

N. T. und M. R.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Historischer Hintergrund</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Berechnung von Schwerpunkten</b>	<b>4</b>
3.1	Schwerpunkte von Flächen . . . . .	4
3.2	Schwerpunkte von Kurvenstücken . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Die 1. Guldinsche Regel</b>	<b>10</b>
4.1	Herleitung der 1. Guldinschen Regel . . . . .	10
4.2	Bestätigung am Beispiel eines rotierenden Dreiecks . . . . .	12
4.3	Bestätigung am Beispiel eines rotierenden Halbkreises . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Berechnung der Oberfläche eines Torus</b>	<b>16</b>
<b>6</b>	<b>Die Schwerpunkte von Mönichen</b>	<b>17</b>
6.1	Herleitung der Berechnungsformel . . . . .	17
6.2	Untersuchung der Schwerpunkte von Mönichen . . . . .	21
<b>7</b>	<b>Schlusswort</b>	<b>25</b>
<b>8</b>	<b>Anhang</b>	<b>26</b>
8.1	Definitionen . . . . .	26
8.2	Formelverzeichnis der wichtigsten Formeln . . . . .	27
8.3	Abbildungsverzeichnis . . . . .	28
8.4	Quellenangaben . . . . .	29

# 1 Einleitung

## Aufgabenstellung

Das Thema unserer Facharbeit lautet „Schwerpunkte von Flächen und Rotationskörpern“. Im Detail bedeutet das, dass die dazugehörigen Berechnungsformeln und die „1. Guldin'sche Regel“ herzuleiten sind. Außerdem soll diese anhand eines um die  $x$ -Achse rotierenden Dreiecks und Halbkreises bestätigt und die Oberfläche eines Torus berechnet werden. Abschließend sollen die Schwerpunkte von Möndchen – sichelförmigen Flächen – untersucht werden.

## Beginn der Arbeit

Die erste Woche haben wir damit verbracht, uns in die Unterlagen des Fachlehrers einzuarbeiten und zusätzliches Material zu beschaffen. Im Internet haben wir größtenteils nur Informationen zum historischen Hintergrund gefunden. Deshalb waren wir in der Universitätsbibliothek, um nach themenunterstützenden Büchern zu suchen.

Zum größten Teil war unsere Arbeit aber auf die Unterlagen des Fachlehrers gestützt, das gefundene Zusatzmaterial hat einen weniger großen Einfluss auf die Arbeit genommen. Natürlich hat uns das verwendete Material nur im reproduktiven ersten und teilweise reproduktiven zweiten Teil unserer Facharbeit geholfen, im letzten Teil waren wir vollständig auf unsere eigenen Überlegungen angewiesen.

## Arbeitsvorgang

Die Möndchen haben uns eine ganze Zeit lang vor ein größeres Problem gestellt. Nach einigen falschen Ansätzen, die z.B. beinhalteten, die vorher hergeleiteten Formeln für Flächen- oder Kurvenstückschwerpunkte auf die beiden Graphen anzuwenden und die damit errechneten Schwerpunkte im Nachhinein zu kombinieren. Diese Überlegungen führten uns jedoch nicht zum richtigen Ergebnis, sodass wir schließlich versuchten, das Problem andersherum anzugehen. Wir haben erst die beiden Funktionen, die das Möndchen begrenzen, zusammengefasst und danach die Berechnungsweise der Koordinaten des Möndchen-Schwerpunktes hergeleitet, und zwar auf die gleiche Art und Weise wie in Kapitel 3.1 bei den „Schwerpunkten von Flächen“. So sind wir schließlich zum gewünschten Ergebnis gekommen.

Um dieses noch zu unterstreichen, haben wir zusätzliche Untersuchungen zu den Schwerpunkten von Möndchen durchgeführt.

## 2 Historischer Hintergrund

„Ein erstaunliches Ergebnis! – Es sieht so aus, als sei das Rotationsvolumen das Produkt des Inhaltes der Kreisfläche und der Länge des Weges, den der Mittelpunkt bei der Rotation zurücklegt (Kreisumfang).“

So in etwa hat der schweizerische Mathematiker Guldin sein erstaunliches Ergebnis formuliert. Habakkuk Guldin wurde am 12.06.1577 in Sankt Gallen in der Schweiz geboren.

Er machte eine Ausbildung zum Goldschmied und arbeitete während seiner Jugend in diesem Beruf. Trotz jüdischer Abstammung und des protestantischen Glaubens seiner Eltern bekehrte Guldin sich in seinem 20. Lebensjahr zum Katholizismus und schloss sich dem Jesuitenorden an. Zu diesem Zeitpunkt änderte er seinen Namen in „Paul“.

1609 wurde er nach Rom ins „Jesuit Collegio Romano“ geschickt, wo er unter Clavius studierte.

Nach seinem Studium unterrichtete Guldin an Jesuiten-Schulen in Rom und Graz, ab 1623 war er Mathematik-Professor in Wien, 1637 kehrte er nach Graz zurück, wo er am 03.11.1643 starb.

Guldin verfasste sein Werk in vier Büchern „Centrobarica“, in denen er seine „Guldinischen Regeln“ bestätigte. Sie erschienen zwischen 1635 und 1641 in Wien. Diese Regeln findet man jedoch auch schon im VII. Buch der „Συναγωγη“ (Collectiones) des Pappus von Alexandria. Über diesen weiß man nur, dass er ca. 320 n.Chr. lebte.<sup>1</sup> Er war aber auch einer der letzten bedeutenden Mathematiker des Altertums, der wichtige Erkenntnisse seiner Vorgänger in einem Buch zusammengetragen und durch eigene Gedanken und Erläuterungen ergänzt hat.

Allerdings tauchten die Aufzeichnungen des Pappus erst wieder auf, als Paul Guldin seine Erkenntnisse mit den gleichen Inhalten gewonnen hatte.

---

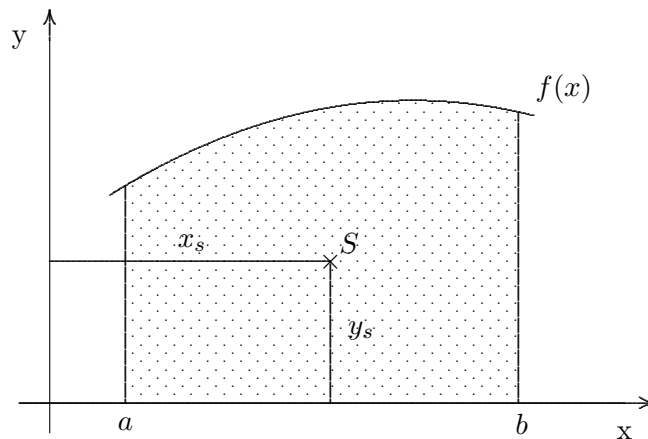
<sup>1</sup>Quelle: [http://members.tripod.com/sfabel/mathematik/epochen\\_spa.html](http://members.tripod.com/sfabel/mathematik/epochen_spa.html)

### 3 Berechnung von Schwerpunkten

#### 3.1 Schwerpunkte von Flächen

Unser erstes Ziel ist es, eine Berechnungsformel für den Schwerpunkt  $S$  einer Fläche  $A$  unter dem Graphen  $f(x)$  zu finden und zu begründen (s. *Abb. 1*).

Dabei gehen wir davon aus, dass der Graph im 1. Quadranten eines Koordinatensystems untersucht wird, welcher mit zwei Begrenzungen auf der  $x$ -Achse,  $a$  und  $b$ , eine Fläche umschließt.



