

# Füllen von Rotationskörpern

W. B.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Vorwort . . . . .	1
1.2	Theoretische Grundlagen . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Füllen von Rotationskörpern</b>	<b>3</b>
2.1	Theoretische Grundlagen zum Füllvorgang . . . . .	3
2.2	Füllfunktionen für den Zylinder . . . . .	4
2.3	Füllfunktionen für den Kegel . . . . .	5
2.4	Allgemeiner Ansatz zur Herleitung der Füllfunktionen von Rotationskörpern über Differentialgleichungen . . . . .	7
2.5	Füllfunktionen des Paraboloids . . . . .	10
2.6	Der Füllvorgang bei einem Silo . . . . .	12
2.7	Der Füllvorgang bei einem Körper mit unstetiger Profilfunktion . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Schlusswort</b>	<b>18</b>
3.1	Quellenangaben . . . . .	18
<b>A</b>	<b>Rechenbeispiele</b>	<b>19</b>
A.1	Zylinder . . . . .	19
A.2	Paraboloid . . . . .	19
<b>B</b>	<b>Versicherung über die selbstständige Anfertigung</b>	<b>20</b>

# 1 Einleitung

Ausgangssituation dieser Facharbeit ist das Füllen eines Rotationskörpers durch einen zeitlich konstanten Zufluss mit Wasser. Bei näherer Betrachtung dieses Vorgangs lässt sich ein Zusammenhang zwischen Wasserspiegellhöhe und verstrichener Zeit erkennen.

Um den Füllvorgang mathematisch beschreiben, verstehen und modellieren zu können, ist es das Ziel dieser Facharbeit, Funktionen zu entwickeln, die jeder Wasserspiegellhöhe des Füllvorgangs eine bestimmte Füllzeit zuordnen und umgekehrt.

Hinter all den Untersuchungen dieser Arbeit steht eine Kernfrage, die es am Ende für Rotationskörper unterschiedlicher Art zu beantworten gilt:

Wie lange braucht der Wasserspiegel zum Erreichen einer bestimmten Höhe?

## **Zum Aufbau der Facharbeit:**

Die Facharbeit wird im Wesentlichen aus drei Teilen bestehen. Zunächst werde ich mich mit den Füllvorgängen von Zylinder und Kegel beschäftigen, da sie die Grundlagen für alle weiteren Überlegungen zu Füllvorgängen für kompliziertere Rotationskörper bilden.

Im zweiten Teil wird dann auf Grundlage der bis dahin erlangten Erkenntnis ein allgemeiner Ansatz zur Herleitung der den Füllvorgang beschreibenden Funktionen entwickelt, um Untersuchungen am Füllvorgang komplizierterer Rotationskörper, die im dritten Teil der Facharbeit zu finden sind, anstellen zu können.

Im Schlussteil wird eine abschließende Reflektion des gesamten Themas zu finden sein.

## 1.1 Vorwort

Die Mathematik an sich ist oft sehr trocken. Sie ist eine Wissenschaft, die Erkenntnis auf Basis der Logik, also der absoluten Rationalität erlangt. Selten wird zur Erlangung der Erkenntnis empirisch vorgegangen, was den, der sich mit der Mathematik beschäftigt, oft nach dem Sinn mathematischer Zusammenhänge fragen lässt.

Auch ich gehöre zu den Menschen, die gerne einen Sinn in mathematischer Erkenntnis sehen. Der Bezug mathematischer Zusammenhänge auf die Natur, um bestimmte Vorgänge zu beschreiben bzw. vorhersagen zu können, ist für mich die Hauptmotivation in der Beschäftigung mit der Mathematik. Aus diesem Grund habe ich mich für das Thema dieser Facharbeit entschieden, da es in gewisser Weise einen sehr praktischen, naturbezogenen und physikalischen Hintergrund hat.

Das mathematische Wissen, was ich in der Schule erlangt habe, war für manche Untersuchungen von Füllvorgängen nicht ausreichend genug. Ich wurde bei meinen Forschungen teilweise vor unüberwindbare, logische Hindernisse gestellt. Trotzdem denke ich, dass ich eine schöne Bandbreite an Füllvorgängen in dieser Facharbeit mathematisch beschrieben habe.

Ich möchte an dieser Stelle noch betonen, dass ich auf die Darstellung umständlicher, aber doch sehr primitiver Rechenschritte in dieser Arbeit verzichtet habe, weil es auf die logischen Überlegungen zu den Füllvorgängen ankommt und nicht auf einfache Rechenschritte.

## 1.2 Theoretische Grundlagen

Rotationskörper entstehen durch Rotieren eines Funktionsgraphen in einem festgelegten Intervall um eine Koordinatenachse.

Die Untersuchungen in dieser Arbeit werden sich auf Körper beschränken, die durch Rotation dieses Graphen auf dem Intervall  $[0, H]$  um die horizontale Achse (**Abszisse**) des entsprechenden Koordinatensystems entstehen. Weil die Rotationskörper zum Füllen wieder senkrecht gestellt werden, ist die Abszisse die Höhenachse des entsprechenden Körpers. Die zum rotierenden Graphen zugehörige Funktion wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit als **Profilfunktion**  $r(h)$  bezeichnet. Sie gibt den Querschnittsradius  $r$  an einer Stelle  $h$  des Körpers an, da sich durch Rotation des Graphen um die Abszisse kreisrunde Querschnittsflächen ergeben. Für die Querschnittsfläche  $Q(h)$  des Rotationskörpers an einer Stelle  $h$  gilt daher:

$$Q(h) = \pi \cdot (r(h))^2$$

Ein Füllvorgang benötigt füllfähige Körper, weshalb für die Profilkfunktionen der untersuchten Rotationskörper noch die Einschränkung zu machen ist, dass sie auf dem besagten Intervall  $[0, H]$  positiv sein müssen.

Die Analysen der Füllfunktionen werden sich im wesentlichen auf die Geschwindigkeit des Wasserspiegelanstiegs beschränken, da sie die interessantere physikalische Größe ist. Ich möchte hier nochmal betonen, dass mir der physikalische Hintergrund dieses Themas wichtig ist und er die Hauptmotivation war, mich mit diesem Thema auseinanderzusetzen.

## 2 Füllen von Rotationskörpern

### 2.1 Theoretische Grundlagen zum Füllvorgang

Alle betrachteten Füllvorgänge in diesem Kapitel haben die Eigenschaft, dass die Rotationskörper gleichmäßig gefüllt werden, d.h. dass der Quotient aus dem Volumen des eingefüllten Wassers und der verstrichenen Zeit  $t$  konstant ist. Das Einfüllvolumen ist folglich proportional zur Zeit, wobei der Proportionalitätsfaktor der Füllgeschwindigkeit entspricht (diese wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit als **Zufluss**  $Z$  bezeichnet).

Für das Einfüllvolumen nach einer Zeit  $t$  gilt also für jeden unserer Rotationskörper die lineare Funktion:  $V(t) = Z \cdot t$ .

Die Füllvorgänge für alle betrachteten Rotationskörper werden durch sogenannte Füllhöhe- und Füllzeitfunktionen beschrieben.

Die **Füllhöhefunktion**  $h(t)$  stellt die Füll- bzw. Wasserspiegelhöhe  $h$  im betrachteten Körper in Abhängigkeit zur verstrichenen Zeit  $t$  des Füllvorgangs dar. Die **Füllzeitfunktion**  $t(h)$  stellt diese beiden Größen umgekehrt zueinander in Abhängigkeit, weshalb sie der Umkehrfunktion von  $h(t)$  entspricht. Es gilt:  $t(h) = h^{-1}(t)$ .

