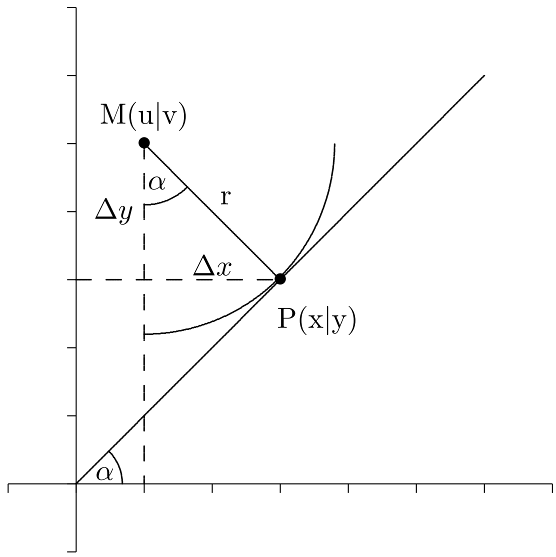
Krümmung von Kurven

J.H. L. und Ph. K.



Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Wir beschäftigen uns mit dem Thema Krümmung von Funktionen. Unsere Facharbeit ist in drei Teile aufgeteilt.
Das Ziel des ersten Teiles ist es, die Krümmung von Funktionen möglichst anschaulich darzustellen. Dazu erarbeiten wir zuerst ein recht abstraktes Maß. Es basiert auf den unterschiedlichen Winkeln, die die Tangenten einer Kurve mit der x-Achse bilden.
Diese Methode wenden wir auf einen Kreis an, so dass wir am Ende zu jedem beliebigen Punkt einer gekrümmten Funktion einen Kreis errechnen können, der die Kurve in diesem Punkt schneidet bzw. berührt und der dieselbe Krümmung hat wie die Kurve in dem gewählten Punkt. Dieser Kreis ist dann ein anschauliches Maß für die Krümmung.

Im zweiten Teil der Facharbeit beschäftigen wir uns mit der Bedeutung von Krümmung für den Straßenbau. Wir zeigen verschiedene Möglichkeiten, zwei parallel versetzt aufeinander zulaufende Straßen so zu verbinden, dass ein Auto dort möglichst gut hindurch fahren kann. Die verschiedenen Möglichkeiten werden anhand eines Beispieles vorgeführt und ihre Vor- und Nachteile angesprochen.

Im dritten Teil haben wir die mögliche Höchstgeschwindigkeit von Autos in Abhängigkeit von der Krümmung der zu durchfahrenden Kurve untersucht. Die so gefundene Funktion wird mit zur Beurteilung der verschiedenen Methoden, zwei Straßen zu verbinden, herangezogen.

2 Darstellung von Krümmung

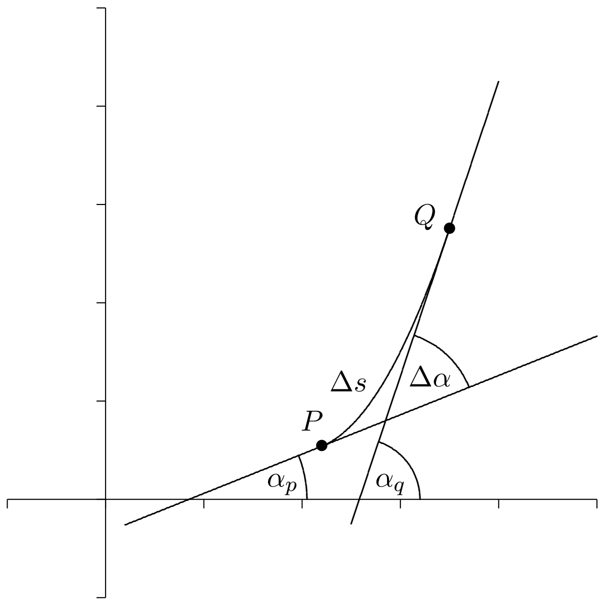
2.1 Krümmung in einem Kurvenpunkt

Die Krümmung lässt sich messen als Verhältnis $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$. P ist fest. Q strebt gegen P, also strebt Δs gegen 0.

Somit ist die Krümmung $k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$.

