Facharbeit

Mischungsprobleme

J. Str.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Aufgabenstellung . . . 1

1.2 Modellvorstellung . . . 1

1.3 Aufbau der Arbeit . . . 1

2 Gleiche Fließgeschwindigkeiten **3**

2.1 Beispielaufgabe . . . 3

2.2 Aufstellen einer DGL . . . 3

2.3 Exakte Lösung der DGL . . . 4

2.4 Begrenztes Wachstum . . . 4

2.5 Exponentielle Abnahme . . . 5

2.6 Lösungsfunktion . . . 5

2.7 Variation der Geschwindigkeit . . . 7

2.8 Einfluss der Fließgeschwindigkeit . . . 8

3 Ungleiche Zu- und Abflussgeschwindigkeiten **9**

3.1 Konstante Geschwindigkeiten . . . 9

3.1.1 Lösungsfunktion . . . 9

3.2 Einfluss des Tankinhalts . . . 11

3.3 Variation der Fließgeschwindigkeiten . . . 11

3.3.1 Begrenzte Zuflussgeschwindigkeit . . . 12

3.3.2 Iteratives Lösungsverfahren . . . 13

3.3.3 Schwankende Zuflussgeschwindigkeit . . . 14

4 Schluss **16**

4.1 Fazit . . . 16

4.2 Schlusswort . . . 17

5 Anhang **18**

5.1 Rechnungen . . . 18

5.2 Quellenangabe . . . 19

1 Einleitung

1.1 Aufgabenstellung

Das Thema meiner Facharbeit lautet „Mischungsprobleme“. Es soll der Zu- und Abfluss von Stoffen, die in einem Medium gelöst sind, und deren zeitabhängige Konzentration untersucht werden.

Ein Beispiel für einen Mischungsvorgang ist der Zu- und Abfluss von Schadstoffen in einen See, wobei z.B. die Fragestellung interessant wäre, nach welcher Zeit die Schadstoffkonzentration einen bestimmten Grenzwert überschreitet oder wie lange es dauert, bis der See nach Beendigung der Schadstoffzufuhr wieder sauber ist.

1.2 Modellvorstellung

Um die Mischungsvorgänge untersuchen zu können, müssen sie zunächst modellhaft beschrieben werden. Alle Mischungsvorgänge, die ich betrachten werde, lassen sich mit dem Modell eines Wassertanks beschreiben, in den Wasser mit einer bestimmten Geschwindigkeit hereinströmt und den Tank durch einen Abfluss wieder verlässt. Wenn es in der Realität mehrere Zu- oder Abflüsse gibt, entsprechen deren Summe dem Zu- bzw. Abfluss im Modell. Im Wasser ist ein Stoff mit einer bestimmten Konzentration gelöst. Der Einfachheit halber werde ich in meinem Modell Salz nehmen, aber für andere Stoffe gilt natürlich dasselbe. Ich werde davon ausgehen, dass sich das Salz zu jedem Zeitpunkt beim Einfließen sofort gleichmäßig im Wasser verteilt, also die Konzentrationen sich mischen, bevor die entstandene Mischung den Tank verlässt.

Wenn die Konzentration des einfließenden Wassers nicht der Anfangskonzentration im Tank entspricht, wird sich die Mischungskonzentration mit der Zeit ändern. Die Abhängigkeit dieser Konzentration, bzw. der Menge des gelösten Stoffes, von der Zeit wird im Verlauf der Facharbeit die Kernfrage darstellen.

Bei allen Betrachtungen von Funktionen und Graphen werde ich im positiven Zahlenbereich bleiben, da es keine negative Konzentration gibt. Auch der Tankinhalt und die Fließgeschwindigkeiten werden immer positiv bleiben.

1.3 Aufbau der Arbeit

Um herauszufinden, wie sich die Konzentration mit der Zeit ändert, werde ich zunächst die in der Realität ablaufenden Mischungsvorgänge mit Hilfe von mathematischen Formeln beschreiben. Unter Berücksichtigung möglichst vieler realer Bedingungen müssen Gleichungen aufgestellt werden, deren Lösungen Modellfunktionen ergeben. Mit ihnen können Voraussagen über den weiteren Verlauf eines Mischungsvorgangs getroffen werden.

Ich werde versuchen, Gleichungen immer erst exakt zu lösen. Wenn mir das bei komplizierteren Gleichungen nicht mehr möglich ist, werde ich sie näherungsweise bestimmen.

Die Gleichungen, die die Prozesse beschreiben, hängen von der Konzentration im zufließenden Wasser, den Fließgeschwindigkeiten, sowie von der Wassermenge im Tank und deren Anfangskonzentration ab. Daher werde ich diese im Verlauf der Facharbeit variieren. Besonderen Einfluss haben dabei die Fließgeschwindigkeiten des Wassers. Ich werde davon ausgehen, dass die Konzentration im einfließenden Wasser nicht von der Zeit abhängig ist, sondern konstant bleibt.

Man kann grundsätzlich zwischen zwei Arten von Mischungsvorgängen unterscheiden:

- Mischungsvorgänge mit gleichen Fließgeschwindigkeiten. Der Tankinhalt ändert sich nicht, da immer genauso viel Wasser ein- wie ausströmt. Mit ihnen werde ich mich zuerst beschäftigen.
- Mischungsvorgänge mit ungleichen Fließgeschwindigkeiten. Der Tankinhalt ändert sich mit der Zeit, was auch Einfluss auf den Mischungsvorgang hat. Damit werde ich mich im nächsten Teil befassen.

Im Schlussteil werde ich die Ergebnisse auswerten und eine Reflektion der gesamten Arbeit geben.

Längere und kompliziertere Rechnungen werden im Anhang zu finden sein. Auf die ausführliche Darstellung von Rechnungen, die sich im Prinzip wiederholen und deren Lösungsweise bekannt ist, werde ich verzichten.

2 Gleiche Fließgeschwindigkeiten

2.1 Beispielaufgabe

Ein Mischungsproblem könnte so lauten: In einem Tank befinden sich $I = 100$ Liter Wasser. Darin ist zu Beginn eine bestimmte Menge Salz (Q_0) gelöst. Durch ein Rohr strömt Wasser mit einer Geschwindigkeit von $v = 3\ \frac{l}{min}$ ein. Es besitzt eine Salz-Konzentration von $C_1 = \frac{1}{20}\ \frac{kg}{l}$. In dem Tank mischen sich die Flüssigkeiten unterschiedlicher Konzentration gleichmäßig und die Mischung verlässt den Tank durch ein Abflussrohr mit einer Geschwindigkeit von ebenfalls $v = 3\ \frac{l}{min}$. Welche Menge Salz enthält der Tank nach 10 Minuten, 1 Stunde, 10 Stunden?

2.2 Aufstellen einer DGL

Um eine Funktion zu entwickeln, mit der man die Konzentration in Abhängigkeit von der Zeit angeben kann, muss zunächst eine Differentialgleichung (DGL) aufgestellt werden, die den Mischungsvorgang mathematisch beschreibt. Deren Lösung ist dann die gesuchte Modellfunktion.

Die Menge an gelöstem Salz im Tank zum Zeitpunkt t nenne ich $Q(t)$. Zu Beginn enthält der Tank die Menge Q_0 an Salz in Kilogramm und die Wassermenge I in Litern; es gilt also $Q(0) = Q_0$ und $I = 100$.

Um die Differentialgleichung aufzustellen, betrachte ich die Änderungsrate bzw. -geschwindigkeit der Salzmenge im Tank zum Zeitpunkt t, also $Q'(t)$.

Hätte man keinen Abfluss, sondern nur einen Zufluss, würde sich die Salzmenge im Tank mit der Rate:

$$Q_1'(t) = C_1 \cdot v = \frac{1}{20}\ \frac{kg}{l} \cdot 3\ \frac{l}{min} = \frac{3}{20}\ \frac{kg}{min}$$

ändern. Da man aber auch einen Abfluss hat, muss man die Rate, mit der das Salz in der neuentstandenen Mischung den Tank wieder verlässt, von der Zuflussrate abziehen.