Alle Füllvorgänge haben unabhängig vom Zufluss  $Z$  und der Beschaffenheit des Rotationskörpers bestimmte allgemeine Eigenschaften, welche durch die Füllfunktionen erfasst werden müssen:

- Zum Zeitpunkt  $t = 0$  eines Füllvorgangs kann das Wasser noch keine Höhe erreicht haben. Die Wasserspiegelhöhe ist zu diesem Zeitpunkt Null.
- Ein Rotationskörper kann maximal bis zu seiner eigenen Höhe  $H$  mit Wasser gefüllt werden. Diese Höhe wird nach einer Zeit  $T$  erreicht, die der Füllzeit des gesamten Körpers entspricht.

Für  $h(t)$  gelten daher folgende **Randbedingungen**:

$$\begin{aligned}h(0) &= 0 \\h(T) &= H\end{aligned}$$

Für  $t(h)$  ergeben sich die **Randbedingungen** wie folgt:

$$\begin{aligned}t(0) &= 0 \\t(H) &= T\end{aligned}$$

Die Graphen der Füllfunktionen müssen im Koordinatenursprung beginnen und in einem bestimmten Punkt im ersten Quadranten des Koordinatensystems enden, da  $T$  und  $H$  bei einem Füllvorgang immer positiv sind. Die Füllfunktionen beschränken sich also auf ein bestimmtes Intervall und einen Wertebereich, welche sich aus den Randbedingungen ableiten.

Im Folgenden werden diese Funktionen für Rotationskörper mit unterschiedlichen Eigenschaften entwickelt. Zunächst aber für einfache Rotationskörper wie z.B. dem Zylinder, um logische Grundlagen zu erläutern und später über einen allgemeinen Ansatz solche für kompliziertere Rotationskörper zu finden.

## 2.2 Füllfunktionen für den Zylinder

Betrachten wir zunächst den Füllvorgang bei einem geraden Zylinder mit der Höhe  $H$  und dem Grundflächenradius  $R$ , der auf seiner Grundfläche steht.

Der Körper entsteht durch Rotieren des Funktionsgraphen von  $r(h) = R$  auf dem abgeschlossenen Intervall  $[0, H]$  um die Abszisse des Koordinatensystems.

Das Volumen des Zylinders ergibt sich aus der bekannten Formel:  $V(h) = \pi R^2 \cdot h$ .

Weil der Körper auf seiner Grundfläche steht und von oben durch den konstanten Zufluss  $Z$  in der Zeit  $t$  bis zu einer Höhe  $h$  mit Wasser gefüllt wird, kann man  $h$  in dieser Formel in Abhängigkeit zur Füllzeit  $t$  sehen (**Abb. 2**). Für das Volumen des in dieser Zeit gefüllten Teils gelten dann folgende Funktionen:

$$\begin{aligned} V(t) &= Z \cdot t & [0, T] \\ V(h(t)) &= \pi R^2 \cdot h(t) & [0, T] \end{aligned}$$

Sie beschränken sich auf das Intervall  $[0, T]$ , da der Zylinder nur ein bestimmtes Volumen an Wasser fassen kann, welches zum Zeitpunkt  $T$  erreicht wird.

Durch Gleichsetzen dieser Funktionen und Umstellen nach  $h(t)$  erhält man sofort die **Füllhöhefunktion des Zylinders**:

$$h_{\text{Zylinder}}(t) = \frac{Z}{\pi R^2} \cdot t \quad [0, T]$$

Der Graph von  $h(t)$  ist eine Ursprungsgerade, die im Punkt  $(T; H)$  endet (**Abb. 3**). Somit erfüllt die Füllfunktion alle notwendigen Randbedingungen aus Kapitel 2.1.

Die Ableitung  $h'(t) = \frac{Z}{\pi R^2}$  gibt die Steigung dieser Geraden an und entspricht der Geschwindigkeit des Wasserspiegelanstiegs (Höhe pro Zeit). Diese ist bei der Füllhöhefunktion des Zylinders auf dem gesamten Intervall  $[0, T]$  konstant.

Aus  $h'(t)$  geht hervor, dass die Steigung von  $h(t)$  neben dem Zufluss  $Z$  auch von der Größe der Grundfläche  $\pi R^2$  und deshalb vom Grundflächenradius  $R$  des Zylinders abhängig ist.

Untersuchen wir das Verhalten für  $h'(t)$  für  $R \rightarrow 0^+$  (Für  $Z$  gilt allgemein:  $Z > 0$ ):

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} h'(t) = \lim_{R \rightarrow 0^+} \left( \frac{Z}{\pi R^2} \right) = \infty$$

- Bei unendlich kleiner Grundfläche des Zylinders (was sich aus  $R \rightarrow 0^+$  ergibt) ist die Steigung der Füllhöhefunktion unendlich groß. Der Graph von  $h(t)$  wäre die y-Achse.
- Je kleiner die Grundfläche des Zylinders, desto schneller steigt das Wasser in ihm.

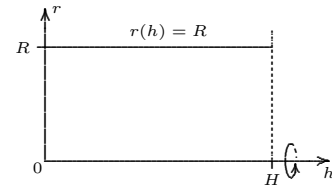


Abb. 1

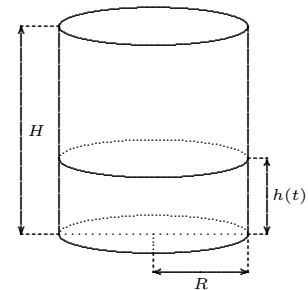


Abb. 2

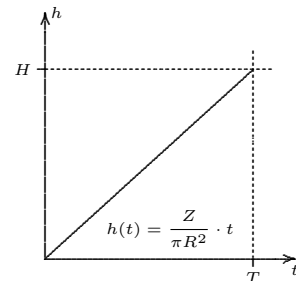


Abb. 3

Bei konstantem Zufluss  $Z$  und einer unendlich großen Grundfläche des Zylinders, die aus  $R \rightarrow \infty^+$  resultiert, ergibt sich genau das Gegenteil:

$$\lim_{R \rightarrow \infty^+} h'(t) = \lim_{R \rightarrow \infty^+} \left( \frac{Z}{\pi R^2} \right) = 0$$

- Bei unendlich großer Grundfläche des Zylinders steigt das Wasser in diesem unendlich langsam an. Der Graph von  $h(t)$  wäre die x-Achse.
- Je größer die Grundfläche des Zylinders, desto langsamer steigt das Wasser in ihm.

**Ergebnis:** Das Wasser steigt in Zylindern mit kleiner Grundfläche schneller an, als in solchen mit größerer Grundfläche.

Die **Füllzeitfunktion des Zylinders** ergibt sich aus der Füllhöfunktio, da sie ihrer Umkehrfunktion entspricht:

$$t_{Zylinder}(h) = \frac{\pi R^2}{Z} \cdot h \quad [0, H]$$

Der Intervall auf dem sie definiert ist, ist der Wertebereich von  $h(t)$ . Mit der Füllzeitfunktion  $t(h)$  kann man jeder Wasserspiegelhöhe  $h$  einen bestimmten Zeitpunkt im Füllvorgang zuordnen.

### 2.3 Füllfunktionen für den Kegel

In vorangegangenen Kapitel 2.2 wurde beim Zylinder der Ansatz verfolgt, das Einfüllvolumen des Wassers mit dem Volumen des dreidimensionalen Körpers, den das Wasser selbst im befüllten Rotationskörper bildet, gleich zu setzen, um so auf die Füllfunktionen des Zylinders zu kommen.

Dieser Gedankengang lässt sich auch beim Kegel anwenden, da er ein weiterer Rotationskörper ist, für den die Formel zur Volumenberechnung bekannt ist. Das Volumen lässt sich mit  $V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$  berechnen.