*Abb. 1*

Für jede Fläche  $A$  unter einem Graphen  $y = f(x)$  in den Grenzen von  $a$  bis  $b$  gilt:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Um den Schwerpunkt  $S(x_s | y_s)$  dieser Fläche zu erhalten, stellen wir uns vor, sie sei gleichmäßig mit einer Masse  $m$  belegt. Zwischen der Fläche  $A$  und der Masse  $m$  besteht ein Verhältnis, das sich mit einer anderen Größe beschreiben lässt – der Massendichte  $\rho$  –, für die gilt:

$$\text{Massendichte } \rho = \frac{m}{A} \tag{3.1}$$

Durch Umformen dieser Formel erhalten wir die Gesamtmasse  $m = \rho \cdot A$ . Setzen wir hier die Formel für die Fläche  $A$  ein, so erhalten wir folgendes Ergebnis:

$$m = \rho \int_a^b f(x) dx$$

Für die weiteren Überlegungen teilen wir die Gesamtfläche  $A$  in gleichmäßige Teilflächen  $\Delta A$  der Breite  $\Delta x$  ein und betrachten zunächst nur eine von ihnen:

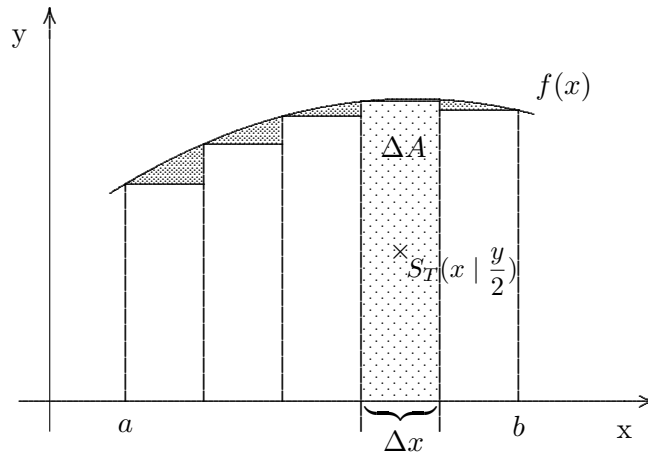


Abb. 2

Sehen wir diese Teilfläche  $\Delta A$  als Rechteck – unter Nichtbeachtung des Fehlers, der dabei entsteht (s. *Abb. 2*) –, so können wir über ihre Ausmaße folgende Aussage treffen:

$$\Delta A \approx \Delta x \cdot y$$

Aber auch die Masse  $\Delta m$  einer Teilfläche kann so bestimmt werden:

$$\Delta m = \rho \cdot \Delta x \cdot y$$

Für den Teilschwerpunkt  $S_T$  der Fläche  $\Delta A$  können wir nun auch die Koordinaten nach unserem bisherigen Wissen über Schwerpunkte festlegen. Es muss gelten:  $S_T \left( x \mid \frac{y}{2} \right)$ . Wie bereits erwähnt, entsteht bei dieser Betrachtung der Teilflächen eine Abweichung, die von der Breite von  $\Delta x$  abhängig ist. Wir haben diese in *Abb. 2* dunkelgrau dargestellt, sie wird später in unseren weiteren Überlegungen noch eine Rolle spielen.

Bei Betrachtung des statischen Moments

$$\mu = m \cdot \text{„Hebelarm“} \tag{3.2}$$

für diesen Teilschwerpunkt  $S_T$ , in dem die gesamte Masse  $m$  vereinigt ist, gilt:

bei Rotation um die  $x$ -Achse:

bei Rotation um die  $y$ -Achse:

$$\Delta \mu_x = \underbrace{\rho \cdot \Delta x \cdot y}_{\Delta m} \cdot \overbrace{\frac{y}{2}}{\text{„Hebelarm“}}$$

$$\Delta \mu_y = \underbrace{\rho \cdot \Delta x \cdot y}_{\Delta m} \cdot \overbrace{x}{\text{„Hebelarm“}}$$

Um die Gesamtmomente – also die statischen Momente der Fläche  $A$  – zu erhalten, formen wir folgendermaßen um, wobei wir davon ausgehen, dass  $\Delta x \rightarrow 0$  und die oben erwähnte Abweichung somit auch gegen den Wert 0 strebt. Wir erhalten dieser Vermutung nach also die Ableitung der Gesamtmomente  $\mu_x$  und  $\mu_y$ .

$$\frac{\Delta\mu_x}{\Delta x} = \rho \cdot y \cdot \frac{y}{2}$$

$$\frac{\Delta\mu_y}{\Delta x} = \rho \cdot y \cdot x$$

und  $\frac{\Delta\mu_x}{\Delta x} = (\mu_x)'$

und  $\frac{\Delta\mu_y}{\Delta x} = (\mu_y)'$

$$(\mu_x)' = \rho \cdot y^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$(\mu_y)' = \rho \cdot y \cdot x$$

Daher integrieren wir:

$$\mu_x = \int_a^b \rho \cdot y^2 \cdot \frac{1}{2} dx$$

$$\mu_y = \int_a^b \rho \cdot y \cdot x dx$$

$$\mu_x = \rho \cdot \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx$$

$$\mu_y = \rho \int_a^b y \cdot x dx$$

Auch am Flächenschwerpunkt  $S$  müssen statische Momente (s. (3.2)) wirken, wobei der Hebelarm hier den Koordinaten von  $S$ , also  $x_s$  und  $y_s$  entspricht. Diese lauten:

bei Rotation um die  $x$ -Achse:

bei Rotation um die  $y$ -Achse:

$$\mu_x = m \cdot y_s$$

$$\mu_y = m \cdot x_s$$

Wir gehen davon aus, dass die statischen Gesamtmomente des Flächenschwerpunktes mit den eben genannten statischen Momenten übereinstimmen. Deswegen setzen wir gleich und erhalten somit die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten des Schwerpunktes  $S$ :

$$m \cdot y_s = \mu_x = \rho \cdot \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx$$

$$m \cdot x_s = \mu_y = \rho \int_a^b y \cdot x dx$$

$$\rho \int_a^b f(x) dx \cdot y_s = \rho \cdot \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx$$

$$\rho \int_a^b f(x) dx \cdot x_s = \rho \int_a^b y \cdot x dx$$

$$y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

(3.3)

$$x_s = \frac{\int_a^b f(x) \cdot x dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

(3.4)

Mit den eben genannten Formeln sind wir in der Lage, den Schwerpunkt  $S$  einer Fläche  $A$  unter einem Graphen  $f(x)$  zu berechnen.

## 3.2 Schwerpunkte von Kurvenstücken

Nachdem wir den Schwerpunkt von Flächen unter einem Graphen berechnen können, leiten wir nun eine Berechnungsformel für den Schwerpunkt  $S$  von Kurvenstücken der Länge  $s$  eines Graphen  $f(x)$  her.

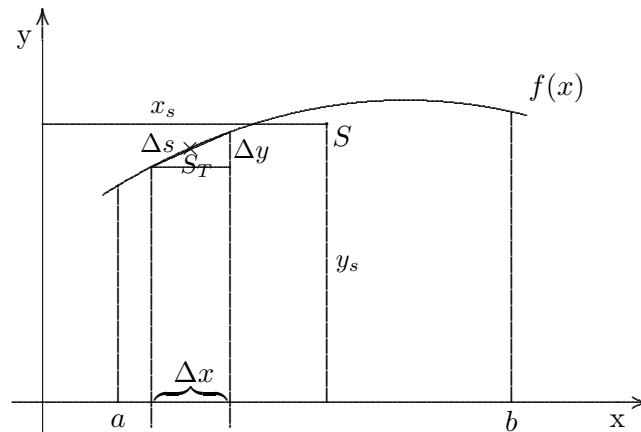


Abb. 3

Um zunächst die Länge des Kurvenstücks  $s$  der Funktion  $f(x)$  in den Grenzen von  $a$  bis  $b$  bestimmen zu können, betrachten wir nur einen Abschnitt  $\Delta x$  auf der  $x$ -Achse mit dem dazugehörigen Kurvenstück  $\Delta s$ . Mit dem Satz des Pythagoras berechnen wir die ungefähre Länge  $\Delta s$  des Kurvenabschnitts, wobei ein Fehler entsteht, da  $\Delta s$  nicht genau der Hypotenuse des Dreiecks entspricht. Dieser strebt jedoch gegen den Wert  $0$ , wenn  $\Delta x \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned}
 (\Delta s)^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \\
 \Delta s &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\
 &= \sqrt{(\Delta x)^2 \cdot \left(1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}\right)} \\
 &= \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \quad \text{und } \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \\
 &= \Delta x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}
 \end{aligned}$$

Das Gesamtkurvenstück  $s$  in den Grenzen von  $a$  bis  $b$  entspricht der Summe der zu den Achsenabschnitten  $\Delta x$  gehörenden Kurvenstücken  $\Delta s$  und somit dem Integral der Teilkurvenstücklänge  $\Delta s$ , also gilt:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$



Stellen wir uns dieses Kurvenstück gleichmäßig mit einer Masse  $m$  belegt vor, so können wir Folgendes darüber aussagen:

$$\text{Massendichte } \rho = \frac{m}{s}$$

$$m = \rho \cdot s$$

$$m = \rho \cdot \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Im Schwerpunkt  $S$  des Kurvenstücks  $s$  stellen wir uns diese gesamte Masse vereinigt vor, es wirken an ihm also folgende statische Momente:

bei Rotation um die  $x$ -Achse:

$$\mu_x = \underbrace{\rho \cdot s}_{\text{„Hebelarm“}} \cdot y_s$$

bei Rotation um die  $y$ -Achse:

$$\mu_y = \underbrace{\rho \cdot s}_{\text{„Hebelarm“}} \cdot x_s$$

Auch für den Teilschwerpunkt  $S_T$  des Kurvenstücks  $\Delta s$  können wir aufgrund von bereits bekanntem Wissen die ungefähren Koordinaten angeben. Er liegt nahezu auf dem Graphen, also gilt für ihn:  $S_T(x | y)$ .