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s}$$

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{dx} : \frac{dx}{ds}$$



$$\frac{y}{x} = y'$$

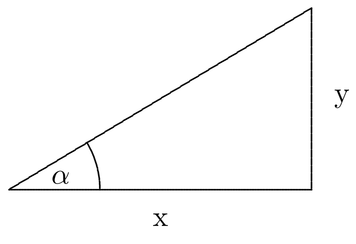
$$\frac{y}{x} = \tan\alpha$$

$$\tan\alpha = y'$$

$$\arctan y' = \alpha$$

Wenn man dies ableitet erhält man:

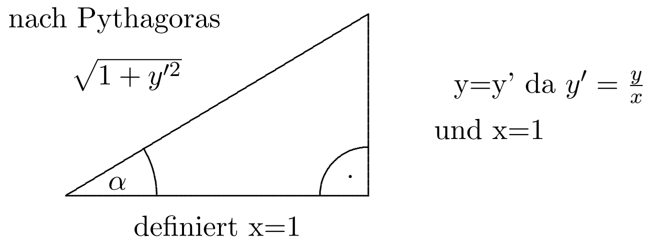
$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2}$$

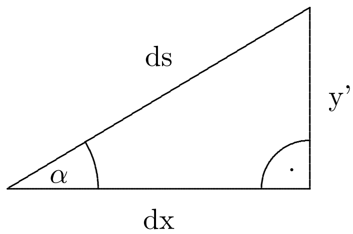


Hergeleitet in Anhang 3

Dreiecke sind kongruent, wenn drei Angaben übereinstimmen (außer drei Winkeln). Die beiden Dreiecke rechts haben beide einen rechten Winkel. Für die Werte von α und y' wird definiert, dass diese gleich sind. Somit sind beide Dreiecke kongruent. Also kann festgestellt werden, dass gilt:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$





$$k = \frac{d\alpha}{dx} : \frac{ds}{dx}$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$k = \frac{y''}{1 + y'^2} : \sqrt{1 + y'^2}$$

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2) \cdot (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\underline{k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

2.2 Kreiskrümmung

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{Formel für den oberen Halbkreis.}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$y'' = -\frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Durch Einsetzen in die Krümmunsformel erhält man:

$$k = -\frac{r^2}{(1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2})^{\frac{3}{2}} \cdot (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k = -\frac{r^2}{(\{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}\} \cdot \{r^2 - x^2\})^{\frac{3}{2}}}$$

$$k = -\frac{r^2}{(r^2 - x^2 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} \cdot r^2 - \frac{x^2}{r^2 - x^2} \cdot x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k = -\frac{r^2}{(r^2 - x^2 + \{\frac{x^2}{r^2 - x^2}\{r^2 - x^2\}\})^{\frac{3}{2}}}$$

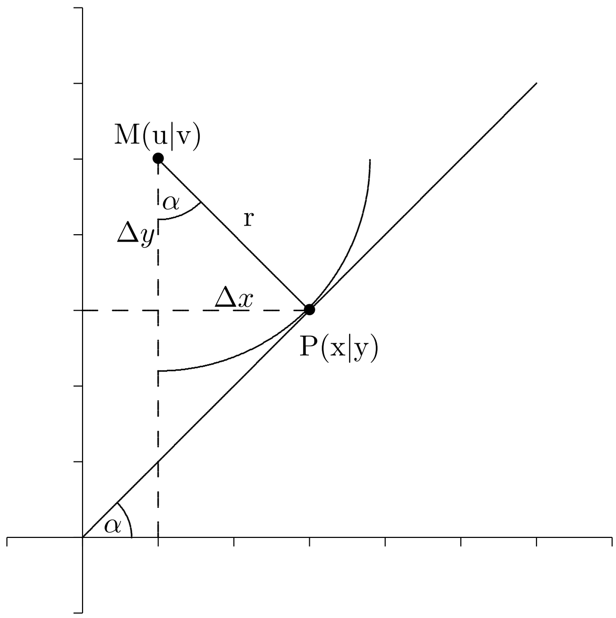
$$k = -\frac{r^2}{(r^2 - x^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k = -\frac{r^2}{(r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k = -\frac{r^2}{r^3} = -\frac{1}{r}$$

Also gilt $k = -\frac{1}{r}$ für den oberen Halbkreis und $k = \frac{1}{r}$ für den unteren Halbkreis. Da die Krümmung eines Kreises an jeder Stelle gleich ist und da das Minuszeichen nur die Richtung der Krümmung angibt, die bei einem Kreis nicht nötig ist, kann man allgemein sagen: $k = \frac{1}{r}$

2.3 Krümmungskreis



Gesucht wird nun der Mittelpunkt des Krümmungskreises M(u|v) für den Kurvenpunkt P(x|y).