Weil der Kegel auf seiner Spitze steht, bildet das eingefüllte Wasser im Kegel selbst einen kegelförmigen Wasserkörper mit der Höhe  $h$ , dessen Volumen mit

$$V_{Wasserkegel}(h) = \frac{1}{3} \cdot Q_{Kegel}(h) \cdot h$$

berechnet wird. Die Querschnittsfläche  $Q_{Kegel}$  an einer Höhe  $h$  des befüllten Kegels entspricht der Grundfläche des Wasserkegels bzw. der Wasserspiegeloberfläche. Sie ist durch die Funktion  $Q_{Kegel}(h) = \pi(r(h))^2$  definiert.

Der Zusammenhang  $r(h)$  zwischen betrachteter Höhe  $h$  des Kegels und dem Radius  $r$  der zugehörigen Querschnittsfläche geht aus der Profilfunktion des Kegels in

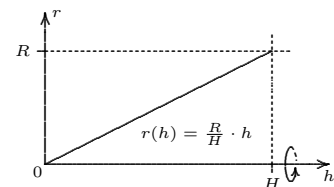


Abb. 4

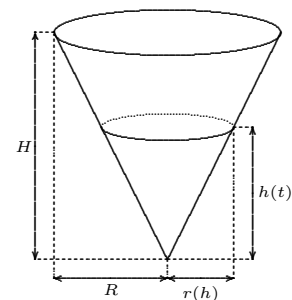


Abb. 5

**Abb. 4** hervor. Die Steigung der Profilkurve entspricht dem Quotienten aus dem Grundflächenradius  $R$  und der Höhe  $H$  des Kegels. Folglich ist die Profilkurve des Kegels durch die Funktion  $r(h) = \frac{R}{H} \cdot h$  definiert.

Für das Volumen des Wasserkegels gilt dann:

$$\begin{aligned} V_{Wasserkegel}(h) &= \frac{1}{3} \cdot Q_{Kegel}(h) \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi(r(h))^2 \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi\left(\frac{R}{H} \cdot h\right)^2 \cdot h \end{aligned}$$

$$V_{Wasserkegel}(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \frac{R^2}{H^2} \cdot h^3 \quad [0, H]$$

Der Definitionsbereich der Funktion beschränkt sich auf das Intervall  $[0, H]$ , weil das Volumen des Wasserkegels nicht größer werden kann als das des Rotationskegels.

Für  $H$  eingesetzt ergibt sich somit:  $V_{Wasserkegel}(H) = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H = V_{Kegel}$

Die Füllfunktionen des Kegels erhält man nun, indem man den Ansatz aus Kapitel 2.2 weiterverfolgt. Man kann die Höhe  $h$  (in der Formel zur Volumenberechnung des Wasserkegels) in Abhängigkeit zur Zeit  $t$  des Füllvorgangs sehen. Für das Volumen des eingefüllten Wassers, abhängig von der Füllzeit, gelten dann folgende Funktionen:

$$V_{Wasser}(t) = Z \cdot t \quad [0, T]$$

$$V_{Wasser}(h(t)) = \frac{\pi R^2}{3H^2} \cdot (h(t))^3 \quad [0, T]$$

Der Definitionsbereich der Funktionen ergibt sich aus den Randbedingungen des Füllvorgangs, die in Kapitel 2.1 beschrieben wurden (Zum Zeitpunkt  $T$  des Füllvorgangs ist der befüllte Körper komplett gefüllt).

Durch Gleichsetzen dieser Funktionen und anschließendes Auflösen nach  $h(t)$  erhalten wir die **Füllhöhefunktion des Kegels**. Die **Füllzeitfunktion** ergibt sich dann aus dem Zusammenhang  $t(h) = h^{-1}(t)$ .

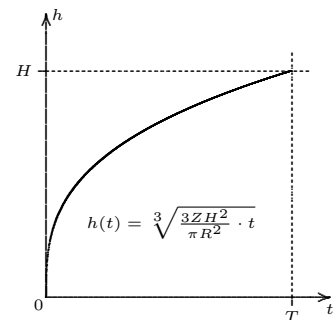
$$h(t) = \sqrt[3]{\frac{3ZH^2}{\pi R^2} \cdot t} \quad [0, T]$$

$$t(h) = \frac{\pi R^2}{3ZH^2} \cdot h^3 \quad [0, H]$$

Die Füllfunktionen erfüllen alle notwendigen Randbedingungen aus Kapitel 2.1.

Beim Betrachten des Graphen der Füllhöhefunktion (**Abb. 6**) fällt auf, dass das Wasser zu Beginn des Füllvorgangs sehr schnell und dann mit fortschreitender Zeit immer langsamer ansteigt (der Graph ist rechtsgekrümmt). Untersuchen wir die Steigung des Graphen in der Umgebung vom Nullpunkt mit  $t \rightarrow 0^+$  in  $h'(t)$ :

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{ZH^2}{\pi R^2} \left(\frac{3ZH^2}{\pi R^2} \cdot t\right)^{-2/3} \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} h'(t) &= \infty \end{aligned}$$



**Abb. 6**



Das Wasser steigt demnach zu Beginn des Füllvorgangs unendlich schnell an. Betrachtet man die Größe der Querschnittsfläche in diesem Bereich, welche man mit  $Q(r(h(t))) = \pi \cdot r(h(t))^2$  berechnet, so ist diese unendlich klein.

Mit zunehmender Zeit wird  $Q(r(h(t)))$  größer und  $h'(t)$  kleiner. Es scheint also einen Zusammenhang zwischen der Querschnittsfläche an einer Stelle  $t_0$  und der Steigung  $h'(t_0)$  zu geben.

Dieser Gedankengang führt uns zum allgemeinen Ansatz zum Herleiten der Füllfunktionen für Rotationskörper.

## 2.4 Allgemeiner Ansatz zur Herleitung der Füllfunktionen von Rotationskörpern über Differentialgleichungen

Bisher war die Grundlage zur Herleitung der Füllfunktionen für Zylinder und Kegel die Kenntnis der Formeln zur Volumenberechnung dieser Körper. Für kompliziertere Rotationskörper, deren Volumen wir nicht ohne weiteres berechnen können, wird ein alternativer Ansatz zur Herleitung der Füllfunktionen benötigt.

Beim Kegel wurde ein Zusammenhang zwischen der Steigung der Füllhöhefunktion an einer Stelle  $t$  und der Querschnittsfläche  $Q(r(h(t)))$  des Rotationskörpers an dieser Stelle festgestellt.

In Kapitel 2.1 wurde dieser Zusammenhang **beim Zylinder** erklärt und hergeleitet. Die Geschwindigkeit mit der das Wasser in ihm steigt, berechnet sich aus der ersten Ableitung  $h'(t)$  der Füllhöhefunktion des Zylinders:

$$h'(t) = \frac{Z}{\pi R^2}$$

Bei bekanntem Radius eines Zylinders kann man die entsprechende Steigung der Füllhöhefunktion berechnen bzw. angeben, mit welcher Geschwindigkeit das Wasser im Zylinder steigt. Bei einem Zylinder ist diese nämlich nur abhängig vom Zufluss  $Z$  und dem Grundflächenradius  $R$  des Zylinders.

Für das Problem der Herleitung der Füllfunktionen für Rotationskörper ist dieser Zusammenhang von fundamentaler Bedeutung.