Da wir die Koordinaten kennen, können wir auch bestimmen, welche statischen Teilmomente am Schwerpunkt wirken. Wir gehen dabei davon aus, dass die Abweichung minimal wird, wenn das betrachtete Kurvenstück minimal wird, also  $\Delta s \rightarrow 0$ .

bei Rotation um die  $x$ -Achse:

$$\Delta\mu_x = \underbrace{\rho \cdot \Delta s}_{\text{„Hebelarm“}} \cdot y$$

$$\frac{\Delta\mu_x}{\Delta s} = \rho \cdot y$$

$$(\Delta\mu_x)' = \rho \cdot y$$

bei Rotation um die  $y$ -Achse:

$$\Delta\mu_y = \underbrace{\rho \cdot \Delta s}_{\text{„Hebelarm“}} \cdot x$$

$$\frac{\Delta\mu_y}{\Delta s} = \rho \cdot x$$

$$(\Delta\mu_y)' = \rho \cdot x$$

Nun haben wir die Ableitung der Gesamtmomente  $\mu_x$  und  $\mu_y$ , sodass wir diese durch Integration erhalten:

$$\begin{aligned}\mu_x &= \int_a^b \rho \cdot y \, ds & \mu_y &= \int_a^b \rho \cdot x \, ds \\ \mu_x &= \rho \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx & \mu_y &= \rho \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx\end{aligned}$$

Diese Gesamtmomente müssen mit den statischen Momenten des Schwerpunktes  $S$  übereinstimmen. Durch Gleichsetzen erhalten wir die Formeln zur Berechnung der  $x$ - und  $y$ -Koordinaten des Schwerpunktes:

$$\begin{aligned}\rho \cdot s \cdot y_s &= \rho \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx & \rho \cdot s \cdot x_s &= \rho \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx \\ y_s &= \frac{\int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx}{s} & x_s &= \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx}{s}\end{aligned}$$

$$y_s = \frac{\int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx}$$

(3.5)

$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx}$$

(3.6)

Mit den eben genannten Formeln sind wir in der Lage, den Schwerpunkt eines Kurvenstücks  $s$  von einem Graphen  $f(x)$  zu berechnen.

## 4 Die 1. Guldinsche Regel

### 4.1 Herleitung der 1. Guldinschen Regel

Die 1. Guldinsche Regel dient zur Berechnung des Volumens  $V$  eines Rotationskörpers mit Hilfe der Lage des Schwerpunktes. Nach unserem bisherigen Wissen können wir das Volumen eines Rotationskörpers mit der Querschnittsfläche  $Q(x)$  berechnen, dabei gilt:

$$V = \int_a^b Q(x) dx$$

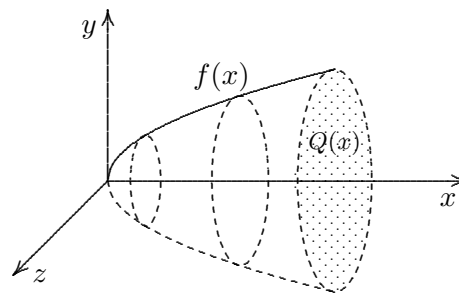


Abb. 4

Die Querschnittsfläche  $Q(x)$  entspricht hierbei einem Kreis. Dieser hat den Flächeninhalt  $F = \pi r^2$ . Durch Einsetzen erhalten wir:

$$V = \int_a^b \pi r^2 dx$$

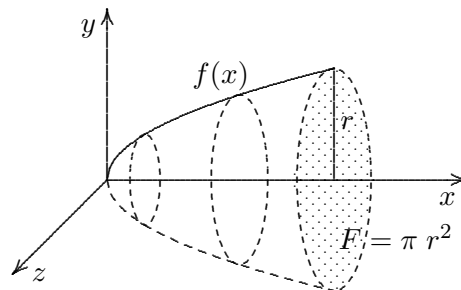


Abb. 5

Der Radius  $r$  dieses Kreises, der bei der Rotation entsteht, entspricht  $f(x)$ . Auch dieses setzen wir ein:

$$V = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx}$$

Wir kommen zu der Überlegung, welche Rolle der Schwerpunkt der Fläche  $A$  unter dem Graphen  $f(x)$  bei der Volumenberechnung des Rotationskörpers spielt.

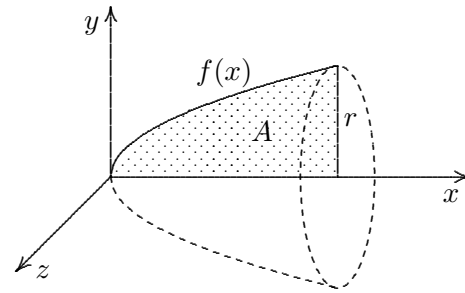


Abb. 6

Daher, dass der Graph um die  $x$ -Achse rotiert, betrachten wir in diesem Fall nur den  $y$ -Wert des Schwerpunktes. Für diesen gilt:

$$y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{1}{2A} \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Sowohl in dieser Formel als auch in der soeben bestimmten Formel zur Volumenberechnung (s. S. 10) kommt das gleiche Integral vor. Es ist für diese jeweils der Bezug zu dem rotierenden Graphen. Lösen wir beide nach diesem Integral auf, so erhalten wir Folgendes:

$$\int_a^b (f(x))^2 dx = \frac{V}{\pi} \quad \int_a^b (f(x))^2 dx = y_s \cdot 2A$$

Diese setzen wir gleich:

$$\frac{V}{\pi} = y_s \cdot 2A$$

Lösen wir die erhaltene Gleichung nach dem Volumen des Rotationskörpers auf, so erhalten wir folgende, nach Paul Guldin „1. Guldin'sche Regel“ benannte Berechnungsformel:

$$\boxed{V = 2 \cdot \pi \cdot y_s \cdot A} \tag{4.1}$$

In Worten lautet diese:

„Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der auf einer Seite der Drehachse liegenden erzeugenden Fläche und der Länge des Weges, den der Flächenschwerpunkt bei einer vollen Drehung um die Rotationsachse zurücklegt.“<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Quelle: <http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/guldinsche.html>

## 4.2 Bestätigung am Beispiel eines rotierenden Dreiecks

Unsere Aufgabe ist es, die soeben hergeleitete 1. Guldinsche Regel anhand eines um die  $x$ -Achse rotierenden Dreiecks zu bestätigen. Wir setzen die allgemeine Formeln für eine Gerade  $f(x)$  und den Flächeninhalt  $A$  eines Dreiecks in die Formel der Schwerpunktkoordinate  $y_s$  und berechnen Letztere:

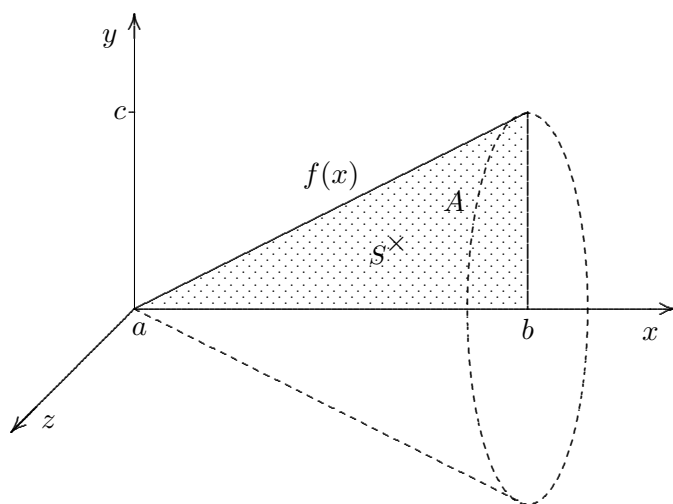


Abb. 7

$$f(x) = mx$$

$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b (f(x))^2 dx \quad \Rightarrow \quad y_s = \frac{1}{b \cdot c} \int_a^b (mx)^2 dx$$

$$= \frac{1}{b \cdot c} \int_a^b m^2 x^2 dx$$

$$= \frac{1}{b \cdot c} \left[ \frac{1}{3} m^2 x^3 \right]_a^b$$

mit  $a = 0$

$$= \frac{1}{b \cdot c} \cdot \frac{1}{3} m^2 b^3$$

$$= \frac{1}{3} \cdot m^2 \cdot \frac{b^2}{c}$$

Da wir  $y_s$  berechnet haben, setzen wir dieses und die bereits bekannte Formel für die Fläche  $A$  unter dem Graphen  $f(x)$  in die 1. Guldinsche Regel ein:

$$V = 2 \pi y_s A$$

$$\Rightarrow V = 2 \cdot \pi \cdot \overbrace{\frac{1}{3} m^2 \frac{b^2}{c}}^{y_s} \cdot \overbrace{\frac{b \cdot c}{2}}^A$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot m^2 \cdot b^3 \quad \text{mit } m = \frac{c}{b}, \text{ und daher } m^2 = \frac{c^2}{b^2}$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot b^3$$

$$V = \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot c^2 \cdot b$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit der Formel für das Volumen eines Kegels – dieser entsteht bei der Rotation eines Dreiecks – aus der Literatur, so stellen wir fest, dass die Formeln übereinstimmen.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Quelle: Sieber, Mathematische Formelsammlung für Gymnasien, Klett Verlag, S. 14

### 4.3 Bestätigung am Beispiel eines rotierenden Halbkreises

Bei der Bestätigung der 1. Guldinschen Regel am Beispiel eines um die  $x$ -Achse rotierenden Halbkreises berechnen wir anhand der bekannten Formeln für die Funktion  $f(x)$  des Halbkreises und der Halbkreisfläche  $A$  zunächst den  $y$ -Wert des Schwerpunktes.

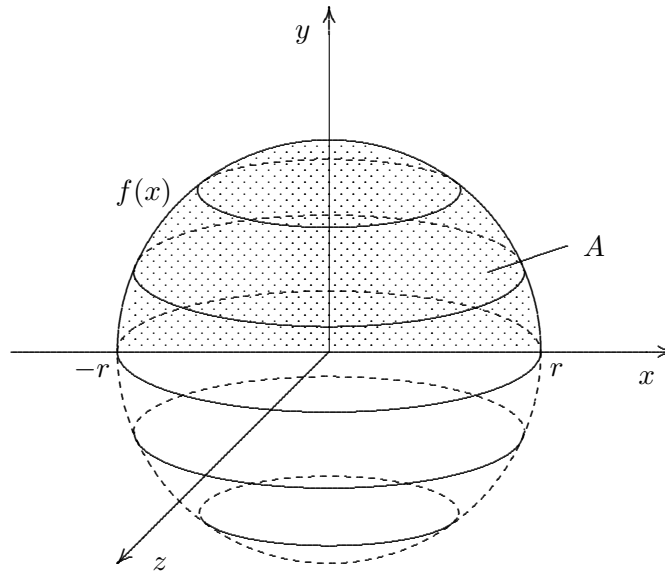


Abb. 8

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$A = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$$

$$\begin{aligned} y_s &= \frac{1}{2A} \int_{-r}^r (f(x))^2 dx \Rightarrow y_s = \frac{1}{\pi \cdot r^2} \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx \\ &= \frac{1}{\pi \cdot r^2} \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \frac{1}{\pi \cdot r^2} \left[ r^2 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right]_{-r}^r \\ &= \frac{1}{\pi \cdot r^2} \cdot \left( \left( r^3 - \frac{1}{3} \cdot r^3 \right) - \left( (-r)^3 - \frac{1}{3} \cdot (-r)^3 \right) \right) \\ &= \frac{1}{\pi \cdot r^2} \cdot \left( \left( \frac{2}{3} \cdot r^3 \right) - \left( -\frac{2}{3} \cdot r^3 \right) \right) \\ &= \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} \end{aligned}$$

Diesen berechneten  $y$ -Wert und die Fläche  $A$  setzen wir wie in Kapitel 4.2 in die 1. Gul-dinsche Regel ein:

$$V = 2 \pi y_s A$$

$$\Rightarrow V = 2 \cdot \pi \cdot \overbrace{\frac{4}{3} \cdot r}^{y_s} \cdot \overbrace{\frac{\pi \cdot r^2}{2}}^A$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Beim Vergleich der Formel zur Berechnung des Volumens einer Kugel – die bei der Rotation des Halbkreises entsteht – stimmt das Ergebnis wiederum mit der Literatur überein.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Quelle: Sieber, Mathematische Formelsammlung für Gymnasien, Klett Verlag, S. 14



## 5 Berechnung der Oberfläche eines Torus

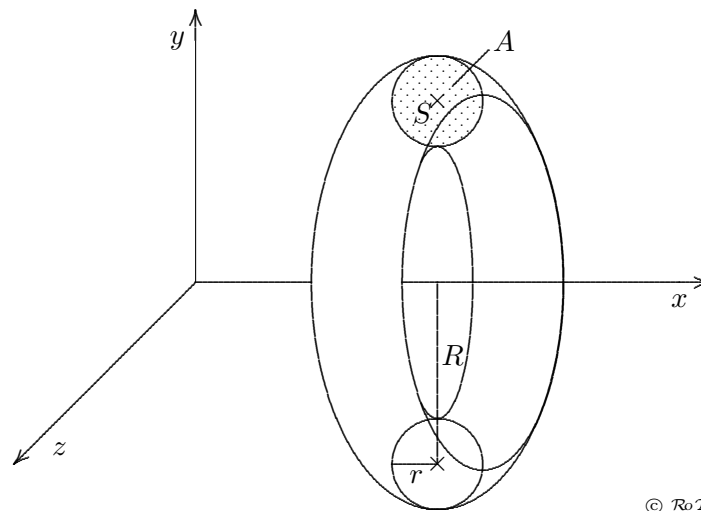


Abb. 9

© RoPi

Um die Oberfläche eines Torus zu berechnen, benutzen wir folgende, nach Paul Guldin „2. Guldinsche Regel“ benannte Regel. Sie beschreibt die Mantelfläche eines Körpers, der bei der Rotation einer Funktion, oder anders, eines „erzeugenden Bogens“ um eine Achse entsteht:

$$M = 2 \cdot \pi \cdot y_s \cdot s$$

Bei einem Torus – einem Körper, der entsteht, wenn eine Kreisfläche mit dem Kreisbogen  $s$  um eine Achse rotiert – entspricht die Mantelfläche der Oberfläche, sodass für diese gilt:

$$O = 2 \cdot \pi \cdot y_s \cdot s$$

Der „erzeugende Bogen“  $s$  der Fläche  $A$  ist in diesem Fall ein Kreis mit einem Umfang von  $2\pi r$ , also gilt:

$$s = 2\pi r$$

Der  $y$ -Wert des Schwerpunktes  $S$  der rotierenden Fläche  $A$  entspricht dem mittleren Radius  $R$  des Torus, also gilt:

$$y_s = R$$

Durch Einsetzen in die 2. Guldinsche Regel erhalten wir für die Oberfläche  $O$  des Torus:

$$O = 2\pi R \cdot 2\pi r$$

$$O = 4 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r$$

Der Vergleich mit der Formelsammlung bestätigt dieses Ergebnis.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Quelle: Sieber, Mathematische Formelsammlung für Gymnasien, Klett Verlag, S. 14

## 6 Die Schwerpunkte von Mündchen

### 6.1 Herleitung der Berechnungsformel

Es folgt die Untersuchung der Schwerpunkte von Mündchen. Um verständlich zu machen, warum es sich bei diesen Berechnungen handelt, klären wir zunächst, was wir unter einem Mündchen verstehen.