Die Abflussgeschwindigkeit des Salzes beträgt dabei:

$$Q_2'(t) = C(t) \cdot v = \frac{Q(t)}{I} \cdot v = \frac{Q(t)}{100}\ \frac{kg}{l} \cdot 3\ \frac{l}{min} = \frac{3}{100} \cdot Q(t)\ \frac{kg}{min}$$

Hier findet der eigentliche Mischungsvorgang statt: Die Salzmenge im Tank $Q(t)$ verteilt sich gleichmäßig in der Wassermenge I und die Lösung mit der Mischungskonzentration $C(t) = \frac{Q(t)}{I} = \frac{Q(t)}{100}$ verlässt den Tank mit der Geschwindigkeit $v = 3\ \frac{l}{min}$.

Das Wasser selbst ist bei diesem Beispiel nun nicht mehr interessant; es kommt auf die Salzmenge, die pro Zeiteinheit fließt, an. Die Einheiten werde ich im Folgenden weglassen. Nun kann man die DGL aufstellen:

$$Q'(t) = Q_1'(t) - Q_2'(t) = \frac{3}{20} - \frac{3}{100} \cdot Q(t) \qquad \text{oder allgemein:} \qquad Q'(t) = v \cdot (C_1 - \frac{Q(t)}{I})$$

Es fällt sofort auf, dass es sich um eine DGL des beschränkten Wachstums handelt. Ich werde darauf später noch genauer eingehen.

2.3 Exakte Lösung der DGL

Um die Salzmenge zu einem bestimmten Zeitpunkt auszurechnen, benötigt man eine Funktion, die die Menge an Salz im Tank zum Zeitpunkt t genau erfasst. Man erhält sie durch Lösen der DGL. In diesem Fall kann sie exakt gelöst werden. Die Lösungsfunktion lautet in diesem Fall (Rechnung siehe Anhang):

$$Q(t) = 5 - 5e^{-\frac{3}{100}t} + Q_0 \cdot e^{-\frac{3}{100}t}$$

Wenn man die Konzentration $C(t)$ betrachten möchte, muss man die Salzmenge $Q(t)$ durch den Tankinhalt I teilen.

$$C(t) = \frac{Q(t)}{I} = \frac{5}{100} - \frac{5}{100} \cdot e^{-\frac{3}{100}t} + \frac{Q_0}{100} \cdot e^{-\frac{3}{100}t}$$

$$C(t) = \frac{1}{20} \cdot (1 - e^{-\frac{3}{100}t}) + \frac{Q_0}{100} \cdot e^{-\frac{3}{100}t}$$

Die Konzentration $C(t)$ setzt sich aus zwei Summanden zusammen, die sich physikalisch interpretieren lassen:

$$C(t) = C_1(t) + C_2(t) \quad \text{mit} \quad C_1(t) = \frac{1}{20} \cdot (1 - e^{-\frac{3}{100}t}) \quad \text{und} \quad C_2(t) = \frac{Q_0}{100} \cdot e^{-\frac{3}{100}t}$$

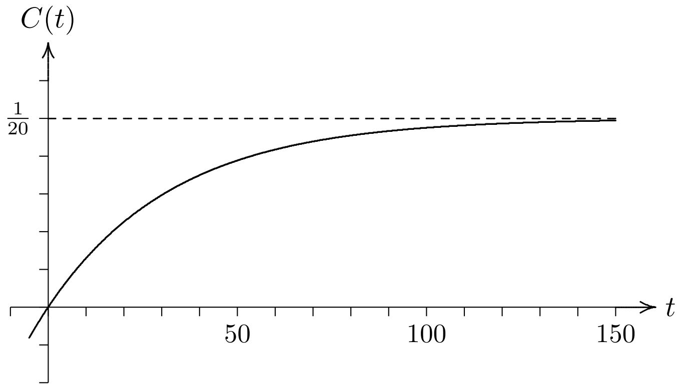
2.4 Begrenztes Wachstum

Wenn zu Beginn kein Salz im Tank, also $Q_0 = 0$ ist, entfällt der Term $C_1(t) = \frac{Q_0}{100} \cdot e^{-\frac{3}{100}t}$ und es bleibt übrig:

$$C(t) = C_2(t) = \frac{1}{20} \cdot (1 - e^{-\frac{3}{100}t})$$

Dieser Teil der Funktion beschreibt die Salzkonzentration im Tank, die aus dem Zufluss resultiert.

Es handelt sich hier offensichtlich um eine beschränkte Wachstumsfunktion mit der Grenze $\frac{1}{20}$. Das ist physikalisch auch leicht nachzuvollziehen, da das klare Wasser mit der Zeit durch die hinzufließende Lösung ersetzt wird, die ja eine Konzentration von $\frac{1}{20}\ \frac{kg}{l}$ besitzt.



Allerdings erreicht die Konzentration (zumindest theoretisch) nie den Grenzwert von $\frac{1}{20}$, sondern nähert sich ihm nur immer weiter an:

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = \frac{1}{20} - \frac{1}{20} \cdot \underbrace{e^{-\frac{3}{100}t}}_{\to 0} = \frac{1}{20}$$

2.5 Exponentielle Abnahme

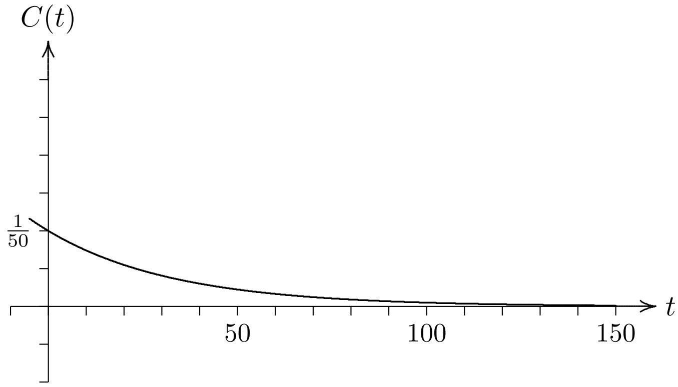
Wenn die Anfangsmenge an Salz im Tank nicht Null, sondern beispielsweise 2 kg beträgt, also $Q_0 = 2$ ist, gilt für die Anfangskonzentration $C(0) = C_0 = \frac{Q_0}{I} = \frac{1}{50}$.

Der zweite Summand der Funktion sieht in diesem Fall folgendermaßen aus:

$$C_2(t) = \frac{1}{50} \cdot e^{-\frac{3}{100}t}$$

Diese Funktion beschreibt, wieviel Salz vom Anfangsgehalt Q_0 sich zum Zeitpunkt t noch im Tank befindet.

Es handelt sich um eine exponentielle Zerfallsfunktion. Der Term wird in dem Maße, in dem die ursprüngliche Lösung aus dem Tank fließt, kleiner. Je weniger Salz vorhanden ist, desto langsamer nimmt sein Gehalt ab. Der Anfangsgehalt verschwindet (theoretisch) nie vollständig, sondern strebt gegen Null:



$$\lim_{t\to\infty} C(t) = C_0 \cdot \underbrace{e^{-\frac{3}{100}t}}_{\to 0} = 0$$

Die Zerfallsfunktion gilt zum Beispiel, wenn der Tank mit klarem Wasser gespült wird ($C_1 = 0$), da dann der erste Term der Funktion entfällt ($C_1(t) = 0 \cdot (1 - e^{-\frac{3}{100}t}) = 0$). Man könnte in diesem Fall zum Beispiel berechnen, wie lange es dauert, bis der Tank zu einem bestimmten Grad gereinigt ist.