Man kann bei bekanntem Zufluss  $Z$  eines Füllvorgangs die Geschwindigkeit berechnen, mit welcher der Wasserspiegel in einem Rotationskörper an einer Höhe  $h$  steigt. Dazu stellt man sich an dieser Stelle einen Zylinder vor, dessen Grundflächenradius genauso groß ist, wie der Querschnittsflächenradius an dieser Stelle. Wenn das Wasser mit der selben Geschwindigkeit  $Z$  in den Zylinder gefüllt wird, wie in den Rotationskörper an dieser Höhe  $h$ , muss das Wasser im **fiktiven** Zylinder mit der selben Geschwindigkeit steigen, wie im Rotationskörper an der betrachteten Höhe.

Mit der Funktion

$$h'(t) = \frac{Z}{\pi} \cdot (r(h(t)))^{-2}$$

kann für jeden Zeitpunkt  $t$  bzw. für jede Höhe  $h(t)$  die Steigung der Füllhöhefunktion des entsprechenden Rotationskörpers berechnet werden. **Eine Stammfunktion** dieser Differentialgleichung (**DGL**) ist die gesuchte Füllhöhefunktion.

### Ausführlicher Beweis:

Die vorweg formulierte Theorie zur Berechnung der Geschwindigkeit, mit der das Wasser an einer Stelle  $h(t)$  in einem Rotationskörper steigt, wird im folgenden Abschnitt ausführlich bewiesen.

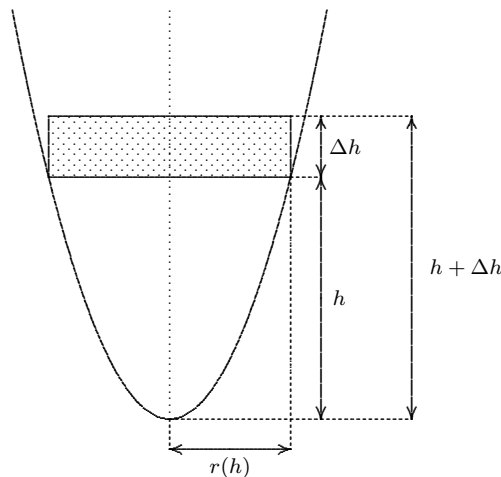
Betrachten wir den Füllvorgang eines Rotationskörpers, dessen Profilfunktion zur Vereinfachung im Intervall  $[0, H]$  **stetig und an jeder Stelle  $h$  differenzierbar** ist.

Wenn der Körper durch den Zufluss  $Z$  mit Wasser gefüllt wird, beträgt das Einfüllvolumen im Zeitintervall  $[t, t + \Delta t]$ :

$$\Delta V = Z \cdot \Delta t.$$

Der Volumenzuwachs  $\Delta V$  des Wassers lässt den Wasserspiegel im Rotationskörper in der Zeit  $\Delta t$  von der Höhe  $h$  auf die Höhe  $h + \Delta h$  steigen. Deshalb entspricht das Einfüllvolumen dem Volumen des Rotationskörpers im Intervall  $[h, h + \Delta h]$ .

Dieses Volumen kann, wie in der Frontansicht des Füllvorgangs zu sehen ist (**Abb. 7**), durch das Volumen eines Zylinders mit dem Grundflächenradius  $r(h)$  und der Höhe  $\Delta h$  approximiert werden.



**Abb. 7**

Der kontinuierliche Höhenzuwachs des Wasserspiegels wird durch einen sprunghaften approximiert, weil die Querschnittsfläche des Rotationskörpers  $Q(r(h))$  auf dem Intervall  $[h, h + \Delta h]$  als konstant angesehen wird (dieses Vorgehen bezeichnet man als Diskretisierung). Tatsächlich verändert sich aber die Querschnittsfläche, wenn die Profilfunktion des Körpers auf diesem Intervall nicht konstant ist.

Die Approximation des Füllvorgangs durch den sprunghaft ablaufenden beinhaltet deshalb in den meisten Fällen einen Näherungsfehler, der jedoch beliebig klein gemacht werden kann, wenn das betrachtete Zeitintervall des Füllvorgangs immer kleiner wird.

Lässt man  $\Delta t$  gegen Null streben, so strebt auch der Höhenzuwachs  $\Delta h$  des Wasserspiegels gegen Null, so dass sich die Querschnittsfläche auf dem Intervall  $[h, h + \Delta h]$  nur unwesentlich ändert und das Volumen des Zylinders dem des Rotationskörpers in diesem Intervall entspricht.

Für den Volumenzuwachs  $\Delta V$  in einer Zeit  $\Delta t$  gelten daher folgende Funktionen:

$$\begin{aligned}\Delta V &= Z \cdot \Delta t \\ \Delta V &\approx \pi \cdot (r(h))^2 \cdot \Delta h\end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für  $\Delta V$  und umstellen nach  $\Delta h$  erhalten wir folgende Differenzgleichung:

$$\Delta h \approx \frac{Z}{\pi} \cdot (r(h))^{-2} \cdot \Delta t$$

Der Näherungsfehler wird nun unendlich klein, wenn beide Seiten der Funktion durch  $\Delta t$  dividiert und der Differenzenquotienten  $\frac{\Delta h}{\Delta t}$  durch  $\frac{dh}{dt}$  bzw. der Ableitung  $h'(t)$  approximiert wird.

Dies entspricht der Vorstellung,  $\Delta t$  gegen Null streben zu lassen;<sup>1</sup> Die anfängliche Diskretisierung des kontinuierlich ablaufenden Höhenzuwachses des Wasserspiegels wird durch diesen Schritt wieder aufgehoben.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta h}{\Delta t} &\approx \frac{Z}{\pi} \cdot (r(h))^{-2} \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{Z}{\pi} \cdot (r(h))^{-2}\end{aligned}$$

Man erhält die bekannte DGL aus der im Vorfeld formulierten Theorie, die jetzt ausführlich bewiesen ist:

$$h'(t) = \frac{Z}{\pi} \cdot (r(h(t)))^{-2}$$

Die linke Seite der DGL ist die Ableitung der Füllhöhefunktion des entsprechenden Rotationskörpers (mit der Profilfunktion  $r(h)$ ).

Sie gibt für jede Höhe  $h$  des befüllten Rotationskörpers die Geschwindigkeit an, mit der das Wasser an dieser Stelle steigt (Höhe pro Zeit  $\frac{dh}{dt}$ ).

Bei einem Füllvorgang ist die betrachtete Höhe des Wasserspiegels abhängig von der Füllzeit  $t$ . Deshalb ist  $h$  in der DGL bzw. in der Profilfunktion des Körpers in Abhängigkeit von  $t$  zu sehen.

**Eine** Stammfunktion dieser DGL, die durch Integrieren ermittelt wird, ist die gesuchte Füllhöhefunktion des Körpers. Die auftretende Integrationskonstante  $C$  geht aus dem Anfangswert des Füllvorgangs  $h(0) = 0$  hervor (**Kapitel 2.1**).