Aus diesem Dreieck ergeben sich die links stehenden Formeln.

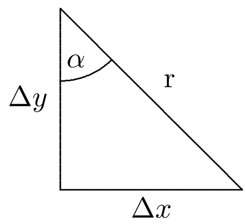
$$\sin\alpha = \frac{\Delta x}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{\Delta y}{r}$$

$$r \cdot \sin\alpha = \Delta x$$

$$r \cdot \cos\alpha = \Delta y$$

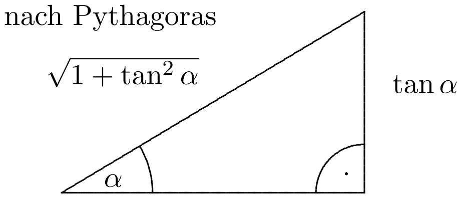
$$\tan\alpha = y'$$



Nach dem rechts stehenden Dreieck gilt:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$



Aus dem letzten Abschnitt kennen wir noch:

$$k = \frac{1}{r}$$

Für k eingesetzt ergibt das:

$$r = \left| \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right|$$

Aus den beiden Gleichungen

$$\Delta x = r \cdot \sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

erhalten wir:

$$\Delta x = \frac{r \cdot y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\Delta x = \frac{r \cdot y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Nun wird noch für r eingesetzt

$$\Delta x = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} \cdot y'}{y'' \cdot \sqrt{1+y'^2}} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} \cdot y'}{y'' \cdot (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$$

$$u = x - \Delta x$$

$$\underline{u = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}}$$

Aus den beiden Gleichungen

$$\Delta y = r \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

erhalten wir:

$$\Delta y = r \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Nun wird noch für r eingesetzt

$$\Delta y = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y'' \cdot \sqrt{1+y'^2}} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y'' \cdot (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1+y'^2}{y''}$$

$$v = y + \Delta y$$

$$\underline{v = y + \frac{1+y'^2}{y''}}$$

3 Verbindung zweier parallel versetzt aufeinander zulaufender Straßen

Um zwei parallel versetzt aufeinander zulaufende Straßen zu verbinden, gibt es mehrere Möglichkeiten, von denen wir nun einige zeigen und ihre Vor- und Nachteile auflisten. Wir tun dies anhand eines Beispiels, da eine allgemeine Lösung ein sehr unübersichtliches Ergebnis hervorbringt.
Die erste Straße liegt auf der x-Achse. Sie kommt aus dem negativen Bereich und endet im Nullpunkt. Die erste Straße wird so gewählt, da die Koordinaten und die Steigung so null sind. Daher werden einige Variablen wegfallen, was zu einfacheren Gleichungen führt. Die erste Straße kann man, unabhängig davon wie die Straßen in der Praxis zueinander liegen, immer so definieren. Die Lage der Straßen zueinander wird nur von der zweiten Straße bestimmt.
Diese Straße beginnt bei uns bei (2|2) und führt waagerecht nach rechts weiter. Die Richtung der Straße war als parallel zur ersten vorgegeben. Diese Position der zweiten Straße ist zufällig gewählt.

3.1 Verbindung mit vier Bedingungen

Dies ist die einfachste Art, die Straßen zu verbinden. Wir geben die Position und die Richtung der Straßen an, damit es keinen Knick gibt. Somit erhalten wir vier Bedingungen. Also brauchen wir einen Funktionsterm dritter Ordnung.

