Mündliche Prüfung zum Abitur in Mathematik
Mathematik – Klassenstufe 12

Die Materialien wurden von den Thüringer Fachberatern Mathematik (Gymnasium) entsprechend der gültigen Gesetze und Verordnungen erstellt, in Fortbildungen vorgestellt und diskutiert. Sie dienen als Orientierung für eine mündliche Prüfung in Mathematik. Diese Aufgaben sollen dazu anregen, in den Fachkonferenzen gemeinsam Aufgabensammlungen für die mündlichen Prüfungen im Abitur zu erstellen.

1. Einführung

Ablauf	Vorbereitung: 20 Minuten (Verlängerung bis auf 40 Minuten, falls die Aufgabenstellung dies erfordert)
	mündliche Prüfung: 20 Minuten (höchstens 30 Minuten)
	1. Teil: Präsentation der vorbereiteten mathematischen Sachverhalte in einem zusammenhängenden Vortrag (ca. 10 Minuten, mindestens ein Drittel der gesamten Prüfungszeit)
	2. Teil: Prüfungsgespräch (ca. 10 Minuten) ggf. Rückfragen zum Vortrag weitere Fragen zu größeren fachlichen Zusammenhängen
Geeignete Aufgaben	Besonders geeignet sind Aufgabenstellungen, die sich auf die Erläuterung eines Lösungswegs beziehen, ohne dass die zugehörigen Rechnungen im Einzelnen auszuführen sind und solche, bei denen Ergebnisse, Skizzen, Lösungswege usw. vorgegeben werden, an denen wesentliche Gedankengänge zu erläutern sind.
Grundsätzlich gilt:	- Aufgaben aus mindestens zwei Schulhalbjahren der Qualifikationsphase - nur ganze Bewertungseinheiten vergeben - Wiederholungs- und Folgefehler bei der Bewertung angemessen berücksichtigen - Aufgaben so stellen, dass Leistungen in den Anforderungsbereichen I, II und III erforderlich (AB II und III stärker akzentuieren) - Operatoren verwenden Entsprechend der Aufgabenstellung werden in die Bewertung die nachfolgenden Kriterien angemessen einbezogen: • fachliche Richtigkeit und Vollständigkeit in Bezug auf die Aufgabenstellung • sachgemäße Anwendung der geforderten Methoden (Beachtung des Operators, Medieneinsatz, Visualisierung) • logische Struktur und Nachvollziehbarkeit der Darstellung • sprachliche Richtigkeit und korrekte Verwendung der Fachsprache • sachgerechte und kritische Nutzung von Materialien • Begrenzung der Darstellung auf das Erforderliche • situationsgerechtes Agieren und Reagieren • Kommunikationsfähigkeit Die Bewertung ist dem Prüfungsteilnehmer transparent zu machen.

Grundlagen:

- Thüringer Schulordnung (vom 20. Januar 1994 zuletzt geändert durch Verordnung vom 7. Juli 2011) **§59, §74**, §101
- Lehrplan für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife Mathematik (2013)
- Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012)

2. Deckblatt

((Name der Schule))

Mündliche Abiturprüfung

Schuljahr XX

<u>Mathematik eA</u>

Prüfender Fachlehrer:

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner
Computeralgebrasystem
Formelsammlung
Zeichengeräte

Vorbereitungszeit: 20 Minuten
Prüfungszeit: 20 Minuten

3. Beispielaufgaben zum Teil 1

3.1 Beispielaufgabe 1: Analysis – Differentialrechnung

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{3}{8}x^4 + 4x^3 - 15x^2 + 24x - 8$.

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf wesentliche Eigenschaften.

b) Schlussfolgern Sie aus dem Graphen von f und Ihren bisherigen Ergebnissen auf Eigenschaften der zugehörigen Ableitungsfunktion f '. Begründen Sie Ihre Aussagen.

c) Die Schnittpunkte von f mit der Gerade $y = -8$ und der Punkt $U(u|f(u))$ mit $0 < u < 5$ bilden ein Dreieck. Der Flächeninhalt des Dreiecks soll maximal werden.
Beschreiben Sie dafür einen Lösungsweg.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 1