Als **Ergebnis** sei hiermit die folgende Formel zur Berechnung der Füllhöhefunktion eines Rotationskörpers festzuhalten:

$$h(t) = \int \frac{Z}{\pi} \cdot (r(h(t)))^{-2} dt$$

---

<sup>1</sup><http://www.wiwi.uni-frankfurt.de/Professoren/ohse/Fernuni/0054/12Integralrechnung.pdf>

## Die Füllzeitfunktion:

Die Füllzeitfunktion eines Rotationskörpers kann ebenfalls über eine DGL hergeleitet werden:

Zunächst werden wieder die beiden Ausdrücke für den Volumenzuwachs  $\Delta V$  des Füllvorgangs in der Zeit  $\Delta t$  gleichgesetzt und dann nach  $\Delta t$  umgestellt:

$$\begin{aligned}\Delta V &= Z \cdot \Delta t \\ \Delta V &\approx \pi \cdot (r(h))^2 \cdot \Delta h \\ \Delta t &\approx \frac{\pi}{Z} \cdot (r(h))^2 \cdot \Delta h\end{aligned}$$

Die Gleichung wird durch  $\Delta h$  dividiert und der Differenzenquotient  $\frac{\Delta t}{\Delta h}$  wieder durch  $\frac{dt}{dh}$  bzw. der Ableitung  $t'(h)$  approximiert. Man erhält:

$$t'(h) = \frac{\pi}{Z} \cdot (r(h))^2$$

Durch Integration der DGL erhält man eine Stammfunktion, welche die **Füllzeitfunktion** des entsprechenden Körpers ist. Die Integrationskonstante  $C$  ergibt sich aus der Anfangsbedingung  $t(0) = 0$  (**Kapitel 2.1**).

$$t(h) = \int \frac{\pi}{Z} \cdot (r(h))^2 dh$$

## 2.5 Füllfunktionen des Paraboloids

Ein Paraboloid entsteht, wie der Name vermuten lässt, durch Rotation einer **Parabel** um die y-Achse.

Für den Füllvorgang entsteht der selbe Körper, durch Rotation einer Wurzelfunktion auf dem Intervall  $[0, H]$  um die x-Achse (**Abb. 8**). Es spielt keine Rolle, ob der Körper durch Rotation einer Parabel oder einer Wurzelfunktion (um die entsprechende Koordinatenachse) entsteht, weil er nach der Rotation zum Füllen wieder senkrecht gestellt wird (**Abb. 9**).

Das Profil des Paraboloids wird durch die Funktion  $r(h) = k \cdot \sqrt{h}$  beschrieben. Der Körper hat an der Stelle  $H$  einen Querschnittsradius  $R$  (an dieser Stelle befindet sich die Öffnung des Körpers).

Die Profildfunktion muss diesen Zusammenhang wiedergeben, weshalb sich die Konstante  $k$  aus dem Quotienten  $\frac{R}{\sqrt{H}}$  zusammensetzt.

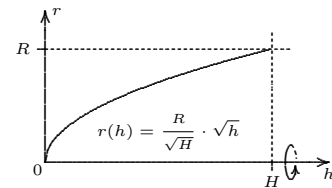


Abb. 8

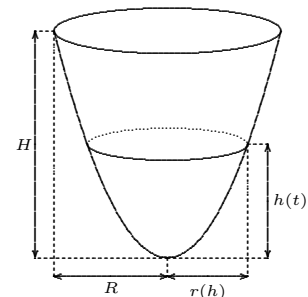


Abb. 9

Um auf die Füllhöhefunktion des Paraboloids zu kommen, setzt man zunächst die Profilkfunktion des Körpers in die DGL aus Kapitel 2.4 ein:

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{Z}{\pi} \cdot \left( \frac{R}{\sqrt{H}} \cdot \sqrt{h(t)} \right)^{-2} \\ &= \frac{ZH}{\pi R^2} \cdot (h(t))^{-1} \end{aligned}$$

Wie zu erkennen ist, ist die DGL für  $h(t) = 0$  nicht definiert. Um nun auf die gesuchte Füllhöhefunktion  $h(t)$  zu kommen, muss die Stammfunktion von  $h'(t)$  gebildet werden. Dies ist in diesem Fall aber nicht ohne weiteres möglich, da durch einfaches Integrieren die Stammfunktion  $h(t)$  selbst auf der rechten Seite der Gleichung integriert werden muss. Um dieses Problem zu umgehen, wendet man das Prinzip der Variablentrennung an, um die DGL zu integrieren. Man fasst  $h'(t)$  und  $h(t)$  als zusammengehörig auf und bringt beide Ausdrücke auf eine Seite der Gleichung, wobei weiterhin die Bedingung  $h(t) \neq 0$  gilt:

$$h'(t) \cdot h(t) = \frac{ZH}{\pi R^2}$$

Jetzt können für beide Seiten der Gleichung die Stammfunktionen gebildet werden.

$$\int h'(t) \cdot h(t) dt = \int \frac{ZH}{\pi R^2} dt$$

Für die linke Seite ergibt sich als Stammfunktion  $\frac{1}{2}(h(t))^2$ , weil dieser Term nach der Kettenregel abgeleitet wieder  $h'(t) \cdot h(t)$  ist.

Die Menge aller Stammfunktionen für die rechte Seite der Gleichung werden durch die Integrationskonstante  $C$  ausgedrückt, die jeden beliebigen reellen Wert annehmen kann.<sup>2</sup> Nach Bilden der Stammfunktionen erhält man folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(h(t))^2 &= \frac{ZH}{\pi R^2} \cdot t + C \\ \implies h(t) &= \sqrt{\frac{2ZH}{\pi R^2} \cdot t + 2C} \end{aligned}$$

Für  $C$  ergibt sich ein Wert von 0, weil die Anfangsbedingung des betrachteten Füllvorgangs  $h(0) = 0$  ist. Die endgültige **Füllhöhefunktion** für das **Paraboloid** ist daher:

$$h(t) = \sqrt{\frac{2ZH}{\pi R^2} \cdot t} \quad [0, T]$$

Die **Füllzeitfunktion des Paraboloids** ergibt sich wieder aus dem Zusammenhang  $t(h) = h^{-1}(t)$ :

$$t(h) = \frac{\pi R^2}{2ZH} \cdot h^2 \quad [0, H]$$

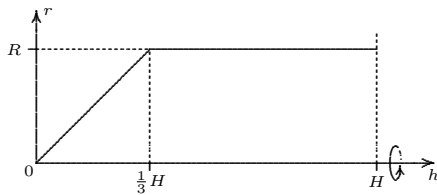
Die Definitionsbereiche der Füllfunktionen ergeben sich aus den Randbedingungen des Füllvorgangs (**Kapitel 2.1**).

<sup>2</sup><http://wanda.fh-aargau.ch/i/ia01lehm/analysis/Integralrechnung.pdf>

## 2.6 Der Füllvorgang bei einem Silo

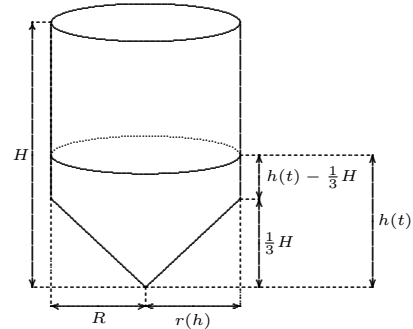
Der Füllvorgang eines Silos ist interessant, weil der Funktionsgraph der Profilfunktion an der Stelle  $h = \frac{1}{3}H$  einen Knick hat (**Abb. 10**). Sie ist an dieser Stelle nicht differenzierbar. Was für Auswirkungen hat dieser Knick auf die Füllhöhefunktion?

Das Silo hat eine Höhe  $H$  und einen Querschnittsflächenradius  $R$  an dieser Stelle. Es hat einen geraden zylinderförmigen Körper, der im unteren Teil spitz zuläuft. Der Rotationskörper hat deshalb im unteren Drittel der Gesamthöhe einen kegelförmigen Teil. Für die Profilfunktion müssen daher für die Variable  $h$  Fallunterscheidungen<sup>3</sup> getroffen werden.



$$r(h) = \begin{cases} \frac{3R}{H} \cdot h & [0, \frac{1}{3}H] \\ R & (\frac{1}{3}H, H] \end{cases}$$

**Abb. 10**



**Abb. 11**

Auf dem abgeschlossenen Intervall  $[0, \frac{1}{3}H]$  ist die Profilfunktion linear (die Steigung ergibt sich aus **Abb. 10**). Im halboffenen Intervall  $(\frac{1}{3}H, H]$  ist sie konstant.