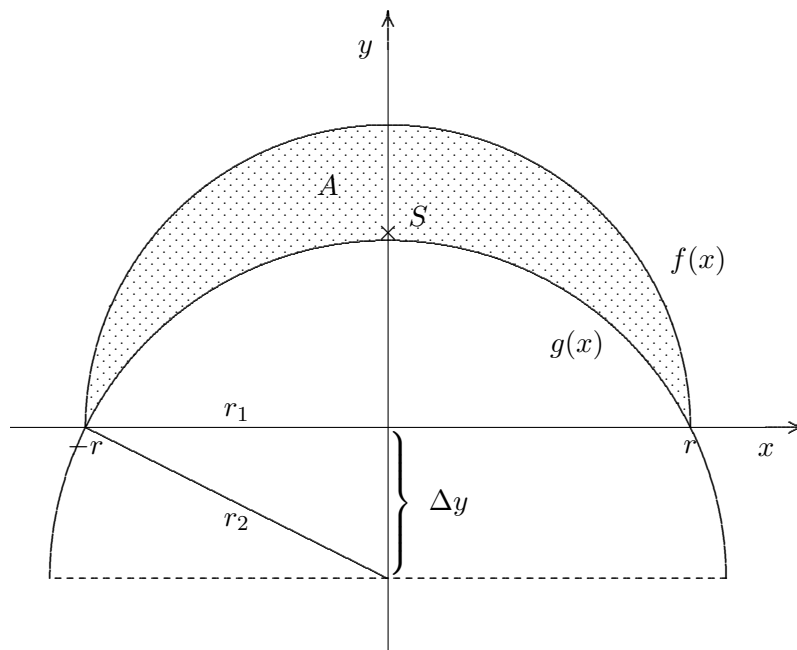


Abb. 10

Ein Mündchen ist eine sichelförmige Fläche, die hier zur besseren Berechnung mit den Spitzen auf der  $x$ -Achse steht und zudem noch symmetrisch in Bezug auf die  $y$ -Achse ist. Es wird nach außen bzw. in unserem Fall nach oben hin von einer Funktion  $f(x)$  begrenzt, die den Verlauf eines Halbkreises hat. Diese Funktion  $f(x)$  wird in den folgenden Überlegungen immer gleich bleiben. Ihr Radius  $r_1$  wird sich also nicht verändern. Nach innen bzw. unten ist die Funktion  $g(x)$  die Begrenzung der Mündchenfläche. Beide Funktionen berühren bzw. schneiden die  $x$ -Achse in denselben Punkten, aufgrund der Symmetrie und der Unveränderlichkeit von  $f(x)$  sind dies die Punkte  $-r$  und  $r$  auf der  $x$ -Achse.

Es kann nur eine Fläche  $A$  entstehen, wenn sich  $f(x)$  und  $g(x)$  voneinander unterscheiden. Denn für den Fall, dass  $g(x) = f(x)$  ist, untersuchen wir nicht mehr den Schwerpunkt einer Fläche mit dem Flächeninhalt  $A$ , sondern den eines Kurvenstücks mit der Länge  $s$ , was wir bereits getan haben. Also muss  $g(x)$  zwei Bedingungen erfüllen:

1.  $g(x)$  muss im Vergleich zu  $f(x)$  nach unten verschoben sein. Diese beliebig große Verschiebung auf der  $y$ -Achse ins Negative nennen wir hier  $\Delta y$ .
2.  $r_2$ , der Radius von  $g(x)$ , muss größer sein als  $r_1$ , denn wenn wir annehmen, dass  $g(x)$  denselben Radius hat wie  $f(x)$ , dann weichen bei einer Verschiebung von  $g(x)$  auf der  $y$ -Achse die Schnitt-, bzw. Berührungspunkte der beiden Funktionen mit der  $x$ -Achse voneinander ab. Dies ist jedoch eine zwingende Voraussetzung für Mündchen. Wie wir später noch zeigen werden, ist die Veränderung von  $r_2$  abhängig von der Größe von  $\Delta y$ .

Bekanntermaßen hat die äußere Funktion  $f(x)$  die Formel:

$$f(x) = \sqrt{r_1^2 - x^2}$$

Für  $g(x)$  gilt im Prinzip das Gleiche, nur beziehen wir hier die Verschiebung  $\Delta y$  mit ein. Also gilt:

$$g(x) = \sqrt{r_2^2 - x^2} - \Delta y$$

Um  $\Delta y$  zu erhalten, verwenden wir den Satz des Pythagoras:

$$r_1^2 + (\Delta y)^2 = r_2^2$$

$$(\Delta y)^2 = r_2^2 - r_1^2$$

$$\Delta y = \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$$

Wir stellen eine allgemein gültige Formel für  $g(x)$  auf:

$$g(x) = \sqrt{r_2^2 - x^2} - \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$$

Das weitere Vorgehen orientiert sich, wie bereits erwähnt, an Punkt 2.1, „Schwerpunkte von Flächen“.

Wieder teilen wir die Gesamtfläche  $A$  in beliebig viele Teilflächen  $\Delta A$ , jeweils mit der Breite  $\Delta x$  (es entsteht ein relativ großer Fehler, der sich nach der Größe von  $\Delta x$  richtet), und betrachten nur eine von diesen:

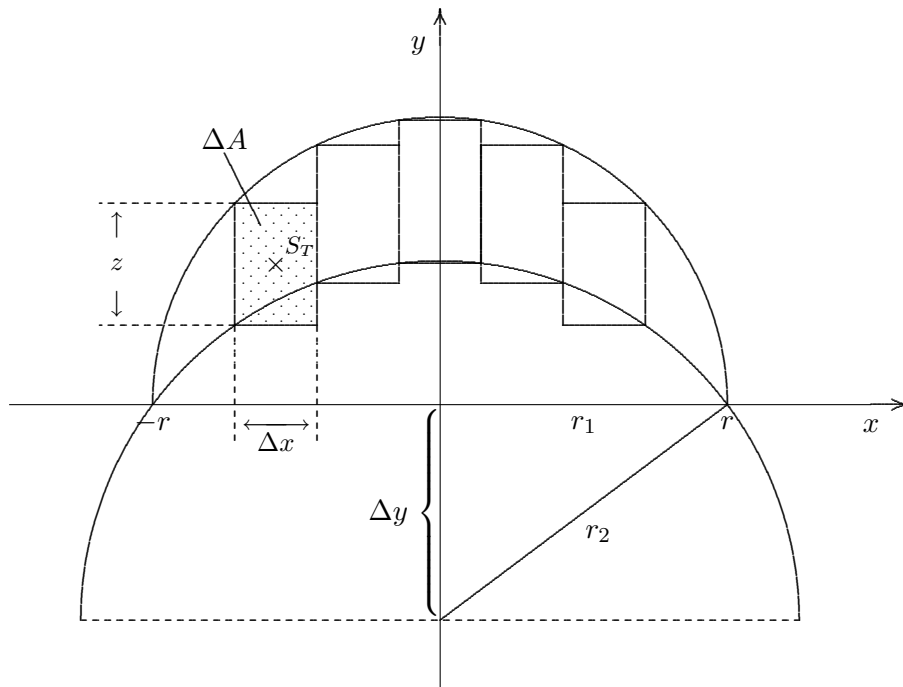


Abb. 11

Wir benötigen für die anstehenden Rechnungen die Teilmasse  $\Delta m$ , die Teilfläche  $\Delta A$ , und den Teilschwerpunkt  $S_T$ .

$\Delta A$  ist das Produkt aus  $\Delta x$  und der Differenz von  $f(x)$  und  $g(x)$ , die wir der Einfachheit halber nur  $z$  nennen:

$$\begin{aligned}
 \Delta m &= \rho \cdot \Delta A & \Delta A &= (\Delta x \cdot f(x)) \cdot (\Delta x \cdot g(x)) \\
 &= \rho \cdot \Delta x \cdot z & &= \Delta x \cdot (f(x) - g(x)) \\
 & & &= \Delta x \cdot \left( \sqrt{r_1^2 - x^2} - \left( \sqrt{r_2^2 - x^2} - \sqrt{r_2^2 - r_1^2} \right) \right) \\
 & & &= \Delta x \cdot \underbrace{\left( \sqrt{r_1^2 - x^2} - \sqrt{r_2^2 - x^2} + \sqrt{r_2^2 - r_1^2} \right)}_z \\
 & & &= \Delta x \cdot z
 \end{aligned}$$

Der Teilschwerpunkt hat die Koordinaten  $S_T \left( x \mid \frac{z}{2} + g(x) \right)$ .

