Ohne GTR Baden-Württemberg 2015, geringfügig geändert

1. Bilden Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = (1 + e^{-2x})^3$.

2. Lösen Sie die Gleichung $(x^4 - 2x^2)(e^{-2x} - 2) = 0$.

3. Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat im Ursprung einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 2$ die Tangente mit der Gleichung $y = 4x - 12$. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

4. Gegeben sind die drei Punkte $A(4\,|\,0\,|\,4)$, $B(0\,|\,4\,|\,4)$, $C(6\,|\,6\,|\,2)$.
   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
   b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes, der das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm ergänzt. Veranschaulichen Sie durch eine Skizze, wie viele solcher Punkte es gibt.

5. Gegeben ist die Ebene E: $4x + 3z = 12$.
   a) Stellen Sie E in einem Koordinatensystem dar.
   b) Bestimmen Sie alle Punkte der x_3-Achse, die von E den Abstand 3 haben.

6. Ein Glücksrad hat drei farbige Sektoren, die beim einmaligen Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt werden:

   Rot: 20 % Grün: 30 % Blau: 50 %

   Das Glücksrad wird n-mal gedreht.
   Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Farbe Rot angezeigt wird.

   a) Begründen Sie, dass X binomialverteilt ist.
   Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	···
$P(X=k)$	0,01	0,06	0,14	0,21	0,22	0,17	0,11	0,05	···

   b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens dreimal Rot angezeigt wird.
   c) Entscheiden Sie, welcher der folgenden Werte von n der Tabelle zugrunde liegen kann: 20, 25 oder 30. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

7. Mit $V = \pi \cdot \int_0^4 \left(4 - \frac{1}{2}x\right)^2 dx$ wird der Rauminhalt eines Körpers berechnet.
   Beschreiben Sie den Körper und berechnen Sie das Integral.
   Ermitteln Sie den Rauminhalt des Körpers auch auf elementare Weise.

Ohne GTR, Ergebnisse

1. Bilden Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = (1 + e^{-2x})^3$.

   $f'(x) = 3(1 + e^{-2x})^2 \cdot e^{-2x} \cdot (-2)$

2. Lösen Sie die Gleichung $(x^4 - 2x^2)(e^{-2x} - 2) = 0$.

   $x_1 = 0,\ x_{2/3} = \pm\sqrt{2},\ x_4 = -\frac{1}{2}\ln 2$

3. Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat im Ursprung einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 2$ die Tangente mit der Gleichung $y = 4x - 12$. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

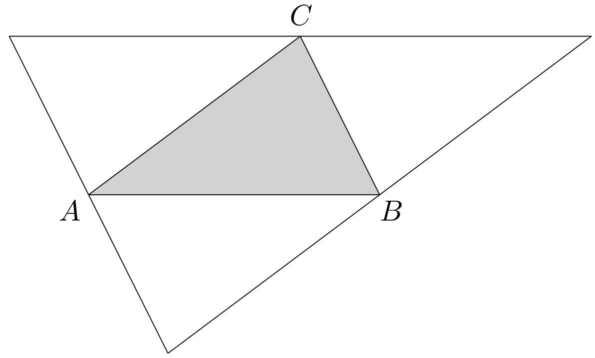
   $f(x) = 2x^3 - 5x^2$

4. Gegeben sind die drei Punkte $A(4\,|\,0\,|\,4)$, $B(0\,|\,4\,|\,4)$, $C(6\,|\,6\,|\,2)$.

   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

   $|\,\overrightarrow{AB}\,| = \sqrt{32},\ |\,\overrightarrow{AC}\,| = \sqrt{44},\ |\,\overrightarrow{BC}\,| = \sqrt{44}$

   b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes, der das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm ergänzt. Veranschaulichen Sie durch eine Skizze, wie viele solcher Punkte es gibt.