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$f'(x) = b + 2cx + 3dx^2$$

$$f(0) = 0 \implies 0 = a$$

$$f'(0) = 0 \implies 0 = b$$

$$f(2) = 2 \implies 2 = a + 2b + 4c + 8d$$

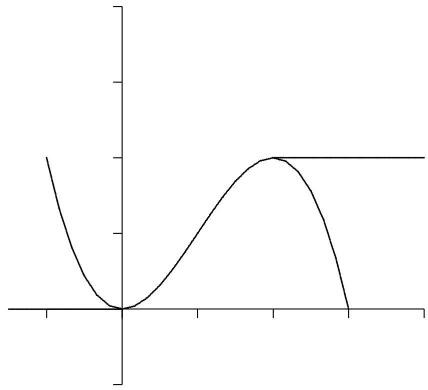
$$f'(2) = 0 \implies 0 = b + 2c + 4d$$

Löst man dies auf so erhält man:

$$c = \frac{3}{2}, \quad d = -\frac{1}{2}$$

$$\implies \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

Wie man rechts sehen kann werden die beiden Straßen nun von der Funktion ohne Knick verbunden. Diese Möglichkeit ist zwar sehr einfach, hat in der Praxis aber einen großen Nachteil. Die Krümmung wurde nicht berücksichtigt. Das bedeutet, dass ein Autofahrer, wenn er in die Kurve fährt, das Lenkrad augenblicklich herumreißen müsste, da die Krümmung augenblicklich zunimmt. Es entsteht dadurch ein so genannter Krümmungsruck, der eine große Kraft gegen das Auto bedeutet, so dass es im Extremfall aus der Kurve getragen wird.
Damit kann man diese Gestaltung der Kurve für die Praxis bereits an dieser Stelle ausschließen.



3.2 Verbindung mit sechs Bedingungen

Damit der Autofahrer nicht das Lenkrad herumreißen muss wie in der oberen Methode, muss auch die Krümmung an den Übergangsstellen gleich sein. Die Formel für die Krümmung ist $k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Damit die Krümmung gleich ist, müssen folglich die erste und die zweite Ableitung gleich sein. Die erste wurde schon gleichgesetzt, damit kein Knick entsteht. Nun muss also noch die zweite Ableitung gleichgesetzt werden.

Damit erhalten wir insgesamt sechs Bedingungen, benötigen also eine Funktion fünfter Ordnung.

$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$

$f'(x) = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + 5fx^4$

$f(0) = 0 \implies 0 = a$

$f'(0) = 0 \implies 0 = b$

$f''(0) = 0 \implies 0 = c$

$f(2) = 2 \implies 2 = a + 2b + 4c + 8d + 16e + 32f$

$f'(2) = 0 \implies 0 = b + 4c + 12d + 32e + 80f$

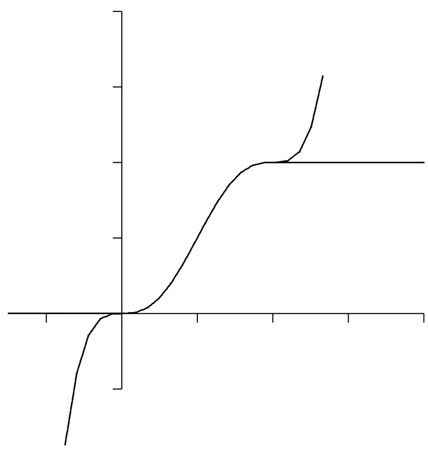
$f''(2) = 0 \implies 0 = 2c + 12d + 48e + 160f$

Gelöst:

$d = \frac{5}{2}\ , \quad e = -\frac{15}{8}\ , \quad f = \frac{3}{8}$

$\implies \quad f(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{15}{8}x^4 + \frac{3}{8}x^5$

Auf diese Weise erhalten wir eine Verbindung zwischen den Straßen, die für Autos leicht zu durchfahren ist. In diesem Fall ist die Krümmung mit berücksichtigt.



3.3 Verbindung mit sechs Bedingungen und halbiertem Intervall

Um ein Polynom fünften Grades zu vermeiden, werden bei dieser Methode zwei Funktionen vierten Grades genommen, die sich in der Mitte zwischen den beiden zu verbindenden Straßen treffen. Dazu müssen die Position, die erste und die zweite Ableitung jeweils übereinstimmen bei:
x=0, bei x=1 und bei x=2. Somit erhalten wir neun Bedingungen. Wir haben jedoch zehn Variablen, daher wird in der ersten Funktion das kubische Glied weggelassen.
Bei x=0 gilt $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. Daher fallen bei der ersten Funktion auch das absolute, das lineare und das quadratische Glied weg. Damit haben wir für die erste Funktion nur noch $f(x) = kx^4$.