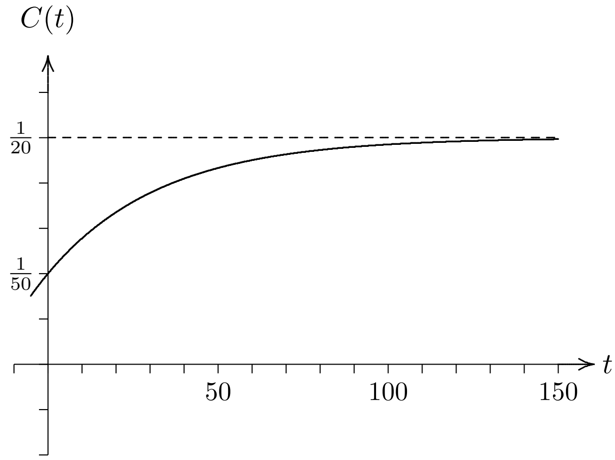
2.6 Lösungsfunktion

Die Lösungsfunktion ist also eine begrenzte Wachstumsfunktion, die sich wiederum in eine exponentielle Zerfallsfunktion (allgemeine Form: $f(x) = ae^{-kx}$) und eine begrenzte Wachstumsfunktion ($f(x) = G - ae^{-kx}$) zerlegen lässt. Sie lautet hier

$$C(t) = \frac{1}{20} \cdot (1 - e^{-\frac{3}{100}t}) + C_0 \cdot e^{-\frac{3}{100}t}$$

und für $C_0 = \frac{1}{50}$

$$C(t) = \frac{1}{20} - \frac{3}{100} \cdot e^{-\frac{3}{100}t}$$



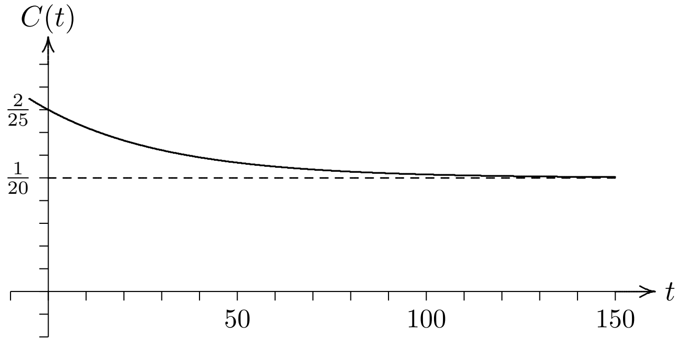
Der Schnittpunkt mit der y-Achse, also der Salzgehalt zum Zeitpunkt $t = 0$, hat sich im Vergleich zum Graphen aus Kapitel 2.4 auf C_0 (hier $\frac{1}{50}$) verschoben:

$$C(0) = \frac{1}{20} - \frac{3}{100} \cdot e^0 = \frac{1}{50}$$

Die Funktion strebt gegen den Grenzwert:

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = \frac{1}{20} - \frac{3}{100} \cdot \underbrace{e^{-\frac{3}{100}t}}_{\to 0} = \frac{1}{20}$$

Wenn die ursprüngliche Salzkonzentration C_0 größer ist als der Grenzwert, also beispielsweise $\frac{2}{25}$ $\frac{kg}{l}$ beträgt, sieht die Lösungsfunktion so aus:



Wenn man in der vorhergehenden Rechnung die Zahlen aus dem Beispiel durch Buchstaben ersetzt, erhält man eine allgemeine Lösungsfunktion für Mischungsvorgänge mit konstanten gleichen Wasserfließgeschwindigkeiten:

$$Q(t) = e^{-\frac{v}{I}t} \cdot (Q_0 - I \cdot C_1) + I \cdot C_1$$

$$C(t) = e^{-\frac{v}{I}t} \cdot (C_0 - C_1) + C_1$$

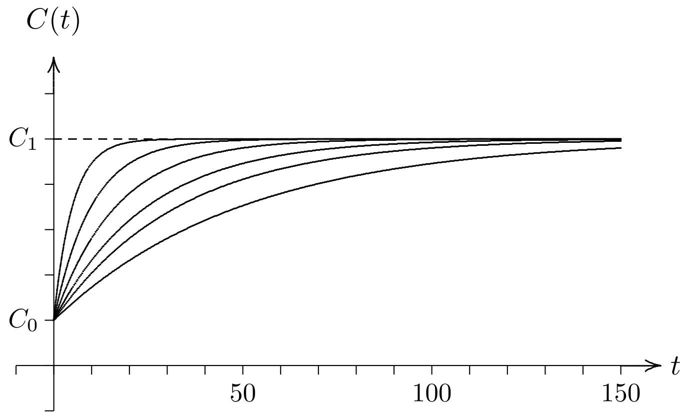
Die Konzentration startet immer bei der Anfangskonzentration

$$C(0) = 1 \cdot (C_0 - C_1) + C_1 = C_0$$

und strebt gegen die Grenzkonzentration, die der Konzentration des einströmenden Wassers entspricht:

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = \underbrace{e^{-\frac{v}{I}t}}_{\to 0} \cdot (C_0 - C_1) + C_1 \;= C_1$$

Der Faktor $\frac{v}{I}$ beeinflusst nur die Geschwindigkeit, mit der das geschieht. Je größer (bei konstantem Inhalt I) die Geschwindigkeit v, desto schneller nähert sich die Mischungskonzentration $C(t)$ der Grenzkonzentration C_1 an.



Nun kann der Salzgehalt und die Konzentration zu jedem Zeitpunkt bestimmt werden, oder andersherum der Zeitpunkt, an dem eine bestimme Konzentration vorliegt. Wenn man die Anfangskonzentration nicht kennt, kann man sie berechnen, sofern mindestens ein Messpunkt gegeben ist:

$$C(t) = C_1 \cdot (1 - e^{-\frac{v}{I}t}) + C_0 \cdot e^{-\frac{v}{I}t}$$

$$C_0 = \frac{C_t - C_1 \cdot (1 - e^{-\frac{v}{I}t})}{e^{-\frac{v}{I}t}} = e^{\frac{v}{I}t} \cdot (C_t + C_1 \cdot e^{-\frac{v}{I}t} - C_1)$$

2.7 Variation der Geschwindigkeit

Die Fließgeschwindigkeit des Wassers muss natürlich nicht konstant sein, sondern kann sich mit der Zeit ändern. Die DGL lautet dann:

$$Q'(t) = v(t) \cdot (C_1 - \frac{Q(t)}{I})$$

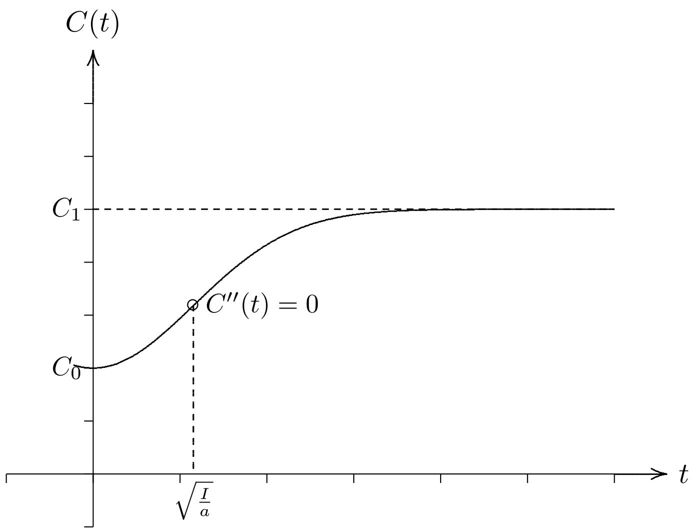
Die allgemeine Lösungsfunktion für eine gleichmäßig steigende Fließgeschwindigkeit $a \cdot t$ lautet beispielsweise:

$$Q(t) = e^{-\frac{a \cdot t^2}{2 \cdot I}} \cdot (Q_0 - I \cdot C_1) + I \cdot C_1$$

Da $C(t) = \frac{Q(t)}{I}$ und $C_0 = \frac{Q_0}{I}$, gilt auch

$$C(t) = e^{-\frac{a \cdot t^2}{2 \cdot I}} \cdot (C_0 - C_1) + C_1$$

Die Funktion ähnelt einer logistischen Wachstumsfunktion. Anfangs steigt die Konzentration nur langsam an, da die Fließgeschwindigkeit ebenfalls gering ist. Die Konzentrationsänderung $C'(t)$ nimmt dann aber zu, bis sie am Wendepunkt ($C''(t) = 0$) maximal ist; er liegt immer an der Stelle $t = \sqrt{\frac{I}{a}}$. Danach nimmt die Konzentrationsänderung ab, und zwar umso langsamer, je näher $C(t)$ der Grenzkonzentration C_1 kommt. Die Funktion ist monoton steigend ($C'(t) \geq 0$).