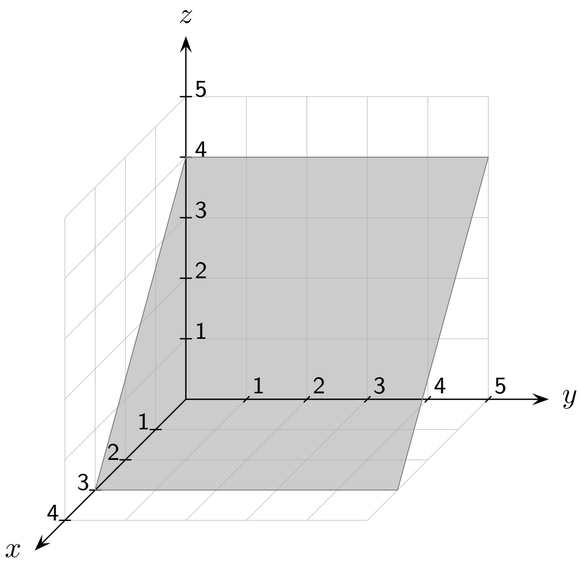


   Es gibt drei solcher Punkte.
   $D_1(10\,|\,2\,|\,2),\ D_2(2\,|\,10\,|\,2),\ D_3(-2\,|\,-2\,|\,6)$

5. Gegeben ist die Ebene E: $4x + 3z = 12$.

   a) Stellen Sie E in einem Koordinatensystem dar.

   $S_x(3\,|\,0\,|\,0),\ S_z(0\,|\,0\,|\,4)$
   Die Ebene ist parallel zur y-Achse.



b) Bestimmen Sie alle Punkte der x_3-Achse, die von E den Abstand 3 haben.

$P(0\,|\,0\,|\,a)$ in die HNF eingesetzt ergibt: $\left|\dfrac{3a-12}{5}\right| = 3$

$P_1(0\,|\,0\,|\,9),\ P_2(0\,|\,0\,|\,-1)$

6. Ein Glücksrad hat drei farbige Sektoren, die beim einmaligen Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt werden:

Rot: 20 % Grün: 30 % Blau: 50 %

Das Glücksrad wird n-mal gedreht.
Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Farbe Rot angezeigt wird.

a) Begründen Sie, dass X binomialverteilt ist.

Für jeden der n Versuche gibt es nur zwei Ergebnisse:
"Rot"(Treffer), "Nicht Rot"(kein Treffer), $p = 0{,}2$

Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$P(X=k)$	0,01	0,06	0,14	0,21	0,22	0,17	0,11	0,05	$\cdots$

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens dreimal Rot angezeigt wird.

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (0{,}01 + 0{,}06 + 0{,}14) = 0{,}79$

c) Entscheiden Sie, welcher der folgenden Werte von n der Tabelle zugrunde liegen kann: 20, 25 oder 30. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$n = 20,\ E(X) = 4$

$n = 25,\ E(X) = 5$

$n = 30,\ E(X) = 6$

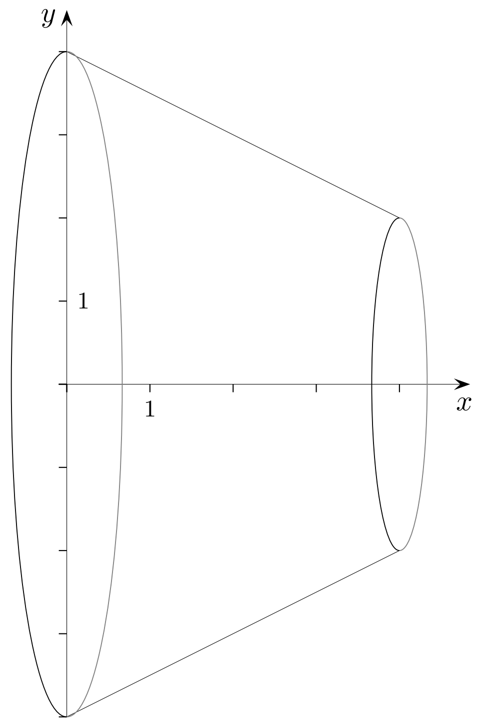
Daher kommt nur $n = 20$ in Frage.