Mit einer einfachen Nebenrechnung präzisieren wir die  $y$ -Koordinate:

$$\begin{aligned}
 \frac{z}{2} + g(x) &= \frac{1}{2} \cdot (f(x) - g(x)) + g(x) \\
 &= \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} g(x) + g(x) \\
 &= \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} g(x) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (f(x) + g(x))
 \end{aligned}$$

Wieder beginnen wir damit, die Formeln der statischen Momente aufzustellen. In diesem Fall betrachten wir allerdings nur  $\mu_x$ , denn wir benötigen nur den  $y$ -Wert  $y_s$  des Mönchenschwerpunktes  $S$ , da das Mönchchen symmetrisch in Bezug auf die  $y$ -Achse ist und daher von vornherein feststeht, dass  $x_s = 0$  ist.

Bei Rotation um die  $x$ -Achse:

$$\begin{aligned}
 \Delta \mu_x &= \underbrace{\rho \cdot \Delta x \cdot z}_{\Delta m} \cdot \overbrace{\frac{1}{2} \cdot (f(x) + g(x))}^{\text{„Hebelarm“}} \\
 &= \rho \cdot \Delta x \cdot (f(x) - g(x)) \cdot \frac{1}{2} (f(x) + g(x)) \\
 \frac{\Delta \mu_x}{\Delta x} &= \rho \cdot (f(x) - g(x)) \cdot \frac{1}{2} (f(x) + g(x)) \\
 \frac{\Delta \mu_x}{\Delta x} &= (\mu_x)'
 \end{aligned}$$

Für den Fall, dass  $\Delta x \rightarrow 0$ , kennen wir jetzt die Ableitung von  $\mu_x$ . Um dieses  $\mu_x$  zu erhalten, integrieren wir:

$$\begin{aligned}\mu_x &= \int_{-r}^r \rho \cdot (f(x) - g(x)) \cdot \frac{1}{2} (f(x) + g(x)) dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \cdot \int_{-r}^r (f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \cdot \int_{-r}^r (f(x))^2 - (g(x))^2 dx\end{aligned}$$

Um  $y_s$  zu erhalten, benötigen wir die allgemeine Formel  $\mu_x = m \cdot y_s$  und die Massenformel  $m = \rho \cdot A$ . Bei Letzterer müssen wir für die Gesamtfläche  $A$  des Mönchens noch beachten:

$$A = \int_{-r}^r (f(x) - g(x)) dx \quad (6.1)$$

Jetzt setzen wir beide Formeln für  $\mu_x$  gleich und lösen nach  $y_s$  auf.

$$\begin{aligned}m \cdot y_s &= \mu_x = \frac{1}{2} \rho \cdot \int_{-r}^r (f(x))^2 - (g(x))^2 dx \\ \rho \cdot \left( \int_{-r}^r f(x) - g(x) dx \right) \cdot y_s &= \frac{1}{2} \rho \cdot \int_{-r}^r (f(x))^2 - (g(x))^2 dx\end{aligned}$$

$$y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_{-r}^r (f(x))^2 - (g(x))^2 dx}{\int_{-r}^r f(x) - g(x) dx}$$

(6.2)

## 6.2 Untersuchung der Schwerpunkte von Möndchen

Die Untersuchung eines jeden Möndchens in Bezug auf seinen Schwerpunkt ist mit der eben hergeleiteten Formel möglich. Um weitere Aussagen über dieses Ergebnis treffen zu können, rechnen wir den Schwerpunkt für die folgenden Beispiele aus. Dafür haben wir einen äußeren Halbkreis mit dem Radius  $r_1 = 4$  gewählt, die Verschiebung  $\Delta y$  des unteren Halbkreises variiert.

Die Funktion  $f(x)$  stellen wir durch den vorgegebenen Radius  $r_1$  auf, den zweiten Radius  $r_2$  berechnen wir dann für die jeweilige Verschiebung  $\Delta y$  mit dem Satz des Pythagoras und stellen die Funktion  $g(x)$  auf.

Sind uns beide Funktionen bekannt, berechnen wir mit der Schwerpunktformel in dem Programm *Maple* den  $y$ -Wert, der  $x$ -Wert ist bekanntlich null.

Diesen rechnen wir mit drei Werten für  $\Delta y$  aus:

Beispiel 1:

*Pythagoras:*

$$r_2^2 = r_1^2 + (\Delta y)^2$$

$$r_2^2 = 4^2 + (-1)^2$$

$$r_2^2 = 17$$

$$r_2 = \sqrt{17}$$

$$f(x) = \sqrt{r_1^2 - x^2} \quad g(x) = \sqrt{r_1^2 - x^2} - \Delta y$$

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2} \quad g(x) = \sqrt{17 - x^2} - 1$$

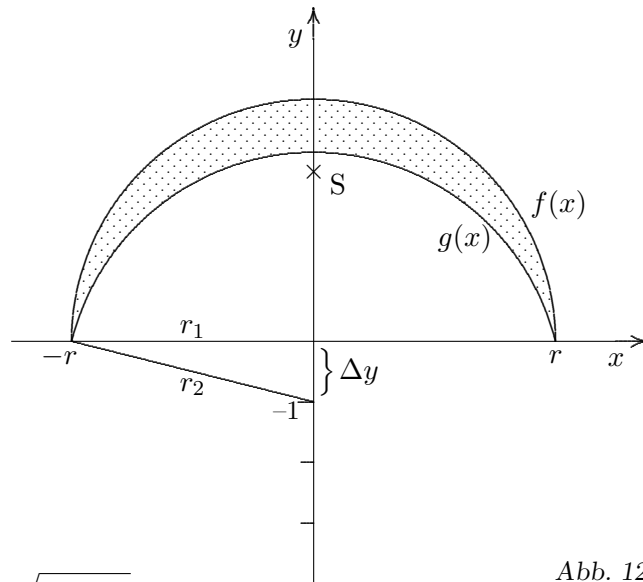


Abb. 12

$\Rightarrow S(0 \mid 2,8091)$

Beispiel 2:

Pythagoras:

$$r_2^2 = r_1^2 + (\Delta y)^2$$

$$r_2^2 = 4^2 + (-2)^2$$

$$r_2^2 = 20$$

$$r_2 = \sqrt{20}$$

$$f(x) = \sqrt{r_1^2 - x^2} \quad g(x) = \sqrt{r_1^2 - x^2} - \Delta y$$

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2} \quad g(x) = \sqrt{20 - x^2} - 2$$

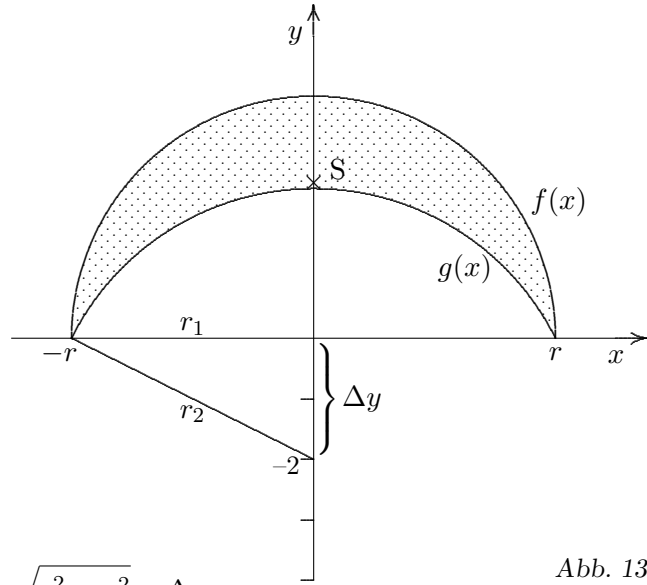


Abb. 13

$\Rightarrow S(0 \mid 2,5709)$

Beispiel 3:

Pythagoras:

$$r_2^2 = r_1^2 + (\Delta y)^2$$

$$r_2^2 = 4^2 + (-3)^2$$

$$r_2^2 = 25$$

$$r_2 = 5$$

$$f(x) = \sqrt{r_1^2 - x^2} \quad g(x) = \sqrt{r_1^2 - x^2} - \Delta y$$

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2} \quad g(x) = \sqrt{25 - x^2} - 3$$