Die Konzentration strebt gegen die Grenzkonzentration:

$$\lim_{t \to \infty} C(t) = \underbrace{e^{-\frac{a \cdot t^2}{2 \cdot I}}}_{\to 0} \cdot (C_0 - C_1) + C_1 \; = C_1$$

2.8 Einfluss der Fließgeschwindigkeit

Wenn man Mischungsvorgänge mit verschiedenen Fließgeschwindigkeiten miteinander vergleicht, fällt Folgendes auf:

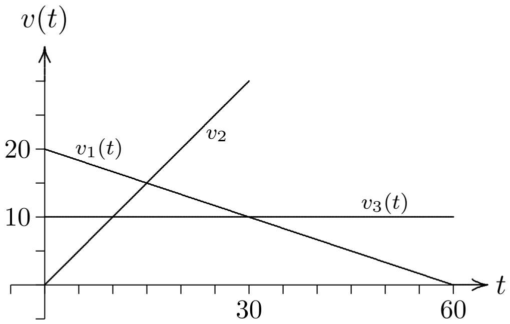
Ich wähle:

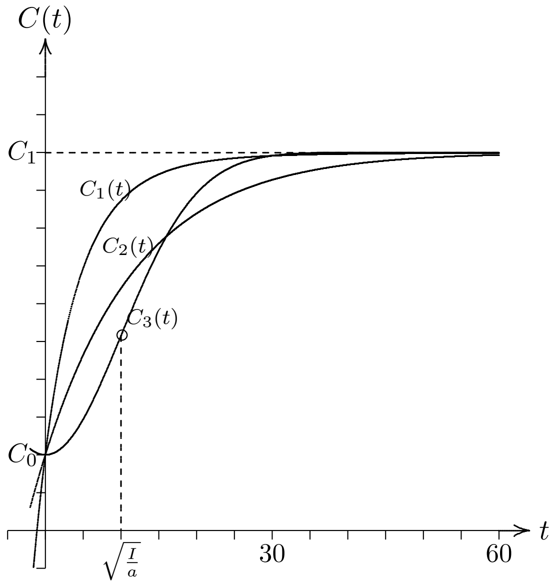
$C_1(t)$: $v_1(t) = -\frac{t}{3} + 20$

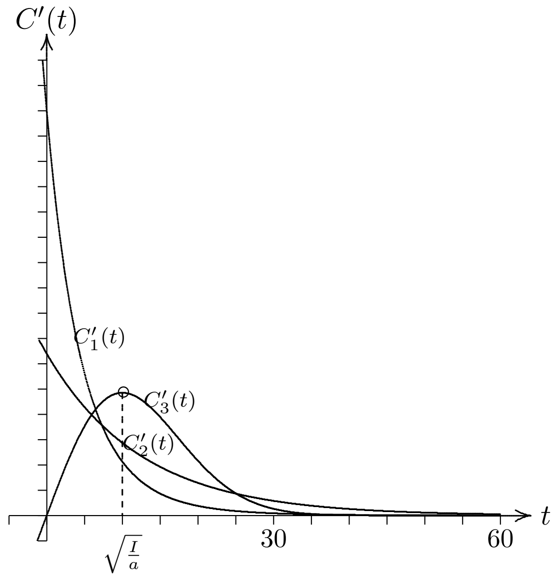
$C_2(t)$: $v_2 \quad = 10$

$C_3(t)$: $v_3(t) = t$

$v_1(60) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq t \leq 60$







Man sieht, dass $C_1(t)$ aufgrund der höheren Geschwindigkeit am Anfang am schnellsten ansteigt, dann aber mit abnehmender Geschwindigkeit hinter $C_2(t)$ und $C_3(t)$ zurückfällt.

$C_2(t)$ hat eine konstante Fließgeschwindigkeit und strebt auf bekannte Weise gegen C_1.

$C_3(t)$ steigt zu Beginn am langsamsten, überholt dann aber mit steigender Geschwindigkeit $C_1(t)$ und $C_2(t)$ bis sie am Wendepunkt bei $t = \sqrt{\frac{I}{a}}$ (hier: $\sqrt{\frac{100}{1}} = 10$) die maximale Konzentrationsänderung (Steigung) erreicht. Danach nimmt $C'(t)$ wieder ab und strebt gegen Null.

Allgemein kann man sagen, dass die Konzentrationsänderung $C'(t)$ zum Zeitpunkt t umso größer ist, je höher die Geschwindigkeit $v(t)$ zu diesem Zeitpunkt ist. Wenn $v(t)$ niedriger ist, ist auch $C'(t)$ kleiner. Die Steigung $C'(t)$ strebt in jedem Fall mit der Zeit gegen Null, da sich $C(t)$ der Grenzkonzentration C_1 annähert.

3 Ungleiche Zu- und Abflussgeschwindigkeiten

3.1 Konstante Geschwindigkeiten

Bei der bisherigen Betrachtung von Mischungsvorgängen stimmte die Zu- und Abflussgeschwindigkeit des Wassers überein. Daher blieb auch die Wassermenge im Tank konstant. Die allgemeine DGL für Mischungsvorgänge lautete:

$$Q'(t) = v \cdot (C_1 - \tfrac{Q(t)}{I}) = C_1 \cdot v - \tfrac{Q(t)}{I} \cdot v$$

Wenn nun aber die Zu- und Abflussgeschwindigkeit des Wassers nicht gleich ist (für die Geschwindigkeit des einfließenden Wassers schreibe ich v_1 und für die des ausfließenden v_2), ändert sich die Wassermenge I im Tank ständig. I ist also von t abhängig.

$$Q'(t) = C_1 \cdot v_1 - \tfrac{Q(t)}{I(t)} \cdot v_2$$

Um $I(t)$, also die Wassermenge zum Zeitpunkt t, zu ermitteln, betrachte ich zunächst die Änderungsrate $I'(t)$. Sie ergibt sich aus der Geschwindigkeitsdifferenz von Zu- und abfließendem Wasser:

$$I'(t) = v_1 - v_2$$

Um die Wassermenge im Tank zu bestimmen, benötigt man die Stammfunktion. Wenn die Zu- und Abflussgeschwindigkeit konstant ist, erhält man durch Integrieren

$$I(t) = I_0 + (v_1 - v_2) \cdot t$$

wobei I_0 die Anfangswassermenge darstellt. In die DGL eingesetzt, ergibt das:

$$Q'(t) = C_1 \cdot v_1 - \tfrac{v_2}{I_0 + (v_1 - v_2) \cdot t} \cdot Q(t)$$

Da der Tank wahrscheinlich keine unendlich große Kapazität besitzt, muss man, wenn $v_1 < v_2$, den Zeitraum bis zum Überlaufen beschränken. Wenn dagegen $v_1 > v_2$, wird der Zeitraum nur bis zu dem Punkt betrachtet, an dem der Tank leer ist.