$f_1(x) = kx^4$

$f_1'(x) = 4kx^3$

$f_1''(x) = 12kx^2$

$f_2(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$

$f_2'(x) = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3$

$f_2''(x) = 2c + 6dx + 12ex^2$

$f_1(1) = f_2(1) \quad \Longrightarrow \quad k = a + b + c + d + e$

$f_1'(1) = f_2'(1) \quad \Longrightarrow \quad 4k = b + 2c + 3d + 4e$

$f_1''(1) = f_2''(1) \quad \Longrightarrow \quad 12k = 2c + 6d + 12e$

$f_2(2) = 2 \quad \Longrightarrow \quad 0 = b + 4c + 12d + 32e$

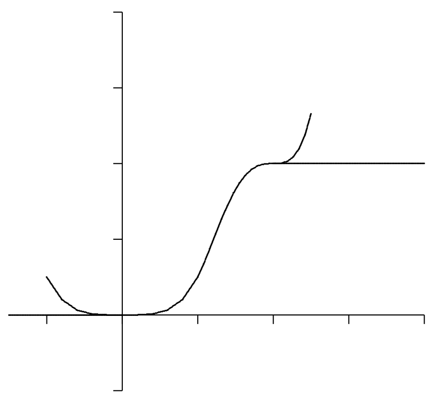
$f_2''(2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = 2c + 12d + 48e$

Gelöst

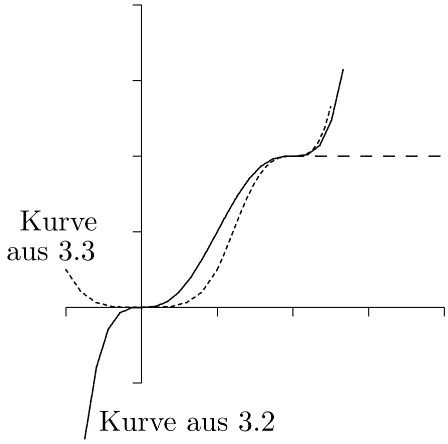
$k = \frac{1}{2}, \quad a = 10, \quad b = -32, \quad c = 36, \quad d = -16\ , \quad e = \frac{5}{2}$

$\Longrightarrow \quad f_1(x) = \frac{1}{2}x^4, \quad f_2(x) = 10 - 32x + 36x^2 - 16x^3 + \frac{5}{2}x^4$

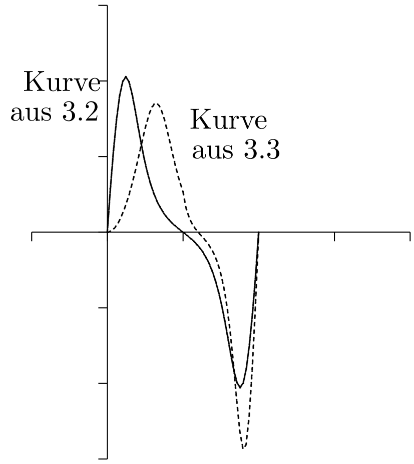
Bei dieser Variante ist die Rechnung zwar etwas komplizierter, doch es ist einfacher die Straße zu bauen, da der Grad des Polynoms niedriger ist als der des Polynoms aus der vorhergehenden Methode.



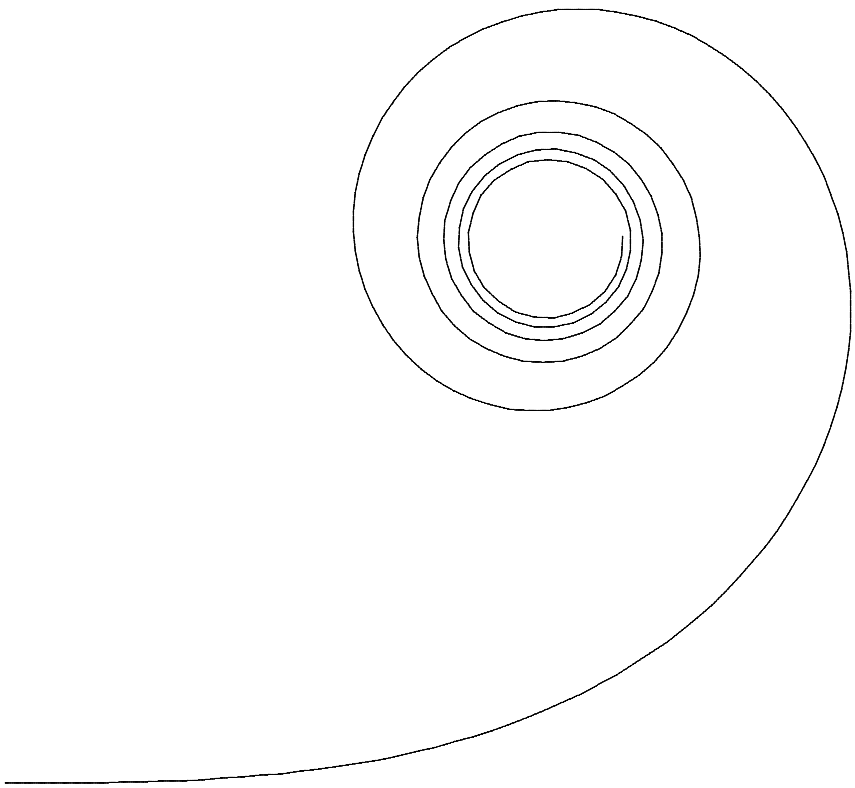
Hier sind noch einmal die letzten beiden Graphen zum Vergleich dargestellt.