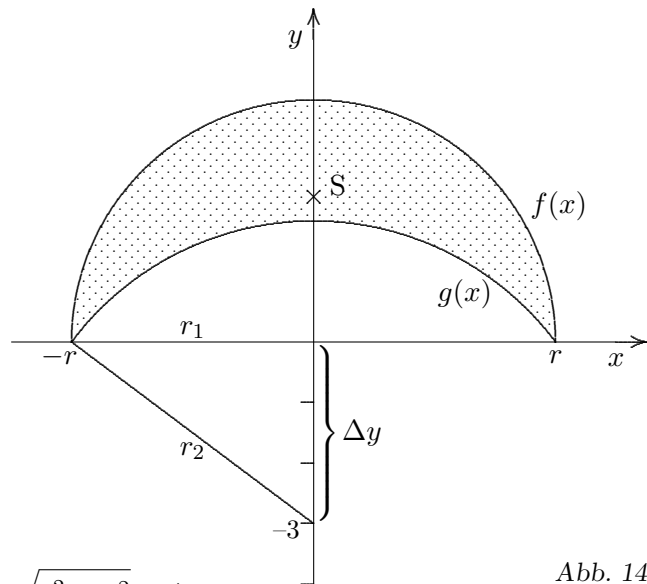


Abb. 14

$\Rightarrow S(0 \mid 2,4033)$

Betrachten wir die Ergebnisse dieser Beispielrechnungen, so fällt auf, dass der Schwerpunkt umso tiefer liegt, je weiter  $\Delta y$  ins Negative geht.

Um dieses Phänomen genauer zu untersuchen, stellen wir eine Messreihe auf, die das Verhalten des Schwerpunktes in Bezug auf die Verschiebung  $\Delta y$  erläutert.

Dazu präzisieren wir unsere Rechnungen, indem wir für verschiedene  $\Delta y$  mit *Maple* die zugehörigen  $y_s$ -Werte berechnen. Dabei kommen folgende Ergebnisse heraus:

$\Delta y$	$y_s$	$\Delta y$	$y_s$
-0,25	3,049894958	-4,00	2,281250000
-0,50	2,963065050	-4,25	2,258379037
-0,75	2,884689549	-4,50	2,235259083
-1,00	2,809090909	-4,75	2,214119020
-1,25	2,743801653	-5,00	2,191075515
-1,50	2,682791523	-6,00	2,121701669
-1,75	2,625870647	-7,00	2,072164948
-2,00	2,570909091	-8,00	2,029925187
-2,25	2,526182432	-9,00	2,003891051
-2,50	2,482157018	-10,0	1,971428571
-2,75	2,442524418	-11,0	1,931711880
-3,00	2,403295129	-12,0	1,924319335
-3,25	2,370956641	-13,0	1,900638104
-3,50	2,339973440	-14,0	1,897018970
-3,75	2,310610932	-15,0	1,864937388

Beim Betrachten dieser Wertepaare lässt sich eine Tendenz erkennen, in welchem Zusammenhang die beiden Größen zueinander stehen. Um diesen Zusammenhang deutlich zu machen, stellen wir ihn graphisch dar. Das setzen wir um, indem wir die Verschiebung  $\Delta y$  auf die  $x$ -Achse eines Koordinatensystems und die Lage des Schwerpunktes auf die  $y$ -Achse auftragen:

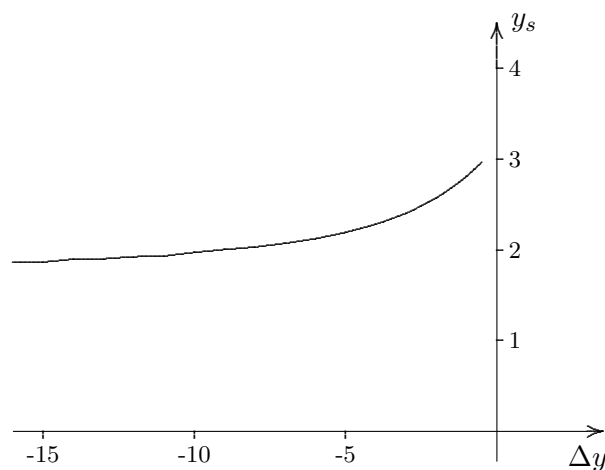


Abb. 15



Wir vermuten weiter, dass es zwei Werte gibt, gegen die der  $y$ -Wert des Schwerpunktes strebt, wenn  $\Delta y \rightarrow 0$  oder  $\Delta y \rightarrow -\infty$ .

Sobald  $\Delta y \rightarrow 0$ , wird der Radius  $r_2$  kleiner, sodass die Funktion  $g(x)$  sich immer mehr  $f(x)$  annähert. Der Schwerpunkt verschiebt sich bei dieser Entwicklung nach oben. Jetzt ist unsere Definition des Mändchens zu beachten, nach der die Funktionen nicht gleich sein dürfen, da wir sonst ein Kurvenstück bzw. einen Halbkreisbogen betrachten würden.

Das bedeutet für unsere Überlegung, dass wir eine Grenze gefunden haben, an der sich der Schwerpunkt nicht mehr weiter nach oben verschieben kann. Im Idealfall, wenn  $\Delta y \rightarrow 0$ , erhalten wir als Grenzfall genau dieses Kurvenstück und dessen Schwerpunkt. Es gilt:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} y_s = 3,3598$$

Betrachten wir die andere Seite der „Schwerpunktwanderung“, so gilt:  $\Delta y \rightarrow -\infty$ . Hierbei entsteht die Vorstellung, dass der Radius  $r_2$  mit der Verschiebung der Funktion  $g(x)$  zunimmt. Das Stück des Kreisbogens oberhalb der  $x$ -Achse flacht immer mehr ab, es nähert sich dieser also mehr und mehr an. Diesen Fall dürfen wir eigentlich nicht beachten, da der dabei entstehende Halbkreis nicht unserer Definition von Mändchen entspricht. Da die  $y$ -Koordinate des Halbkreises aber einen Grenzwert von  $y_s$  darstellt, beziehen wir ihn dennoch mit in unsere Überlegungen ein. Es gilt:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow -\infty} y_s = 1,6976$$

Grafisch lässt sich diese Vorstellung folgenderweise darstellen:

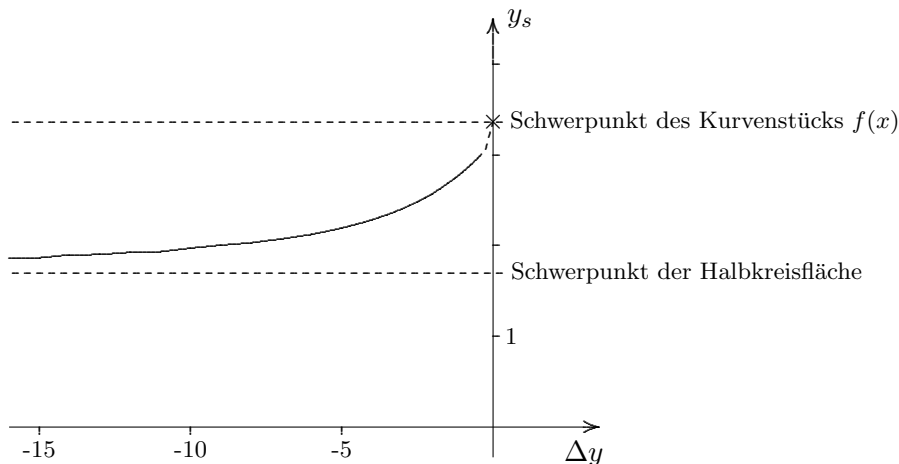


Abb. 16

Das Ergebnis unserer Untersuchung zur Abhängigkeit der Lage des Schwerpunktes  $S$  und der Verschiebung  $\Delta y$  ist, dass sich das  $y_s$  eines Mändchens zwischen der  $y$ -Koordinate des Schwerpunktes einer Halbkreisfläche und der des Schwerpunktes eines Halbkreisbogens bewegen kann. Dabei ist zu bemerken, dass, je weiter  $\Delta y$  ins Negative geht, diese Bewegung umso langsamer wird (vgl. Abflachung des Graphen in *Abb. 15* und *Abb. 16*). Dieses gilt für jedes beliebige Mändchen, sofern es unserer Definition entspricht.