3.1.1 Lösungsfunktion

Ich werde den Mischungsvorgang mit unterschiedlichen Zu- und Abflussgeschwindigkeiten an einem Beispiel erläutern:

Die Kapazität des Tanks sei 500 (l) und die Anfangswassermenge $I_0 = 200$ (l) mit einem Salzgehalt von $Q_0 = 100$ (g). Wasser mit einer Salzkonzentration von $C_1 = 1$ $(\frac{g}{l})$ strömt mit der Geschwindigkeit $v_1 = 3$ $(\frac{l}{min})$ in den Tank und eine gut durchmischte Lösung verlässt ihn wieder mit der Geschwindigkeit von $v_2 = 2$ $(\frac{l}{min})$.
Die Funktion für die Wassermenge im Tank lautet:

$$I'(t) = v_1 - v_2 = 3 - 2 = 1 \qquad | \textstyle\int dt$$

$$I(t) = I_0 + (v_1 - v_2) \cdot t = 200 + t$$

Der Tank läuft nach 5 Stunden (= 300 min) über:

$$500 = 200 + t \qquad \Longrightarrow \qquad t = 300$$

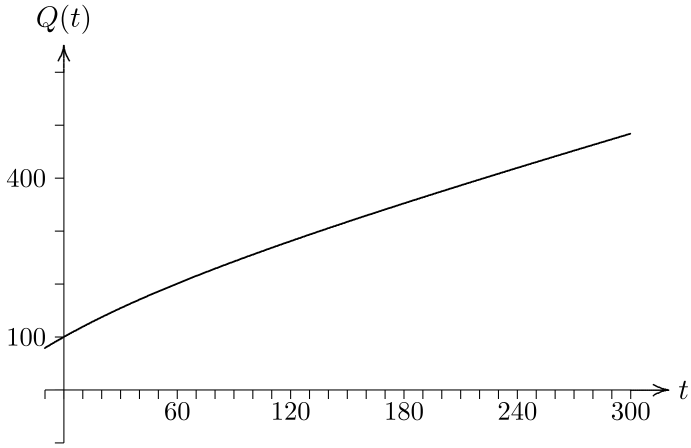
Daher betrachte ich nur den Zeitraum $0 \leq t \leq 300$.

Wenn man alle Parameter in die Differentialgleichung einsetzt, erhält man:

$$Q'(t) = 3 - \tfrac{2}{200+t} \cdot Q(t) \qquad\qquad Q(0) = Q_0 = 100$$

Maple liefert die Lösungsfunktion:

$$Q(t) = \tfrac{(200+t)^3 - 4000000}{(200+t)^2}$$



Wenn der Tank eine unendlich große Kapazität hätte, würde die Wassermenge im Tank unbegrenzt ansteigen:

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 200 + t \ = \infty$$

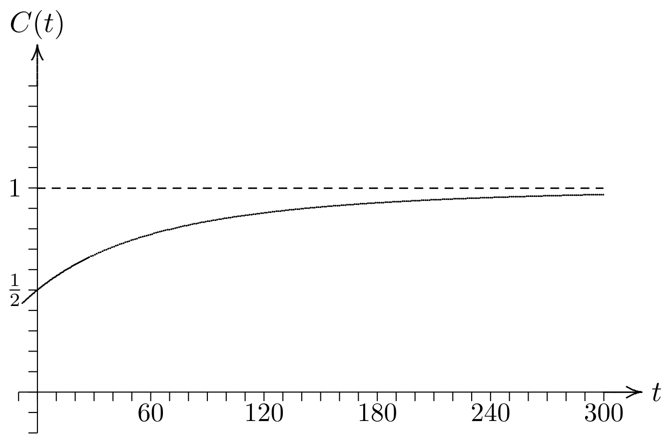
Es ist deshalb logisch, dass auch die Salzmenge ins Unendliche wachsen würde:

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \tfrac{(200+t)^3 - 4000000}{(200+t)^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{(200+t)^3}{(200+t)^2} - \frac{4000000}{(200+t)^2}}{\frac{(200+t)^2}{(200+t)^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\overbrace{200+t}^{\to\infty} - \overbrace{\frac{4000000}{(200+t)^2}}^{\to 0}}{1} = \infty$$

Es ist sinnvoll, anstelle der Salzmenge $Q(t)$ die Konzentration $C(t)$ zu betrachten. Um die Konzentration in Abhängigkeit von der Zeit zu erhalten, muss man die Salzmenge im Tank durch den Tankinhalt teilen.

$$C(t) = \tfrac{Q(t)}{I(t)} = \frac{\frac{(200+t)^3 - 4000000}{(200+t)^2}}{200+t} = \tfrac{(200+t)^3 - 4000000}{(200+t)^3}$$

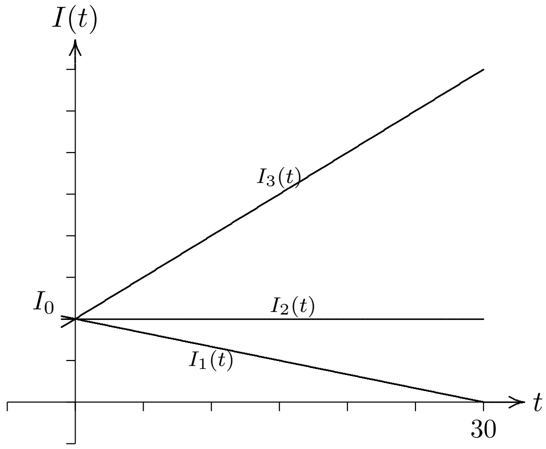
Die Funktion erinnert an eine begrenzte Wachstumsfunktion. Die Konzentration beträgt anfangs $\frac{Q_0}{I_0} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$ $(\frac{g}{l})$. Wenn der Tank eine unendlich große Kapazität hätte, würde sie sich einer Grenzkonzentration von 1 $(\frac{g}{l})$ annähern, die der Konzentration des einfließenden Wassers, das die Lösung im Tank mit der Zeit immer mehr ersetzt, entspricht:

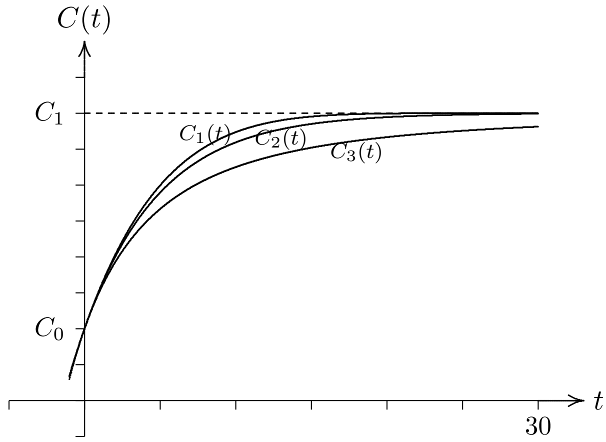


$$\lim_{t\to\infty} C(t) = \tfrac{(200+t)^3 - 4000000}{(200+t)^3} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{(200+t)^3}{(200+t)^3} - \frac{4000000}{(200+t)^3}}{\frac{(200+t)^3}{(200+t)^3}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1 - \overbrace{\frac{4000000}{(200+t)^3}}^{\to 0}}{1} = 1$$

3.2 Einfluss des Tankinhalts

Im Gegensatz zu Mischungsvorgängen mit gleichen Fließgeschwindigkeiten ändert sich der Tankinhalt bei ungleichen Geschwindigkeiten ständig. Das hat auch Einfluss auf die Konzentration im Tank. Ich vergleiche drei Mischungsvorgänge mit konstanten Fließgeschwindigkeiten. Die Zuflussgeschwindigkeit ist bei allen gleich; die Abflussgeschwindigkeit bei $C_1(t)$ größer, bei $C_2(t)$ gleich und bei $C_3(t)$ kleiner als die Zuflussgeschwindigkeit.





Bei C_1 ist die Abflussgeschwindigkeit größer als die Zuflussgeschwindigkeit, daher sinkt der Tankinhalt. Das hat zur Folge, dass die Konzentration am schnellsten gegen die Grenzkonzentration strebt. Anschaulich lässt sich das dadurch erklären, dass die einfließende Lösung größeren Einfluss auf die Lösung im Tank hat, je geringer der Tankinhalt ist.

$C_2(t)$ hat gleich große Geschwindigkeiten, der Tankinhalt ändert sich daher nicht und die Konzentration strebt in bekannter Weise gegen die Grenzkonzentration.