Die Fallunterscheidungen für die Variable  $h$  bei der Profilfunktion erzwingen auch eine Fallunterscheidung für die entsprechenden Variablen bei den Füllfunktionen, weil sich für das Kegel- und das Zylinderstück des Silos unterschiedliche Terme zur Berechnung der Füllzeit bzw. der Füllhöhe ergeben.

Es ist sinnvoll, zunächst die Füllzeitfunktion des Silos zu ermitteln, da zur Zeit nur die Fallunterscheidungen für die betrachtete Höhe  $h$  des Körpers vorliegen (diese ergeben sich aus der Profilfunktion). Für die Füllhöhefunktion ergeben sich auch bestimmte Intervalle für  $t$ , in denen unterschiedliche Terme zur Berechnung der Füllhöhe gelten.

Um die Herleitung zu vereinfachen, teilen wir die zwei Abschnitte des Silos in ein Kegel- und ein Zylinderstück auf (siehe **Abb. 10** und **11**) und berechnen zunächst die Füllzeitfunktion für das Kegelstück des Silos:  $t'_k(h)$ . Dazu wird der im Intervall  $[0, \frac{1}{3}H]$  gültige Term der Profilfunktion in die DGL zur Berechnung der Füllzeitfunktion eines Rotationskörpers (**Kapitel 2.4**) eingesetzt:

$$\begin{aligned} t'_k(h) &= \frac{\pi}{Z} \cdot \left( \frac{3R}{H} \cdot h \right)^2 \\ &= \frac{9\pi R^2}{ZH^2} \cdot h^2 \end{aligned}$$

Durch Integrieren dieser DGL erhält man die Füllzeitfunktion für das Kegelstück des Silos, welche die Anfangsbedingung  $t(0) = 0$  erfüllt:

$$t_k(h) = \frac{3\pi R^2}{ZH^2} \cdot h^3 \quad \left[0, \frac{1}{3}H\right]$$

<sup>3</sup><http://www.mathe-online.at/mathint/fun1/i.html>

Sie gibt uns die Zeit an, die verstreichen muss, damit der Wasserspiegel eine Höhe  $h$  erreicht. Sie ist nur für Wasserspiegelhöhen im Bereich des Kegelstücks definiert, was sich aus dem Definitionsbereich des eingesetzten Terms für die Profildfunktion ergibt.

Für Wasserspiegelhöhen oberhalb der Höhe  $\frac{1}{3}H$ , also dem Zylinderstück des Silos, gilt eine anderer Funktion  $t_z(h)$  zur Berechnung der Füllzeit. Sie lässt sich aus der allgemeinen Füllzeitfunktion eines Zylinders aus Kapitel 2.2 herleiten, da oberhalb der besagten Höhe das Silo zylinderförmig ist.

$$t_{Zylinder}(h) = \frac{\pi R^2}{Z} \cdot h_{zyl} \quad [0, H]$$

Die Variable  $h_{zyl}$  ist der Abstand der Wasserspiegelhöhe zum Zylinderboden. Allgemein steht die Variable  $h$  in Füllzeitfunktionen für den Abstand zwischen Wasserspiegelhöhe und Körperboden. Weil das Zylinderstück des Silos erst in einer Höhe von  $h = \frac{1}{3}H$  beginnt, muss von der eingesetzten Wasserspiegelhöhe  $h$  der Wert  $\frac{1}{3}H$  subtrahiert werden, um auf den Abstand  $h_{zyl}$  zwischen der Wasserspiegelhöhe und dem Boden des Zylinderstücks zu kommen (**Abb. 11**). Daher gilt die Beziehung  $h_{zyl} = h - \frac{1}{3}H$ , was in die obige Funktion einzusetzen ist.

Dem Füllvorgang des Zylinderstücks geht der Füllvorgang des Kegelstücks voraus. Demzufolge muss  $t_{Zylinder}(h)$  noch der Term  $t_k(\frac{1}{3}H)$  addiert werden, um auf die Füllzeitfunktion des Zylinderstücks des Silos zu kommen. Für Wasserspiegelhöhen im Silo größer als  $\frac{1}{3}H$  gilt daher:

$$t_z(h) = \frac{\pi R^2}{Z} \cdot (h - \frac{1}{3}H) + t_k(\frac{1}{3}H) \quad (\frac{1}{3}H, H)$$

Für die **Füllzeitfunktion des Silos** ergibt sich letztendlich nach Einsetzen von  $t_k(\frac{1}{3}H)$  und Zusammenführen von  $t_z(h)$  und  $t_k(h)$  Folgendes:

$$t_{Silo}(h) = \begin{cases} \frac{3\pi R^2}{ZH^2} \cdot h^3 & [0, \frac{1}{3}H] \\ \frac{\pi R^2}{Z} \cdot (h - \frac{2}{9}H) & (\frac{1}{3}H, H] \end{cases}$$

Für die **Füllhöhefunktion des Silos** gilt die Beziehung  $t_{Silo}^{-1}(h) = h_{Silo}(t)$ . Sie entspricht der Umkehrfunktion der Füllzeitfunktion:

$$h_{Silo}(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{ZH^2}{3\pi R^2} \cdot t} & [0, t(\frac{1}{3}H)] \\ \frac{Z}{\pi R^2} \cdot t + \frac{2}{9}H & (t(\frac{1}{3}H), T] \end{cases}$$

Der Definitionsbereich der Füllhöhefunktion ergibt sich aus dem Wertebereich der Füllzeitfunktion.

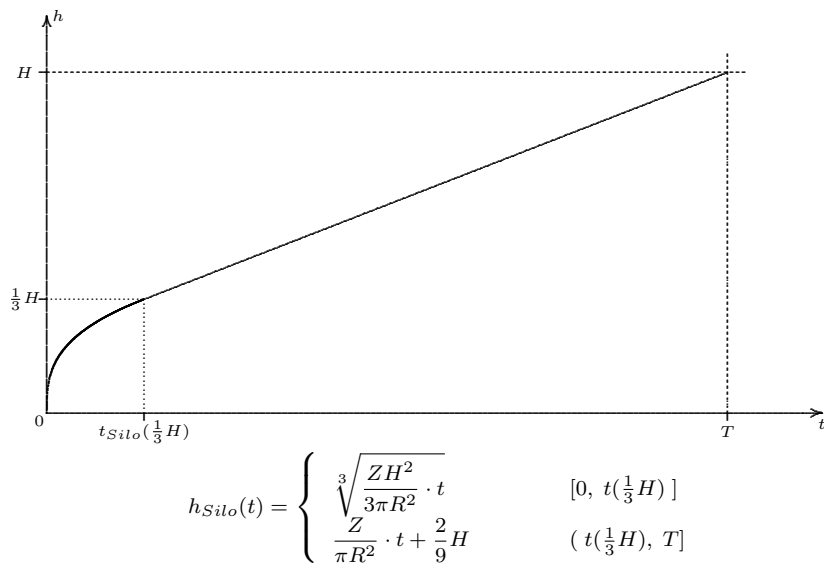
Durch Einsetzen von  $\frac{1}{3}H$  in die Füllzeitfunktion ergibt sich der genaue Zeitpunkt  $t$ , an dem das Wasser an der Knickstelle der Profilkfunktion, bzw. dem abrupten Übergang vom Kegelstück zum Zylinderstück, angelangt ist. Dies ist die Nahtstelle  $t_N$  zwischen den beiden Teilbereichen, auf denen  $h(t)$  definiert ist.

$$t_N = t\left(\frac{1}{3}H\right) = \frac{\pi R^2 H}{9Z}$$

Interessant ist das Verhalten der Füllhöhefunktion an dieser Stelle.