7. Mit $V = \pi \cdot \int\limits_0^4 \left(4 - \frac{1}{2}x\right)^2 dx$ wird der Rauminhalt eines Körpers berechnet.

Beschreiben Sie den Körper und berechnen Sie das Integral. Kegelstumpf, $V = \frac{112}{3}\pi$

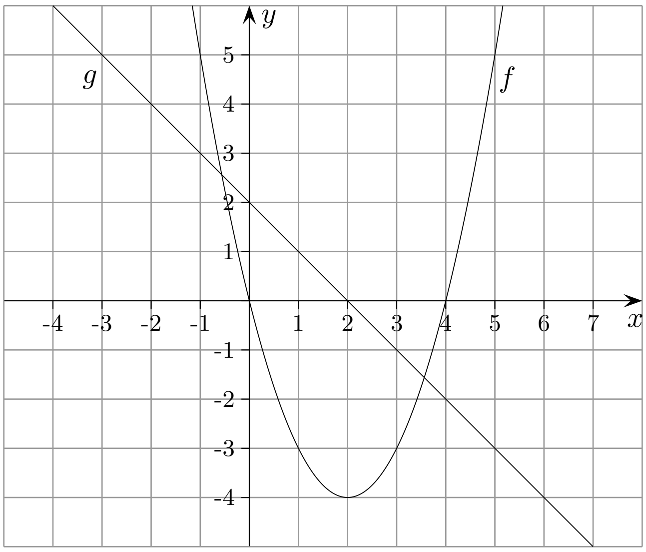
Ermitteln Sie den Rauminhalt des Körpers auch auf elementare Weise. $V = 117{,}286$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 8 - \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 4$$



1. Bilden Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{2x}$.

2. Lösen Sie die Gleichung $x^4 = 4 + 3x^2$.



3. Die Abbildung zeigt die Graphen zweier Funktionen f und g.
   a) Bestimmen Sie $f(g(3))$.
   Bestimmen Sie einen Wert für x so, dass $f(g(x)) = 0$ ist.
   b) Bestimmen Sie für die Funktion $h(x) = f(x) \cdot g(x)$,
   $h'(2)$, ohne die Funktionsterme zu ermitteln.

4. Gegeben sind die Punkte $A(1 \,|\, 10 \,|\, 1)$, $B(-3 \,|\, 13 \,|\, 1)$, $C(2 \,|\, 3 \,|\, 1)$.
   Die Gerade g verläuft durch A und B.
   Bestimmen Sie den Abstand des Punktes C von der Geraden g.

5. An einem Spielautomaten verliert man durchschnittlich zwei Drittel aller Spiele.
   a) Formulieren Sie ein Ereignis A, für das gilt:
   $$P(A) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$
   b) Jemand spielt vier Spiele an dem Automaten.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit verliert er dabei genau zwei Mal?

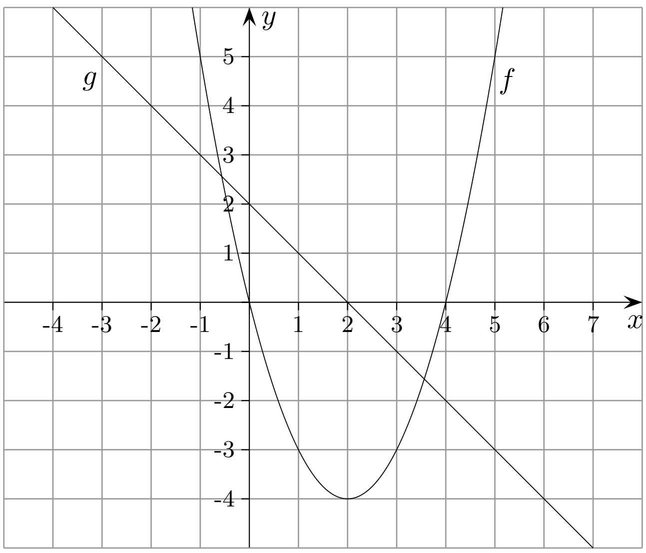
6. Gegeben sind der Mittelpunkt einer Kugel sowie eine Ebene.
   Die Kugel berührt diese Ebene.
   Beschreiben Sie, wie man den Kugelradius und den Berührpunkt bestimmen kann.

© Roolfs

Ohne GTR   Baden-Württemberg 2014, Auswahl

1. Bilden Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{2x}$. $f'(x) = e^{2x}\,(\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} + 2\cdot\sqrt{x})$

2. Lösen Sie die Gleichung $x^4 = 4 + 3x^2$. $x^2 = u,\; x_{1/2} = \pm 2 \quad (x^2 = -1)$



3. Die Abbildung zeigt die Graphen zweier Funktionen f und g.

   a) Bestimmen Sie $f(g(3))$. $f(g(3)) = 5$

   Bestimmen Sie einen Wert für x so, dass $f(g(x)) = 0$ ist.