Bei $C_3(t)$ ist die Zuflussgeschwindigkeit größer als die Abflussgeschwindigkeit, daher steigt der Tankinhalt an. Da die einfließende Lösung bei größerem Tankinhalt weniger Einfluss auf die Lösung hat, strebt $C_3(t)$ am langsamsten gegen die Grenzkonzentration.

Allgemein lässt sich sagen:
Je größer der Tankinhalt zum Zeitpunkt t, desto niedriger ist die Konzentrationsänderung $C'(t)$. Wenn der Inhalt geringer ist, steigt die Konzentration schneller.
In jedem Fall strebt $C'(t)$ mit der Zeit gegen Null, während sich $C(t)$ der Grenzkonzentration C_0 annähert.

3.3 Variation der Fließgeschwindigkeiten

Bisher habe ich hauptsächlich Mischungsvorgänge mit konstanten Fließgeschwindigkeiten betrachtet. In der Realität treten diese aber selten auf. Bei Seen zum Beispiel ist es wahrscheinlicher, dass die Fließgeschwindigkeiten durch Regenfälle oder Trockenzeiten beeinflusst werden. Es wäre auch denkbar, dass die Fließgeschwindigkeiten künstlich, etwa durch Schleusen, gesteuert werden.

Ich werde im Folgenden die Zuflussgeschwindigkeit variieren und davon ausgehen, dass die Abflussgeschwindigkeit konstant bleibt.

3.3.1 Begrenzte Zuflussgeschwindigkeit

Bei der Schneeschmelze im Frühjahr ist es denkbar, dass sich die Fließgeschwindigkeit eines Gebirgsbaches entsprechend der Funktion $v_1 = 3 - 3 \cdot e^{-\frac{t}{100}}$ verhält. Er enthält eine Schadstoffkonzentration von $C_1 = 1$. Der Bach mündet in einen kleinen See mit einer Kapazität von 215 und der Anfangswassermenge $I_0 = 200$, aus dem das Wasser mit der konstanten Geschwindigkeit $v_2 = 2$ wieder abfließt. Die Schadstoffmenge zu Beginn beträgt $Q_0 = 100$.

Die allgemeine Differentialgleichung lautet:

$$Q'(t) = C_1 \cdot v_1(t) - \frac{Q(t)}{I(t)} \cdot v_2(t)$$

Wobei gilt:

$$I'(t) = v_1(t) - v_2(t)$$

Für diesen Fall bedeutet das:

$$Q'(t) = 1 \cdot (3 - 3e^{-\frac{t}{100}}) - \frac{2 \cdot Q(t)}{I(t)} \qquad Q(0) = 100$$

$$I'(t) = v_1(t) - v_2 = 3 - 3e^{-\frac{t}{100}} - 2$$

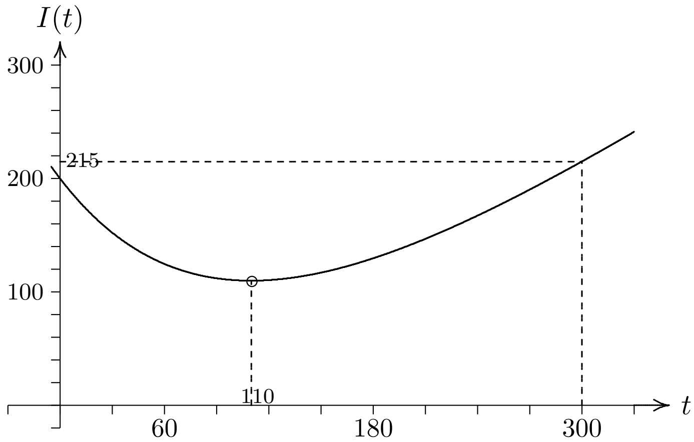
Durch Integrieren kann man zunächst die Wassermenge im See bestimmen, die dem Tankinhalt $I(t)$ im Modell entspricht.

$$I(t) = t + 300e^{-\frac{t}{100}} + C$$

$$I(0) = 200 \quad \Longrightarrow \quad C = -100$$

$$I(t) = t + 300e^{-\frac{t}{100}} - 100$$

Die Wassermenge nimmt zunächst ab, da mehr Wasser zu- als abfließt. Bei $t \approx 110$ hat die Funktion ein Minimum, da hier die Zuflussgeschwindigkeit genauso groß wie die Abflussgeschwindigkeit ist ($3 - 3e^{-\frac{110}{100}} \approx 2$). Danach steigt der Inhalt an, da mehr Wasser ab- als zufließt. Der See läuft nach $I(t) = 215 \Longrightarrow t \approx 300$ über. Daher betrachte ich nur den Zeitraum $0 \leq t \leq 300$.



$I(t)$ in die DGL eingesetzt ergibt:

$$Q'(t) = 3 - 3e^{-\frac{t}{100}} - \frac{2 \cdot Q(t)}{t + 300e^{-\frac{t}{100}} - 100}$$

mit der Anfangsbedingung:

$$Q(0) = 100$$

3.3.2 Iteratives Lösungsverfahren

Da diese DGL zu kompliziert ist, um sie exakt zu lösen, werde ich die Lösung mit einer Näherungskurve beschreiben. Dazu benutze ich das Eulersche Polygonzugverfahren.

Um eine Näherungskurve für die Lösung der DGL zu erhalten, geht man vom Anfangswert y_0 geradlinig in die Richtung, deren Steigung durch die DGL gegeben ist. Nun wird das Verfahren wiederholt, um von y_1 zu y_2 zu gelangen usw. Die gewählte Schrittweite Δt ist dabei für die Genauigkeit der Näherung entscheidend: je kleiner man Δt wählt, desto besser wird die Näherung.

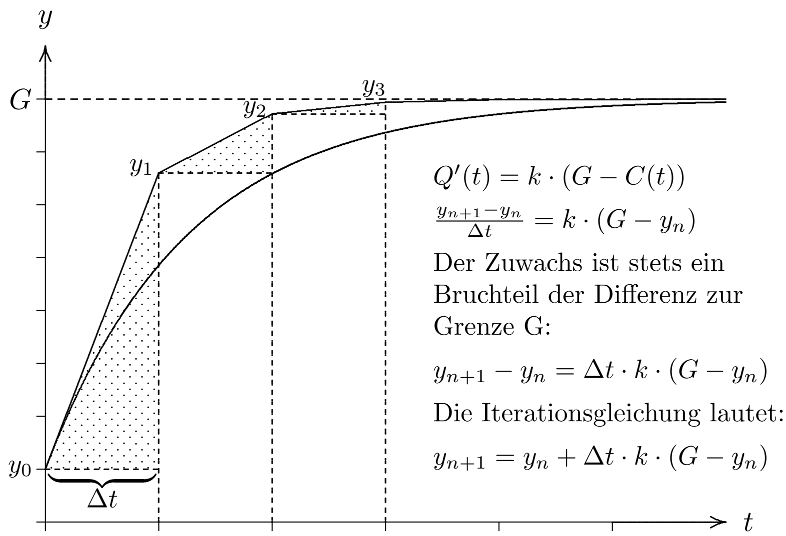


Abb.[1]

Die DGL gibt die Steigung $Q'(t)$ am Punkt t an. Da für die Steigung

$$Q'(t) = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t}$$

gilt, kann man diesen Term als Näherung für $Q'(t)$ in die DGL einsetzen

$$\tfrac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = 3 - 3e^{-\frac{t_n}{100}} - \frac{2 \cdot y_n}{t_n + 300e^{-\frac{t_n}{100}} - 100} \qquad \text{mit } t_n = n \cdot \Delta t$$

und nach y_{n+1} auflösen:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot (3 - 3e^{-\frac{t_n}{100}t_n} - \frac{2 \cdot y_n}{t_n + 300e^{-\frac{t_n}{100}} - 100})$$

Für $\Delta t = 0,1$ lautet die Iterationsgleichung:

$$y_{n+1} = y_n + 0,3 - 0,3e^{-\frac{t_n}{100}t_n} - \frac{0{,}2 \cdot y_n}{t_n + 300e^{-\frac{t_n}{100}} - 100} \qquad \text{mit: } \; y_0 = 100$$

Jetzt können die Werte schrittweise berechnet werden. Man gelangt dabei immer von einem Wert zum nächsten: man kann y_{n+1} erst bestimmen, wenn man y_n kennt.