## 7 Schlusswort

Nach intensiver Beschäftigung mit dem Thema „Schwerpunkte von Flächen und Rotationskörpern“ sind wir zu dem Schluss gekommen, dass Schwerpunktberechnung auf ein sehr breites Anwendungsgebiet übertragbar ist, von dem wir lediglich einen Teil kennen gelernt bzw. den wir nur ansatzweise untersucht haben.

Zu unserer Arbeit während dieser sechs Wochen ist zu sagen, dass der erste Teil unserer Aufgabenstellung, die Herleitung der Berechnungsformeln, zu einem großen Teil reproduktive Arbeit war. Es ging hauptsächlich darum, Verständnis für die Hintergründe aufzubauen und diese mit eigenen Worten und zusätzlichen Erklärungen wiederzugeben.

Die nächste Aufgabe, die Herleitung der 1. Guldinschen Regel war der erste Teil, bei dem eigene Ideen zur Lösung führten, wobei wir aus der Literatur genau wussten, welches Ziel wir verfolgten. Die gefundene Lösung wurde hinterher durch die Bestätigung am rotierenden Dreieck und Halbkeis angewandt, auch die Oberfläche des Torus war durch Anwendung der 2. Guldinschen Regel herauszubekommen.

Nach der Lösung der ersten Aufgaben kamen wir zur Untersuchung von Mönchenschwerpunkten, dem wohl größten und anspruchsvollsten Teil dieser Facharbeit. Nachdem wir am Anfang sehr viele Ideen zur Berechnung des Schwerpunktes hatten (zum Beispiel, die bereits hergeleiteten Formeln anzuwenden, also die Einzelschwerpunkte unter den Graphen oder die Einzelschwerpunkte der Kurvenstücke zu berechnen und diese auf eine Weise „zusammenzufassen“). Diese führten aber nie zu einer Lösung, einmal ganz davon abgesehen, dass die Rechnungen so komplizierte Ausmaße annahmen, dass ein Computer mit dem Programm *Maple* schon das Ende seiner Fähigkeiten erreichte, also mussten wir nach einer anderen Lösungsmethode suchen. Der nächste Versuch, sich quasi alleine an der Herleitungsart der vorherigen Formeln zu orientieren und eine völlig neue Formel herzuleiten, war ein voller Erfolg, sodass wir den Schwerpunkt von Mönchen mit einer allgemeinen Formel berechnen konnten, die Ideen zu den weiteren Untersuchungen entstanden während dieser Untersuchung des Schwerpunktes.

Die Arbeit mit  $\text{\LaTeX}$  erschien uns anfangs wie eine weitere Hürde, die wohl oder übel in sechs Wochen genommen werden musste. Mit der Zeit allerdings haben wir das Programm dann doch als eine Hilfe erkannt, mit der sich alles, was wir benötigten, ansprechend darstellen ließ. Dabei sollte man aber auch nicht übersehen, dass es eine ganze Zeit gedauert hat, bis wir uns relativ problemlos in  $\text{\LaTeX}$  bewegen konnten, oder anders: Wenn man nicht die meisten Befehle nach einiger Zeit auswendig kennen würde, säße man auch nach sechs Wochen noch irritiert vor dem Bildschirm, auf der Suche nach den richtigen Befehlen.

## 8 Anhang

### 8.1 Definitionen

Mantelfläche:

Der Mantel eines Körpers ist die Vereinigung aller von der Grund- und Deckfläche verschiedenen Begrenzungsflächen.

Körper:

Unter einem Körper versteht man jede dreidimensionale Punktmenge des dreidimensionalen Raumes, die von endlich vielen, ebenen oder gekrümmten Flächenstücken begrenzt wird. Die begrenzenden Flächenstücke gehören dabei mit zum Körper.

Oberfläche:

Die Oberfläche ist die Menge der Randpunkte eines geometrischen Körpers.

Oberflächeninhalt:

Unter dem Oberflächeninhalt versteht man den Flächeninhalt der Oberfläche eines Körpers (oft auch einfach Oberfläche genannt) oder auch die Vereinigung der begrenzenden Flächenstücke.

Rotationskörper:

Ein Rotationskörper ist ein Körper, dessen Mantelfläche durch Rotation einer ebenen Kurve um eine feste Achse entsteht.

statisches Moment:

Unter dem statischen Moment eines Massepunktes bezüglich einer Achse versteht man das Produkt aus dem Abstand  $l$  des Massepunktes von der Achse („Hebelarm“) und aus der Masse  $m$ .

## 8.2 Formelverzeichnis der wichtigsten Formeln

(3.1)	$\rho = \frac{m}{A}$	Massendichte	S. 4
(3.2)	$\mu = m \cdot \text{„Hebelarm“}$	statisches Moment	S. 5
(3.3)	$y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$	$y$ -Wert des Flächenschwerpunktes	S. 6
(3.4)	$x_s = \frac{\int_a^b f(x) \cdot x dx}{\int_a^b f(x) dx}$	$x$ -Wert des Flächenschwerpunktes	S. 6
(3.5)	$y_s = \frac{\int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}$	$y$ -Wert des Kurvenstückschwerpunktes	S. 9
(3.6)	$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}$	$x$ -Wert des Kurvenstückschwerpunktes	S. 9
(4.1)	$V = 2 \cdot \pi \cdot y_s \cdot A$	1. Guldinsche Regel	S. 11
(6.1)	$A = \int_{-r}^r f(x) - g(x) dx$	Möndchen-Flächeninhalt	S. 20
(6.2)	$y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_{-r}^r (f(x))^2 - (g(x))^2 dx}{\int_{-r}^r f(x) - g(x) dx}$	$y$ -Wert eines Möndchenschwerpunktes	S. 20

### 8.3 Abbildungsverzeichnis

<i>Abb. 1</i>	Schwerpunkte von Flächen	S. 4
<i>Abb. 2</i>	Schwerpunkte von Teilflächen	S. 5
<i>Abb. 3</i>	Schwerpunkte von Kurvenstücken	S. 7
<i>Abb. 4</i>	Volumen eines Rotationskörpers I	S. 10
<i>Abb. 5</i>	Volumen eines Rotationskörpers II	S. 10
<i>Abb. 6</i>	Volumen eines Rotationskörpers III	S. 11
<i>Abb. 7</i>	Der Kegel - ein rotierendes Dreieck	S. 12
<i>Abb. 8</i>	Die Kugel - ein rotierender Halbkreis	S. 14
<i>Abb. 9</i>	Der Torus	S. 16
<i>Abb. 10</i>	Schwerpunkte von Möndchenflächen	S. 17
<i>Abb. 11</i>	Schwerpunkte von Möndchenteilflächen	S. 18
<i>Abb. 12</i>	Möndchenbeispiel I	S. 21
<i>Abb. 13</i>	Möndchenbeispiel II	S. 22
<i>Abb. 14</i>	Möndchenbeispiel III	S. 22
<i>Abb. 15</i>	Schwerpunktuntersuchung	S. 23
<i>Abb. 16</i>	Schwerpunktuntersuchung mit Grenzen	S. 24

## 8.4 Quellenangaben

### Bücher:

Bronstein, I.N. / Semendjajew, K.A., Taschenbuch der Mathematik 19. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Thun 1980

Gellert, W. / Dr. Küstner, H., Handbuch der Mathematik, Buch und Zeit Verlagsgesellschaft mbH Köln

Kindiger, Dieter / Prof. Dr. Scheid, Harald, Schülerduden Mathematik II, Dudenverlag, Mannheim 2000

Dr. h. c. Walter, Ignaz, Mathematik für alle leicht gemacht Band II, Manfred Pawlak Verlagsgesellschaft mbH, Herrsching 1991

### Internetseiten:

[http://members.tripod.com/sfabel/mathematik/epochen\\_spa.html](http://members.tripod.com/sfabel/mathematik/epochen_spa.html)

<http://www.kfunigraz.ac.at/imawww/pages/hist/guldin.html>

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/hebisch/cafe/guldinsche.html>

### Sonstiges:

Unterlagen vom Fachlehrer

Sieber, Mathematische Formelsammlung für Gymnasien, Klett Verlag