   $x_1 = -2,\; x_2 = 2$

   Gehe von $f(x) = 0$ aus.

   $f(4) = 0,\; f(0) = 0$

   b) Bestimmen Sie für die Funktion $h(x) = f(x) \cdot g(x)$,

   $h'(2)$, ohne die Funktionsterme zu ermitteln.   Produktregel, $h'(2) = 4$

4. Gegeben sind die Punkte $A(1\,|\,10\,|\,1)$, $B(-3\,|\,13\,|\,1)$, $C(2\,|\,3\,|\,1)$.
   Die Gerade g verläuft durch A und B.
   Bestimmen Sie den Abstand des Punktes C von der Geraden g.

   Lotfußpunkt $F(5\,|\,7\,|\,1)$, $d = 5\,LE$

5. An einem Spielautomaten verliert man durchschnittlich zwei Drittel aller Spiele.

   a) Formulieren Sie ein Ereignis A, für das gilt:

   $$P(A) = \binom{10}{8} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + 10 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^9 \cdot \tfrac{1}{3} + \left(\tfrac{2}{3}\right)^{10}$$

   $P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) = P(X \geq 8)$

   A: Von 10 Spielen verliert man mindestens 8 Spiele.

   b) Jemand spielt vier Spiele an dem Automaten.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit verliert er dabei genau zwei Mal? $P(X=2) = \frac{8}{27}$

6. Gegeben sind der Mittelpunkt einer Kugel sowie eine Ebene.
   Die Kugel berührt diese Ebene.
   Beschreiben Sie, wie man den Kugelradius und den Berührpunkt bestimmen kann.

   Der Schnittpunkt der Geraden g, die senkrecht zur Ebene und durch den Mittelpunkt der Kugel verläuft, mit der Ebene ist der Berührpunkt. ...

Ohne GTR Baden-Württemberg 2013, Auswahl

1. Bilden Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = (2x^2 + 5)e^{-2x}$.

2. Lösen Sie die Gleichung $2e^x - \frac{4}{e^x} = 0$.

3. Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

   (1) $f(2) = 1$
   (2) $f'(2) = 0$
   (3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$
   (4) Für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to 5$

   Beschreiben Sie für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von f hat. Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen.

4. Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(1 \mid -1 \mid 3)$ und $B(2 \mid -3 \mid 0)$.
   Die Ebene E wird von g orthogonal geschnitten und enthält den Punkt $C(4 \mid 3 \mid -8)$.
   Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E.
   Untersuchen Sie, ob S zwischen A und B liegt.

5. Neun Spielkarten (vier Asse, drei Könige und zwei Damen) liegen verdeckt auf dem Tisch.

   a) Peter dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt liegen.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
   A: Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch.
   B: Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch.

   b) Die neun Spielkarten werden gemischt und erneut verdeckt ausgelegt. Laura dreht nun so lange Karten um und lässt sie aufgedeckt auf dem Tisch liegen, bis ein Ass erscheint.
   Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der aufgedeckten Spielkarten an.
   Welche Werte kann X annehmen?
   Berechnen Sie $P(X \leq 2)$.

6. Gibt es eine ganzrationale Funktion vierten Grades, deren Graph drei Wendepunkte besitzt?
   Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Bilden Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = (2x^2 + 5)e^{-2x}$. $\quad f(x) = e^{-2x}(-4x^2 + 4x - 10)$

2. Lösen Sie die Gleichung $2e^x - \frac{4}{e^x} = 0$. $\quad x = \frac{1}{2}\ln(2)$

3. Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

   (1) $f(2) = 1$
   (2) $f'(2) = 0$
   (3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$
   (4) Für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to 5$

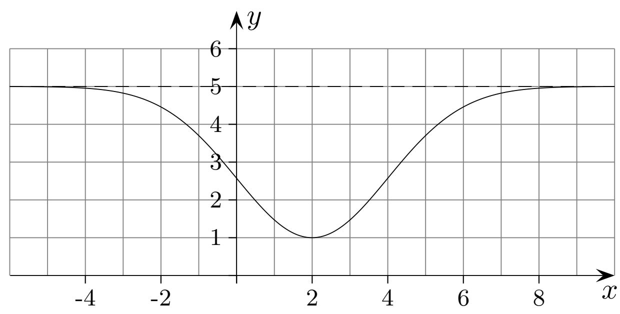
   Beschreiben Sie für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von f hat. Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen.