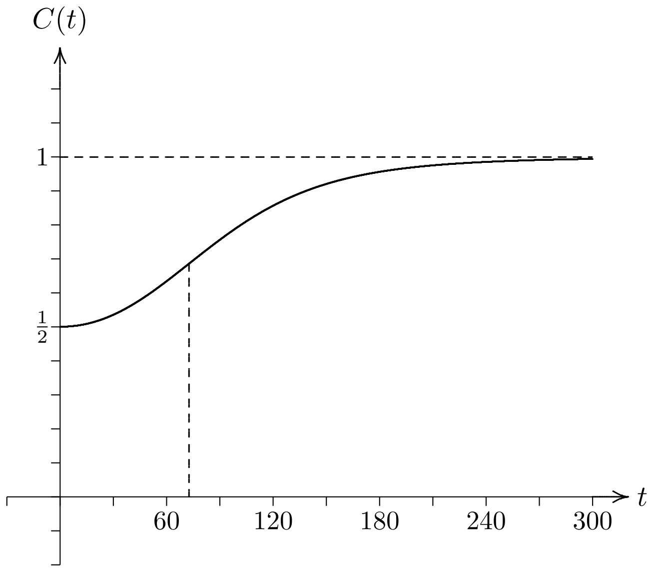
[1] vergl: http://www.lo-net.de/home/Roolfs/AnalysisTeil2pdf/BeschraenktesWachstum.pdf

n	t_n	y_n	y_{n+1}	$I(t_n)$	$C(t_n)$
0	0	100	99,90	200,00	0,5000000
1	0,1	99,90	99,80	199,80	0,5000000
2	0,2	99,80	99,70	199,60	0,5000000
3	0,3	99,70	99,60	199,40	0,5000011
4	0,4	99,60	99,50	199,20	0,5000030
5	0,5	99,50	99,40	199,00	0,5000056
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
300	30	81,51	81,48	152,25	0,5353776
600	60	79,04	79,05	124,64	0,6341661
1100	110	90,83	90,86	109,86	0,8267491
1500	150	107,60	107,65	116,94	0,9201412
1800	180	123,86	123,92	129,59	0,9557729
2400	240	164,68	164,76	167,22	0,9848583
3000	300	213,59	213,67	214,94	0,9937293

Da es sehr mühsam ist, die Werte einzeln auszurechnen, könnte man eine Summenformel aufstellen, die es ermöglicht, den Wert y_n für jedes beliebige n zu bestimmen ohne den vorhergehenden Wert zu kennen. Dazu müsste man eine Gesetzmäßigkeit in den sich wiederholenden Schritten erkennen. Da mir das bei dieser komplizierten Formel aber leider nicht möglich ist, muss ich mich darauf beschränken, die Werte mit Excel zu erzeugen.

y_n entspricht hier dem Salzgehalt $Q(t)$. Da dieser analog zur Wassermenge im Tank sinkt und steigt, ist es sinnvoll die Konzentration zu betrachten: $C(t) = \frac{Q(t)}{I(t)} = \frac{y_n}{I(t_n)}$

Die Funktion erinnert an eine logistische Wachstumsfunktion. Da die Zuflussgeschwindigkeit zu Beginn gering ist, steigt die Konzentration auch nur langsam an. Die Konzentrationsänderung $C'(t)$ nimmt zu, bis sie nach dem Wendepunkt (bei $t \approx 70$) wieder abnimmt. Die Funktion scheint monoton steigend zu sein. Man kann ablesen, das sich die Konzentration vom Anfangswert $C_0 = \frac{1}{2}$ dem Grenzwert $C_1 = 1$ annähert.



3.3.3 Schwankende Zuflussgeschwindigkeit

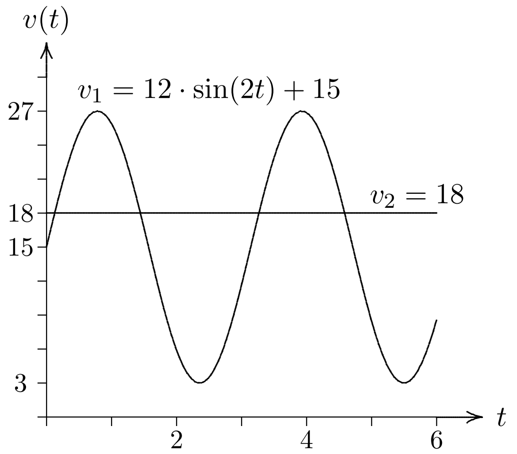
Mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren lassen sich nun beliebig komplizierte Mischungsvorgänge beschreiben. Wenn man beispielsweise annimmt, dass die Zuflussgeschwindigkeit eines Baches in einen See aufgrund von Regen- und Trockenzeiten periodisch schwingt, erwartet man folgenden Mischungsvorgang:

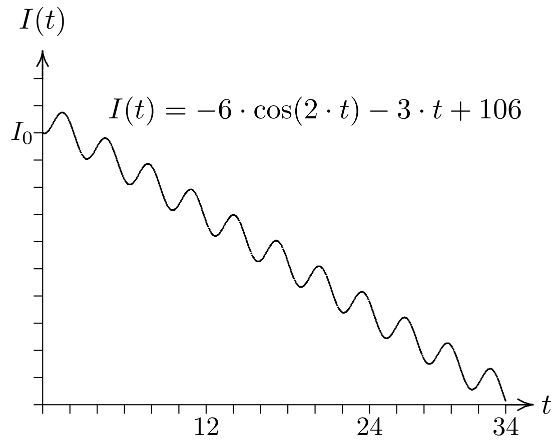
Die Zuflussgeschwindigkeit v_1 schwingt von 3 bis 27, während die Abflussgeschwindigkeit v_2 konstant 18 beträgt. Daher sinkt der Tankinhalt ($I_0 = 100$) entsprechend der Funktion

$$I'(t) = 12 \cdot \sin(2t) + 15 - 18$$

$$I(t) = -6 \cdot \cos(2 \cdot t) - 3 \cdot t + 106 \qquad I(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad t \approx 34$$

bis er bei $t \approx 34$ leer ist. Ich begrenze daher den Zeitraum auf $0 \leq t \leq 34$.





Bei $Q_0 = 200$ und $C_1 = 10$ gilt für die Konzentrationsänderung:

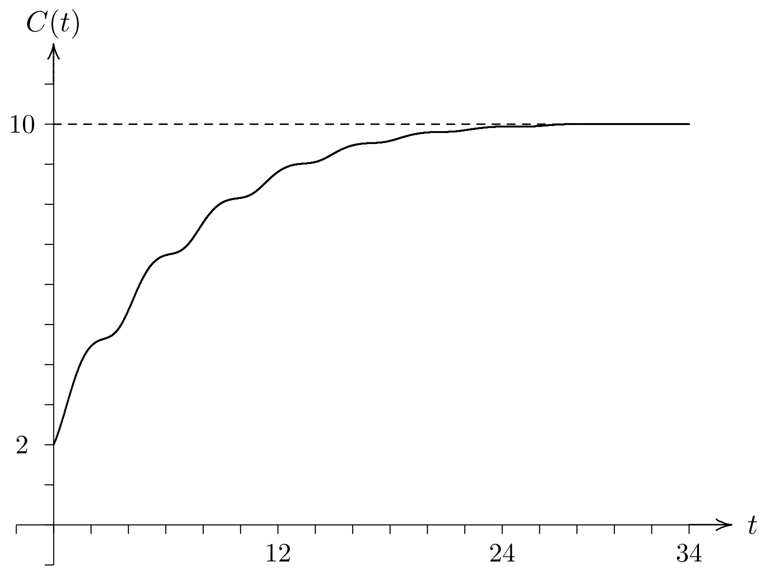
$$Q'(t) = 10 \cdot (12 \cdot \sin(2t) + 15) - \tfrac{18 \cdot Q(t)}{-6 \cdot \cos(2 \cdot t) - 3 \cdot t + 106} \qquad Q(0) = 200$$

Nun kann man die Iterationsgleichung aufstellen

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot 10 \cdot (12 \cdot \sin(2t_n) + 15) - \tfrac{\Delta t \cdot 18 \cdot y_n}{-6 \cdot \cos(2 \cdot t_n) - 3 \cdot t_n + 106} \qquad y_0 = 200$$

und die Werte mit Excel ausrechnen. Um $C(t)$ zu erhalten muss man y_n durch $I(t_n)$ teilen.