Betrachtet man den Graphen von  $h(t)$  (**Abb. 12**) im Punkt  $P\left(t\left(\frac{1}{3}H\right), \frac{1}{3}H\right)$ , scheint der Graph des Funktionsterms der Füllhöhefunktion für das halboffene Intervall  $\left(t\left(\frac{1}{3}H\right), T\right]$  den Graphen des Funktionsterms für den geschlossenen Intervall  $\left[0, t\left(\frac{1}{3}H\right)\right]$  tangential zu verlängern.

Die Füllhöhefunktion muss daher an jeder Stelle  $t$  differenzierbar sein.



**Abb. 12**

Weil die Füllhöhefunktion abschnittsweise definiert ist, muss die Differenzierbarkeit an der Nahtstelle  $t_N$  geprüft werden. Wenn der Grenzwert von  $h'(t)$  links der Nahtstelle  $t_N$  dem Grenzwert von  $h'(t)$  rechts der Nahtstelle entspricht, ist die Füllhöhefunktion an der besagten Stelle differenzierbar.

Unterscheiden sich die Grenzwerte, ist die Funktion an dieser Stelle nicht differenzierbar, weil keine eindeutige Steigung vorliegt. Die Steigung der Tangente würde sich in diesem Punkt sprunghaft ändern.<sup>4</sup>

Zunächst muss die Ableitung der Füllhöhefunktion gebildet werden, um mit ihr die Steigung zu berechnen:

$$h'_{Silo}(t) = \begin{cases} \frac{ZH^2}{9\pi R^2} \cdot \left(\frac{ZH^2}{3\pi R^2} \cdot t\right)^{-\frac{2}{3}} & (0, t(\frac{1}{3}H)] \\ \frac{Z}{\pi R^2} & (t(\frac{1}{3}H), T] \end{cases}$$

<sup>4</sup><http://www.strobl-f.de/grund117.pdf>



Wie zu erkennen ist, ist die Steigung der Füllhöfefunktion im Intervall  $(t(\frac{1}{3}H), T]$  konstant.

Betrachten wir nun die Grenzwerte der Steigung von  $h(t)$  links der Nahtstelle (mit  $t_N - 0$ ) und rechts der Nahtstelle (mit  $t_N + 0$ ):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_N - 0} h'(t) &= \lim_{t \rightarrow t_N - 0} \frac{ZH^2}{9\pi R^2} \cdot \left(\frac{ZH^2}{3\pi R^2} \cdot t\right)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{Z}{\pi R^2} \\ \lim_{t \rightarrow t_N + 0} h'(t) &= \frac{Z}{\pi R^2} \end{aligned}$$

Der Grenzwert der Steigung links der Nahtstelle  $t_N$  entspricht der Steigung rechts der Nahtstelle. Die Füllhöfefunktion ist daher an dieser und jeder anderen Stelle  $t$  mit Ausnahme für  $t = 0$  differenzierbar (Dies ist die Begründung für die im Vorfeld definierten Intervalle für  $h'(t)$ ).

Die Vermutung der tangentialen Verlängerung ist ebenfalls bestätigt, da die Steigung von  $h(t)$  rechts der Nahtstelle der Steigung von  $h(t)$  in der Nahtstelle entspricht.

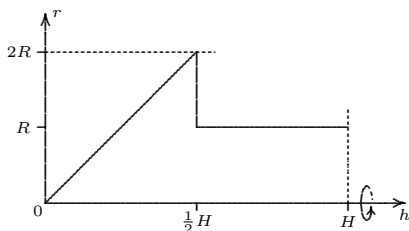
Beim Betrachten der Profilkfunktion lässt sich diese Beobachtung wieder durch den Ansatz aus **Kapitel 2.4** erklären. Die Geschwindigkeit mit der das Wasser an einer Stelle  $h(t)$  im Körper steigt, hängt vom Querschnittsflächenradius  $r(h(t))$  ab, weil der Ansatz zur Berechnung von  $h'(t)$  auf einem Zylinder mit unendlich kleiner Höhe beruht, in dem das Wasser mit der selben Geschwindigkeit steigt, wie im Rotationskörper an der betrachteten Stelle. Der Querschnittsflächenradius bei  $r(\frac{1}{3}H)$  entspricht dem Querschnittsflächenradius für den Intervall  $(\frac{1}{3}H, H]$ .

## 2.7 Der Füllvorgang bei einem Körper mit unstetiger Profilkfunktion

Wie in den Kapiteln zuvor schon festgehalten wurde, ist die Steigung der Füllhöfefunktion abhängig von der Querschnittsfläche bzw. dem Querschnittsflächenradius der Profilkfunktion an der betrachteten Stelle  $t$  des Füllvorgangs.

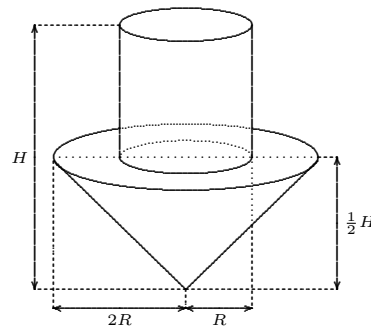
Bei einem Körper mit unstetiger Profilkfunktion, also einer sprunghaften Änderung des Querschnittsflächenradius an einer bestimmten Stelle  $h$ , muss sich die Steigung der Füllhöfefunktion nach der aufgestellten Theorie, die in Kapitel 2.4 bewiesen wurde, auch sprunghaft ändern.

Betrachten wir dazu den Körper in **Abb. 14** und seine Profilkfunktion  $r(h)$  in **Abb. 13**.



$$r(h) = \begin{cases} \frac{4R}{H} \cdot h & [0, \frac{1}{2}H] \\ R & (\frac{1}{2}H, H] \end{cases}$$

**Abb. 13**



**Abb. 14**

Die Profilkurve des Körpers ist an der Stelle  $h = \frac{1}{2}H$  unstetig. Die Funktion ist in diesem Punkt daher nicht differenzierbar.

Die Füllfunktionen für den Körper ergeben sich auf gleiche Weise wie schon beim Silo im Kapitel zuvor. Die Herleitung wird hier nicht nochmal aufgeführt.

Für die **Füllzeitfunktion dieses Körpers** ergibt sich daher:

$$t(h) = \begin{cases} \frac{16\pi R^2}{3ZH^2} \cdot h^3 & [0, \frac{1}{2}H] \\ \frac{\pi R^2}{Z} \cdot \left(h + \frac{1}{6}H\right) & (\frac{1}{2}H, H] \end{cases}$$

Die **Füllhöhefunktion dieses Körpers** lautet wie folgt:

$$h(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{3ZH^2}{16\pi R^2} \cdot t} & [0, t(\frac{1}{2}H)] \\ \frac{Z}{\pi R^2} \cdot t + \frac{2}{9}H & (t(\frac{1}{2}H), T] \end{cases}$$

Die Füllhöhefunktion ist abschnittsweise definiert und hat als Nahtstelle  $t_N$  zwischen den zwei Intervallen, für die sie durch unterschiedliche Terme definiert ist, die Stelle:

$$t_N = t(\frac{1}{2}H) = \frac{2\pi R^2 H}{3Z}$$

Zum Zeitpunkt  $t_N$  befindet sich der Wasserspiegel genau bei der Höhe  $\frac{1}{2}H$ , an der die Profilkurve unstetig ist.