Hier sind sind die Krümmungen beider Funktionen dargestellt.
Wie man sehen kann, übersteigt der Betrag der Krümmung der Kurve aus 3.2 sowohl im Maximum als auch im Minimum nicht 2.
Die Kurve aus 3.3 hingegen erreicht in ihrem Minimum eine Krümmung von fast 3.
Daher kann man die Kurve aus 3.3 nur mit einer weitaus geringeren Geschwindigkeit durchfahren als die Kurve aus 3.2.



3.4 Klothoide



Die Klothoide wird auch Cornusche Spirale oder Spinnkurve genannt. Das besondere an dieser Kurve ist, dass die Krümmung proportional zur Bogenlänge ist.
Im Straßen- und Eisenbahnbau findet sie ihre Anwendung, da man dort Gerade und Kreis miteinander verbinden muss. Geraden und Kreise können, aufgrund ihrer konstanten Krümmung, als einzige Fahrstrecken mit gleichbleibendem Lenkradeinschlag befahren werden. Man kann sie jedoch nicht direkt miteinander verbinden, da das eine plötzliche Richtungsänderung zur Folge hätte, bei der die Fahrzeuge mit enorm großer Kraft nach außen getragen würden.
Um dieser plötzlichen Krümmungsänderung entgegen zu wirken, wird bei der Verbindung von Gerade und Kreis ein Teilstück der Klothoide verwendet. Dadurch ist die Krümmung überall stetig von der Bogenlänge abhängig. Die auf ein Fahrzeug wirkende Zentrifugalkraft ist proportional zur Krümmung. Somit garantiert ein Teilstück der Klothoide eine stetige Änderung der Zentrifugalkräfte, das heißt es kommt zu keinem Krümmungsruck.

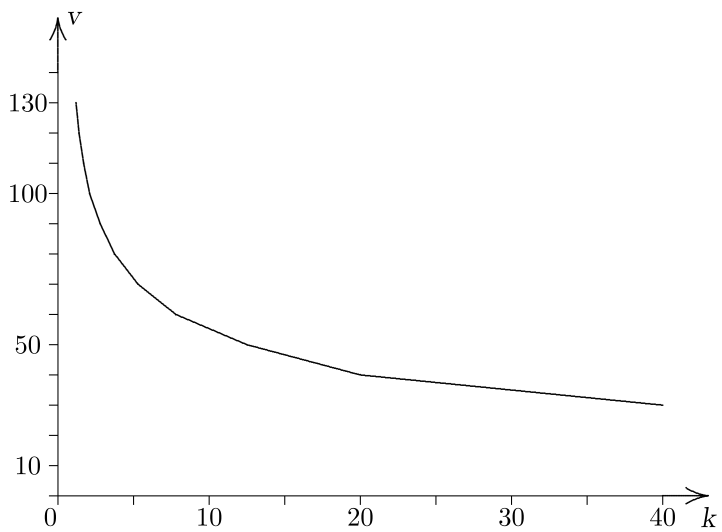
4 Höchstgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Krümmung

Zwischen zulässiger Höchstgeschwindigkeit und Krümmung gibt es eine funktionale Beziehung. Anhand der auf Erfahrungswerten entstandenen Tabelle von maximaler Krümmung k und zulässiger Höchstgeschwindigkeit v wollen wir diese funktionale Beziehung herausfinden.