Man sieht, dass die Konzentration $C(t)$ von der Anfangskonzentration $C_0 = 2$ auf die Grenzkonzentration $C_1 = 10$ des einlaufenden Wassers zustrebt. Die Geschwindigkeit (Steigung), mit der dies geschieht, schwankt dabei analog zur Zuflussgeschwindigkeit $v_1(t)$. Auch diese Funktion ist offensichtlich monoton steigend ($C'(t) \geq 0$).



4 Schluss

4.1 Fazit

Ich habe in meiner Facharbeit Gleichungen aufgestellt, mit denen sich Mischungsvorgänge beschreiben lassen. Mit der allgemeinen Differentialgleichung

$$Q'(t) = C_1 \cdot v_1(t) - \tfrac{Q(t)}{I(t)} \cdot v_2(t) \qquad\qquad Q(0) = Q_0$$

habe ich eine Möglichkeit gefunden, jeden beliebigen Mischungsvorgang mathematisch zu beschreiben.

Alle Mischungsvorgänge ähneln sich insofern, dass die Mischungskonzentration $C(t)$ immer vom Anfangswert C_0 auf die Konzentration des einfließenden Wassers C_1 zustrebt. Wenn $C_0 < C_1$, steigt die Lösungsfunktion dabei monoton ($C'(t) \geq 0$), während sie bei $C_0 > C_1$ monoton fällt ($C'(t) \leq 0$).

Wenn man Mischungsvorgänge miteinander vergleicht, lässt sich allgemein sagen, dass die Zuflussgeschwindigkeit $v_1(t)$ den Verlauf der Funktion (Anzahl und Position der Wendepunkte, Steigung usw.) bestimmt. Die Abflussgeschwindigkeit $v_2(t)$ ist dagegen für den Inhalt $I(t)$ entscheidend, der wiederum Einfluss auf die Geschwindigkeit (Steigung) hat, mit der $C(t)$ gegen C_1 strebt.

Ich denke, dass sich auch komplizierte Mischungsvorgänge mit den Methoden, die ich erarbeitet habe, gut beschreiben lassen. Bedingungen, die in der Realität vorkommen, sind in den DGLn berücksichtigt worden. Die Gleichungen haben in verschiedenen Anwendungsbereichen eine Bedeutung, da sie sich nicht nur auf beliebige in Wasser gelöste oder in der Luft vorhandene Stoffe anwenden lassen, sondern beispielsweise auch auf die Temperatur eines Mediums.

Ob meine doch sehr theoretischen Überlegungen mit der Wirklichkeit übereinstimmen, ist allerdings eine andere Frage, die experimentell untersucht werden müsste. Wahrscheinlich würde man z.B. bei Seen erhebliche Abweichungen feststellen, da es unzählige Faktoren gibt, die in meinem stark vereinfachten Modell keine Berücksichtigung finden.

Die größte Schwachstelle des Modells ist vermutlich, dass ich davon ausgehe, dass sich die Lösungen während des Mischungsvorgangs gleichmäßig mischen (siehe Kapitel 1.2). In der Realität werden sich beispielsweise Schadstoffe eher an bestimmten Stellen ablagern. Weitere Faktoren, die eine wichtige Rolle spielen können, sind Niederschläge und Verdunstung, die Schichtenbildung in tiefen Seen aufgrund von Temperaturdifferenzen, ungleichmäßige Strömungen oder geschützte Buchten. Alle Ergebnisse sind daher im Sinne der Nichtbeachtung dieser Faktoren zu interpretieren.

4.2 Schlusswort

Das Thema der Facharbeit umfasst eine Vielzahl von möglichen Mischungsvorgängen, die man untersuchen könnte. Auch wäre es möglich, durch intensivere Untersuchung von einzelnen Mischungsproblemen genauere Differentialgleichungen aufzustellen, in denen weitere Faktoren berücksichtigt werden.

Ich habe während meiner Facharbeitszeit einen Einblick in die Thematik gewonnen und einige interessante Mischungsprobleme untersucht.

Dass ich komplizierte DGLn nicht mehr exakt lösen konnte, sondern mich darauf beschränken musste, die Lösungsfunktionen iterativ zu beschreiben, war schade, da es weitere Berechnungen der Funktionen nicht zuließ. Aber da die Lösungsfunktionen, die Maple errechnet hat, über mehrere Spalten gingen, ist es verständlich, dass ich mit meinen anfänglichen Lösungsversuchen per Hand keinen Erfolg hatte.

Zu meiner Arbeit während der sechs Wochen ist zu sagen, dass ich, obwohl ich frühzeitig begonnen und relativ konstant gearbeitet habe, bis zum Abgabetermin viel zu tun hatte.

Zunächst habe ich sehr viel mit Maple experimentiert, um verschiedene Mischungsvorgänge miteinander zu vergleichen und Auswirkungen von Veränderungen der Fließgeschwindigkeiten festzustellen. Mehrere Mischungsprobleme, die ich mit Maple gelöst habe, haben leider keinen Eingang in die Facharbeit gefunden, da das den Rahmen der Facharbeit gesprengt hätte.

...

5 Anhang

5.1 Rechnungen

Rechnung aus Kapitel 2.4:

$$Q'(t) = \frac{3}{20} - \frac{3}{100}Q(t)$$

Der Einfachheit halber nenne ich $\frac{3}{20} = a$ und $\frac{3}{100} = b$:

$$Q'(t) = a - bQ(t)$$

Zunächst teile ich die Gleichung durch $a - bQ(t)$:

$$\frac{Q'(t)}{a - b \cdot Q(t)} = 1$$

Die Gleichung kann nun integriert werden:

$$-\frac{1}{b} \cdot \ln(a - b \cdot Q(t)) = t + c$$

Ich dividiere durch $-\frac{1}{b}$ und erhalte:

$$\ln(a - b \cdot Q(t)) = -bt - bc$$

Jetzt kann ich entlogarithmieren:

$$a - b \cdot Q(t) = e^{-bt-bc}$$

Ich stelle nach $Q(t)$ um und vereinfache:

$$Q(t) = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}e^{-bc} \cdot e^{-bt}$$

Da der Term $-\frac{1}{b}e^{-bc}$ eine nur von c abhängige Konstante ist,
benenne ich ihn zur besserem Übersicht in d um:

$$Q(t) = \frac{a}{b} + d \cdot e^{-bt}$$

Aufgrund der Anfangsbedingung gilt $Q(0) = Q_0$:

$$Q(0) = \frac{a}{b} + d \cdot 1 = Q_0$$

$$d = Q_0 - \frac{a}{b}$$

Wenn man das in die Gleichung einsetzt, erhält man die Funktion:

$$Q(t) = \frac{a}{b} + (Q_0 - \frac{a}{b}) \cdot e^{-bt} = \frac{a}{b} - \frac{a}{b}e^{-bt} + Q_0e^{-bt}$$

Jetzt setze ich für a wieder $\frac{3}{20}$ und für b $\frac{3}{100}$ ein:

$$Q(t) = 5 - 5e^{-\frac{3}{100}t} + Q_0e^{-\frac{3}{100}t}$$

5.2 Quellenangabe

...