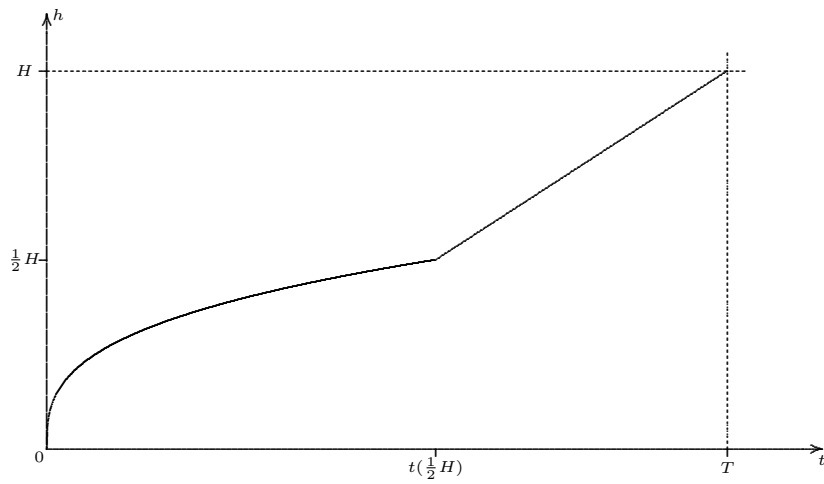
Um die Vermutung der sprunghaften Änderung der Steigung des Füllhöhegraphen an der Stelle  $t_N$  zu bestätigen, müssen wieder die Grenzwerte der Steigung links von  $t_N$  (mit  $t_N - 0$ ) und rechts von  $t_N$  (mit  $t_N + 0$ ) berechnet werden. Dazu muss zunächst die Ableitung der Füllhöhefunktion gebildet werden, welche die Steigung des Füllhöhegraphen an einer Stelle  $t$  angibt:

$$h'(t) = \begin{cases} \frac{ZH^2}{16\pi R^2} \cdot \left(\frac{3ZH^2}{16\pi R^2} \cdot t\right)^{-\frac{2}{3}} & (0, t(\frac{1}{3}H)) \\ \frac{Z}{\pi R^2} & (t(\frac{1}{3}H), T] \end{cases}$$

Überprüfen wir nun die Differenzierbarkeit mit dem bekannten Verfahren aus Kapitel 2.6:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_N - 0} h'(t) &= \lim_{t \rightarrow t_N - 0} \frac{ZH^2}{16\pi R^2} \cdot \left(\frac{3ZH^2}{16\pi R^2} \cdot t\right)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{Z}{4\pi R^2} \\ \lim_{t \rightarrow t_N + 0} h'(t) &= \frac{Z}{\pi R^2} \end{aligned}$$

Die Grenzwerte bei  $t_N$  sind unterschiedlich, was bedeutet, dass **die Füllhöhefunktion an der Nahtstelle  $t_N$  nicht differenzierbar ist**. Es kann keine eindeutige Steigung an dieser Stelle zugeordnet werden, da sich die Steigung der Tangente sprunghaft ändert.



$$h(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{3ZH^2}{16\pi R^2} \cdot t} & [0, t(\frac{1}{2}H)) \\ \frac{Z}{\pi R^2} \cdot t + \frac{2}{9}H & (t(\frac{1}{2}H), T] \end{cases}$$

**Abb. 15**

Der Graph der Füllhöhefunktion zeigt ebenfalls, dass die Funktion an der Stelle  $t(\frac{1}{2}H)$  nicht differenzierbar ist. Der Graph hat an dieser Stelle einen Knick.

### 3 Schlusswort

Es wurden für verschiedene Rotationskörper die Füllfunktionen entwickelt und auf ihre Eigenschaften hin untersucht. Mit der Methode aus Kapitel 2.4 kann man für jeden Rotationskörper, wenn man den Querschnittsflächenradius  $r$  an der Stelle  $h$  kennt, die Geschwindigkeit angeben, mit der das Wasser an dieser Stelle steigt.

Allgemein muss für alle Füllhöhefunktionen gelten, dass sie auf dem Intervall  $(0, T)$  monoton steigend sind, weil mit fortschreitender Zeit das Wasser im betrachteten Körper immer höher steigt. Es hört auf dem Intervall niemals auf zu steigen. Allgemein gilt deshalb, unabhängig von der Beschaffenheit des befüllten Körpers, für die Steigung der Füllhöhefunktion:

$$h'(t) > 0$$

Diese Feststellung ergibt sich ebenfalls aus der Definition für die Steigung des Füllhöhegraphen an einer Stelle  $t$ , weil der Quotient aus Zufluss  $Z$  und Querschnittsfläche  $Q(r(h(t)))$  immer positiv ist.

Das Thema der Facharbeit umfasst eine große Bandbreite an möglichen Körpern, deren Füllvorgänge untersucht werden könnten. Ich denke, ich habe sinnvolle Beispiele gewählt, um dem Leser dieser Facharbeit einen Einblick in das Thema zu verschaffen.

#### 3.1 Quellenangaben

Kopien vom Fachlehrer

Internetseiten, siehe Fußnoten

## A Rechenbeispiele

Um den praktischen Hintergrund des Facharbeitthemas zu verdeutlichen, werden in diesem Kapitel Beispielrechnungen zum Füllvorgang von Zylinder und Paraboloid angestellt.

### A.1 Zylinder

Ein Zylinder mit dem Grundflächenradius  $R = 8 \text{ cm}$  und der Höhe  $H = 30 \text{ cm}$  wird mit Wasser gefüllt. Nach  $45 \text{ s}$  ist der Zylinder bis zum Rand mit Wasser gefüllt.

Wie groß ist der Zufluss  $Z$  des Füllvorgangs?

$$\begin{aligned} \text{gegeben :} \quad R &= 8 \text{ cm} \\ H &= 30 \text{ cm} \\ T &= 45 \text{ s} \end{aligned}$$

$$\text{gesucht :} \quad Z$$

$$h_{\text{Zylinder}}(t) = \frac{Z}{\pi R^2} \cdot t$$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{H}{T} \cdot \pi R^2 \\ &= \frac{30\pi 8^2}{45} \cdot \frac{\text{cm} \cdot \text{cm}^2}{\text{s}} \end{aligned}$$

$$Z \approx 1,34 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

Der Zylinder wurde mit einem Zufluss  $Z = 1,34 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  gefüllt.

### A.2 Paraboloid

Ein überdimensionales Sektglas mit der Form eines Paraboloids und dem Öffnungsradius  $R = 3 \text{ m}$ , sowie der Körperhöhe  $H = 10 \text{ m}$ , wird für einen Werbespot mit Sekt gefüllt. Eine Pumpe füllt das Glas mit einem Zufluss  $Z$  von  $\frac{1}{2} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ . Der Regisseur möchte das Glas bis zur Höhe  $h = 8 \text{ m}$  mit Sekt gefüllt haben. Wieviel Zeit vergeht, bis das Glas bis zu dieser Höhe gefüllt ist?

$$\begin{aligned} \text{gegeben :} \quad R &= 3 \text{ m} \\ H &= 10 \text{ m} \\ Z &= \frac{1}{2} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \\ h &= 8 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\text{gesucht :} \quad t$$

$$t_{\text{Paraboloid}}(h) = \frac{\pi R^2}{2ZH} \cdot h^2$$

$$t(8) = \frac{\pi 3^2 \cdot 2}{2 \cdot 10} \cdot 8^2 \cdot \frac{\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{m}^2}{\text{m}^3 \cdot \text{m}}$$

$$t(8) \approx 180,96 \text{ s}$$

Nach einer Füllzeit  $t = 180,96 \text{ s}$  ist das Sektglas bis zur gewünschten Höhe  $h$  gefüllt.

B Versicherung über die selbstständige Anfertigung

...