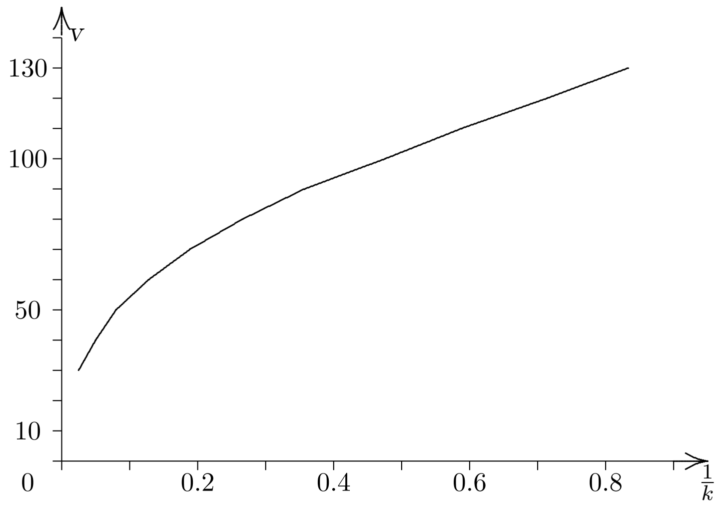
maximale Krümmung k	1,2	1,7	2,8	5,3	12,5	40
zul. Höchstgeschwindigkeit (km/h)	130	110	90	70	50	30
1/Krümmung k	0,833	0,588	0,357	0,189	0,08	0,025
$\frac{1}{\sqrt{k}}$	0,913	0,767	0,598	0,434	0,283	0,158

Die ersten beiden Zeilen der Tabelle stammen aus Quelle 1

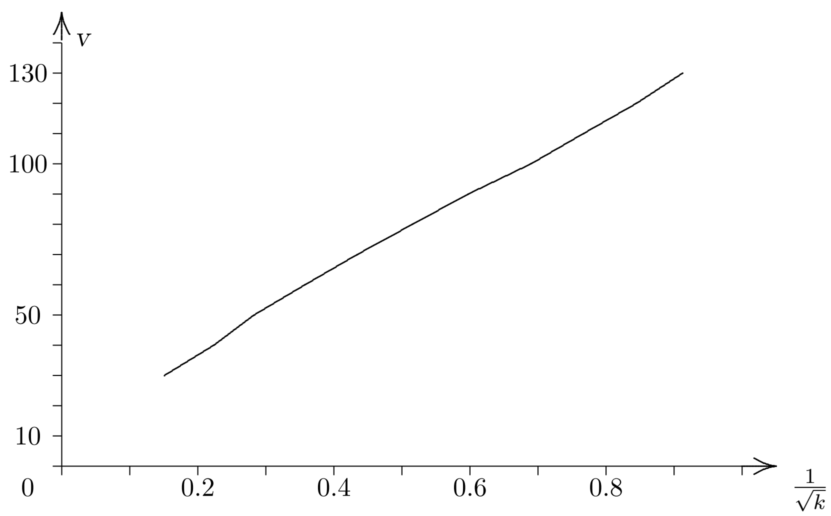
Um die Beziehung von der Krümmung und der Höchstgeschwindigkeit herauszufinden zeichnen wir als erstes v in Abhängigkeit von k.



Die Form des Graphen lässt darauf schließen, dass es sich um eine Hyperbel handelt. Um zu Linearisieren, muss man nun auf der x-Achse $\frac{1}{k}$ eintragen.



Diese Form des Graphen lässt darauf schließen, dass es sich um eine Wurzelfunktion handelt. Um zu Linearisieren, muss nun auf der x-Achse $\frac{1}{\sqrt{k}}$ eingetragen werden.



Der Graph ist nun annähernd eine Gerade. Da es sich bei den gegebenen Krümmungen und dazugehörigen Höchstgeschwindigkeiten um Erfahrungswerte handelt, ist die nicht vollständig lineare Form des Graphen leicht zu begründen.
Die Formel lautet nun $v = b \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$.

b ist als Konstante gewählt, da k bereits für die Krümmung steht.