   (1) $P(2 \mid 1)$ liegt auf dem Graphen von f.

   (2) An der Stelle $x = 2$ (also im Punkt P) hat der Graph von f eine waagrechte Tangente. P ist also ein Hochpunkt oder Tiefpunkt oder Sattelpunkt.

   (3) $x = 4$ ist eine Wendestelle.

   (4) Der Graph von f besitzt die waagrechte Asymptote $y = 5$.



4. Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(1 \mid -1 \mid 3)$ und $B(2 \mid -3 \mid 0)$.
   Die Ebene E wird von g orthogonal geschnitten und enthält den Punkt $C(4 \mid 3 \mid -8)$.
   Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E. $\quad S(3 \mid -5 \mid -3)$
   Untersuchen Sie, ob S zwischen A und B liegt.

   $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB}$
   S liegt daher nicht zwischen A und B.

5. Neun Spielkarten (vier Asse, drei Könige und zwei Damen) liegen verdeckt auf dem Tisch.

   a) Peter dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt liegen.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

   A: Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch. $\frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 8} = \frac{5}{18}$

   B: Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch. $\frac{4 \cdot 2}{\binom{9}{2}} = \frac{2}{9}$

   b) Die neun Spielkarten werden gemischt und erneut verdeckt ausgelegt. Laura dreht nun so lange Karten um und lässt sie aufgedeckt auf dem Tisch liegen, bis ein Ass erscheint.
   Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der aufgedeckten Spielkarten an.
   Welche Werte kann X annehmen? 1 bis 6
   Berechnen Sie $P(X \leq 2)$. $P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{13}{8}$

6. Gibt es eine ganzrationale Funktion vierten Grades, deren Graph drei Wendepunkte besitzt?
   Begründen Sie Ihre Antwort.

   Die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt $f''(x) = 0$
   ergibt für eine ganzrationale Funktion vierten Grades
   eine quadratische Gleichung, die maximal zwei Lösungen besitzt.
   Somit kann eine ganzrationale Funktion vierten Grades höchstens zwei Wendepunkte besitzen.

   alternativ:
   Für eine ganzrationale Funktion, deren Graph drei Wendepunkte besitzt,
   müsste $f''(x)$ mindestens 3 Linearfaktoren besitzen, also mindestens vom Grad 3 sein.
   $f'(x)$ wäre mindestens vom Grad 4,
   $f(x)$ mindestens vom Grad 5.

Ohne GTR

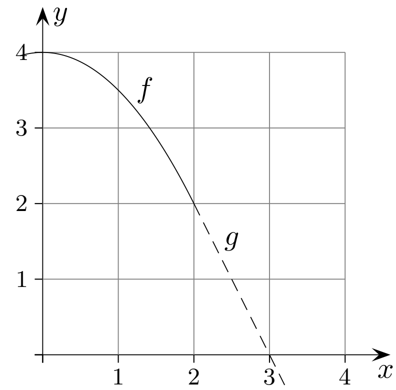
1. Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = x^3 - kx$, $k > 0$.
   a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{\frac{k}{3}}$ die x-Koordinate des Tiefpunktes ist.

   b) Bestimmen Sie k so, dass die x-Koordinaten der beiden Extrema den Abstand 2 voneinander haben.

2. Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = -x^2 + kx$, $k > 0$ und die Funktion g mit $g(x) = x^2$.
   a) Zeigen Sie, dass die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f_k und g die Werte 0 und $\frac{k}{2}$ haben.

   b) Für jedes k schließt der Graph von f_k mit dem Graphen von g eine Fläche ein. Ermitteln Sie den Wert für k, sodass die eingeschlossene Fläche den Inhalt $\frac{1}{3}\,FE$ hat.

3. Für $x \leq 2$ ist eine Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ und für $x \geq 2$ eine lineare Funktion g gegeben.
   In der nebenstehenden Abbildung sind die Graphen der beiden Funktionen dargestellt.
   Es gilt $f(2) = g(2)$ und $g(3) = 0$.



   a) Zeigen Sie, dass der Graph von f knickfrei an den Graphen von g anschließt.

   b) Begründen Sie allgemein, dass der Übergang zwischen dem Graphen einer linearen Funktion und dem Graphen einer quadratischen Funktion nie krümmungsruckfrei sein kann.

4. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist ein Punkt $P_a(1\,|\,a\,|\,-4)$ gegeben.
   a) Bestimmen Sie alle Werte von a so, dass die Punkte P_a vom Ursprung den Abstand 9 haben.

   b) Die Gerade g enthält alle Punkte, die durch P_a beschrieben werden. Geben Sie für g eine Gleichung an.

5. Eine Urne enthält 3 rote und 7 weiße Kugeln. Zusätzlich gibt es noch eine rote und eine weiße Ersatzkugel außerhalb der Urne. Eine Kugel aus der Urne wird zufällig gezogen. Danach wird eine Ersatzkugel der anderen Farbe in die Urne hineingelegt. Nun wird aus der Urne wieder eine Kugel zufällig gezogen.
   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die letzte gezogene Kugel rot ist.

   b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden gezogenen Kugeln weiß sind, wenn bekannt ist, dass beide Kugeln die gleiche Farbe haben.

Ohne GTR

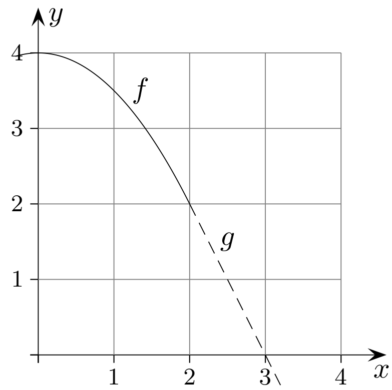
1. Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = x^3 - kx$, $k > 0$.
   a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{\frac{k}{3}}$ die x-Koordinate des Tiefpunktes ist. $f''(x) = 6x$, $f''(x_T) = 6\sqrt{\frac{k}{3}} > 0$

   b) Bestimmen Sie k so, dass die x-Koordinaten der beiden Extrema den Abstand 2 voneinander haben. $2\sqrt{\frac{k}{3}} = 2$, $k = 3$

2. Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = -x^2 + kx$, $k > 0$ und die Funktion g mit $g(x) = x^2$.
   a) Zeigen Sie, dass die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f_k und g die Werte 0 und $\frac{k}{2}$ haben.

   b) Für jedes k schließt der Graph von f_k mit dem Graphen von g eine Fläche ein. Ermitteln Sie den Wert für k, sodass die eingeschlossene Fläche den Inhalt $\frac{1}{3}$ FE hat. $\frac{1}{24}k^3 = \frac{1}{3}$, $k = 2$

3. Für $x \leq 2$ ist eine Funktion f mit $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4$ und für $x \geq 2$ eine lineare Funktion g gegeben.
   In der nebenstehenden Abbildung sind die Graphen der beiden Funktionen dargestellt.
   Es gilt $f(2) = g(2)$ und $g(3) = 0$.



   a) Zeigen Sie, dass der Graph von f knickfrei an den Graphen von g anschließt. $f'(2) = g'(2) = -2$

   b) Begründen Sie allgemein, dass der Übergang zwischen dem Graphen einer linearen Funktion und dem Graphen einer quadratischen Funktion nie krümmungsruckfrei sein kann.
   $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f''(x) = 2a$, $a \neq 0$, $g(x) = mx + d$, $g''(x) = 0$

4. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist ein Punkt $P_a(1 \mid a \mid -4)$ gegeben.
   a) Bestimmen Sie alle Werte von a so, dass die Punkte P_a vom Ursprung den Abstand 9 haben. $a_{1/2} = \pm 8$

   b) Die Gerade g enthält alle Punkte, die durch P_a beschrieben werden. Geben Sie für g eine Gleichung an.

5. Eine Urne enthält 3 rote und 7 weiße Kugeln. Zusätzlich gibt es noch eine rote und eine weiße Ersatzkugel außerhalb der Urne. Eine Kugel aus der Urne wird zufällig gezogen. Danach wird eine Ersatzkugel der anderen Farbe in die Urne hineingelegt. Nun wird aus der Urne wieder eine Kugel zufällig gezogen.
   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die letzte gezogene Kugel rot ist. $P = 0{,}34$

   b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden gezogenen Kugeln weiß sind, wenn bekannt ist, dass beide Kugeln die gleiche Farbe haben. $P = \frac{42}{48} = \frac{7}{8}$