Bestimmung des Proportionalitätsfaktors b:

Man kann b aus dem linearisierten Graphen ablesen. Dort ist es etwa 155. Durch Einsetzen der gegebenen k- und v-Werte in die Formel $v = b \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$ erhält man 6 verschiedenen Werte, diese addiert und durch 6 dividiert ergibt 160. Die Beziehung zwischen maximaler Krümmung und zulässiger Höchstgeschwindigkeit lautet also

$v = 160 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$.

5 Fazit

In dieser Facharbeit haben wir zwei Methoden zum Angeben der Krümmung einer Kurve erarbeitet. Die erste Variante mit der Krümmungszahl k ist jedoch recht abstrakt. Der Radius eines Krümmungskreises ist da sehr viel anschaulicher.
Im zweiten Teil wurde mal wieder klar, dass Mathematik, entgegen den Behauptungen mancher Schüler, doch zu etwas nützlich ist. Was wäre denn wohl mit dem Auto passiert, das durch die Kurve aus 3.1 gefahren wäre? Vermutlich wäre es gegen den nächsten Baum gefahren.
Erst durch genauere Untersuchungen gelangt man zu brauchbaren Lösungen. Die Methoden aus 3.2 - 3.4 sind schon wesentlich besser. Unter diesen drei Möglichkeiten gibt es keinen klaren Sieger. 3.2 ist einfach zu berechnen und schneller zu durchfahren als 3.3, doch die wiederum ist wesentlich einfacher zu bauen. Die Klothoide hat den Nachteil, dass sie nicht funktional beschreibbar und damit sehr schwer zu berechnen ist.
Die Funktion zur Errechnung der Höchstgeschwindigkeit eines Autos in Abhängigkeit von der Krümmung der durchfahrenen Kurve ist für den Vergleich unter den Methoden zur Gestaltung der Kurven von Bedeutung, da die mögliche Höchstgeschwindigkeit in einer Kurve von entscheidender Wichtigkeit ist.

6 Anhang

6.1 Quellen

1. Kopien vom Fachlehrer

2. http://php.learnline.de/angebote/blickpunktmatnat/autoren/smims/2002/projekte/projekt5/trassierung_von_autobahnen.pdf

3. http://e-collection.ethbib.ethz.ch/ecol-pool/lehr/lehr_77_11.pdf

6.2 Zusammenfassung

Darstellung von Krümmung

$k = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \dfrac{d\alpha}{ds}$

$k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

$k = \frac{1}{r}$

$M\left(u = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \;\mid\; v = y + \frac{1+y'^2}{y''}\right)$

Verbindung zweier parallel versetzt aufeinander zulaufender Straßen

Für die Verbindung von zwei parallel versetzt aufeinander zulaufender Straßen gibt es verschiedene Methoden.
Die Erste, mit vier Bedingungen, ist wegen des Krümmungsrucks nicht praktikabel.
Die Zweite, mit sechs Bedingungen, ist besser, da die Krümmung berücksichtigt wurde, doch sie ist schwer zu bauen, da ein Polynom fünften Grades entsteht.
Die Dritte, mit sechs Bedingungen und halbiertem Intervall, ist leichter zu bauen, da zwei Polynome vierten Grades entstehen, doch die Krümmung ist größer $\rightarrow$ Höchstgeschwindigkeit ist geringer.
Bei der vierten Möglichkeit steigt die Krümmung linear an. Sie ist für Autos leicht zu befahren, doch sie ist sehr kompliziert zu berechnen.

Formel für die Höchstgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Krümmung:

$v = 160 \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$

Gefunden durch Linearisierung von Erfahrungswerten.

6.3 Herleitung der Ableitung des Arcus Tangens

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$(\tan\alpha)' = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)'$$
$$(\sin\alpha)' = \cos\alpha$$
$$(\cos\alpha)' = -\sin\alpha$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$
$$\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)' = \frac{\cos\alpha\cdot\cos\alpha - (-\sin\alpha\cdot\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}$$
$$\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)' = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$
$$\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)' = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$
$$\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)' = 1 + \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2$$
$$(\tan\alpha)' = 1 + \tan^2\alpha$$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{x'}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$
$$(\arctan(x))' = \frac{x'}{1 + (\tan(\arctan x))^2}$$
$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1 + x^2}$$

6.4 Versicherung der eigenständigen Anfertigung

...