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
a)	Untersuchen: Extrem- und Wendepunkte mit notwendigen und hinreichenden Bedingungen ($H(4\|8)$, $W_1\left(\frac{10}{3}\middle\|\frac{194}{27}\right)$, $W_2(2\|6)$, W_2 mit waagerechter Tangente), Achsenschnittpunkte, Symmetrie, Monotonie, Verhalten im Unendlichen	**AB I/II** K4/K5/K6	**10**
b)	Schlussfolgern und begründen: zwei Nullstellen, für $x \leq 4$ gilt $f'(x) \geq 0$, für $x \geq 4$ gilt $f'(x) \leq 0$	**AB II/III** K1/K4/K6	**6**
c)	Beschreiben: Sachverhalt veranschaulichen Zielfunktion aufstellen Zielfunktion auf Maximum untersuchen	**AB II** K3/K6	**4**
			20

3.2 Beispielaufgabe 2: Analysis - Integralrechnung

a) Definieren Sie die Begriffe Stammfunktion einer Funktion f und unbestimmtes Integral.

b) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + 2$.

Bestimmen Sie die Stammfunktion von f, die durch den Punkt $P\left(4 \middle| 8 - e^2\right)$ verläuft.

c) Gegeben ist der Graph einer Funktion g (siehe Abb.1).
Bestimmen Sie mit Hilfe des Graphen von g den Flächeninhalt, den der Graph der Ableitungsfunktion von g im Intervall $[0;2]$ mit der x-Achse begrenzt.

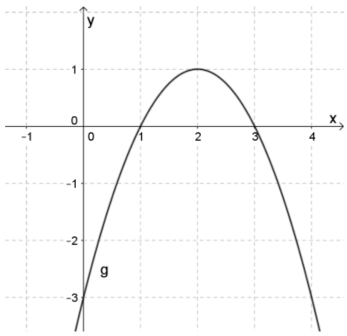


Abb. 1

d) Erläutern Sie für die Abbildungen 2 – 4 jeweils einen Lösungsplan zur Berechnung des Flächeninhalts der gekennzeichneten Fläche.

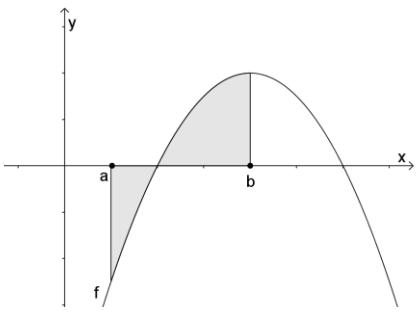


Abb.2

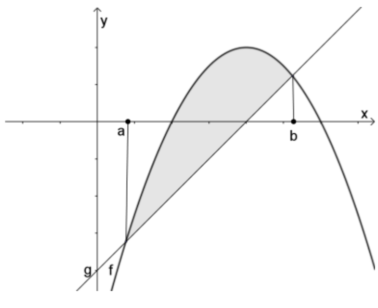


Abb. 3

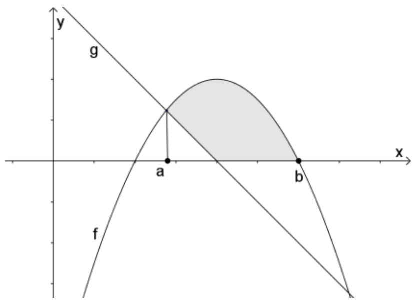


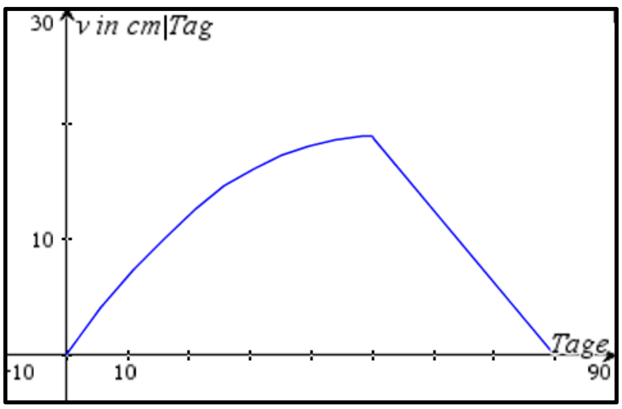
Abb. 4

e) Im abgebildeten Koordinatensystem ist für eine Pflanze die Wachstumsgeschwindigkeit v in $\frac{\text{cm}}{\text{Tag}}$ über einem Zeitraum von 80 Tagen dargestellt.

1. Beschreiben Sie dieses Wachstum innerhalb dieses Zeitraums.

2. Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem diese Pflanze am schnellsten wächst.

3. Erläutern Sie eine Möglichkeit, die Gesamthöhe dieser Pflanze nach 80 Tagen zu berechnen.
   Wie hoch ist diese Pflanze dann nach 90 Tagen?

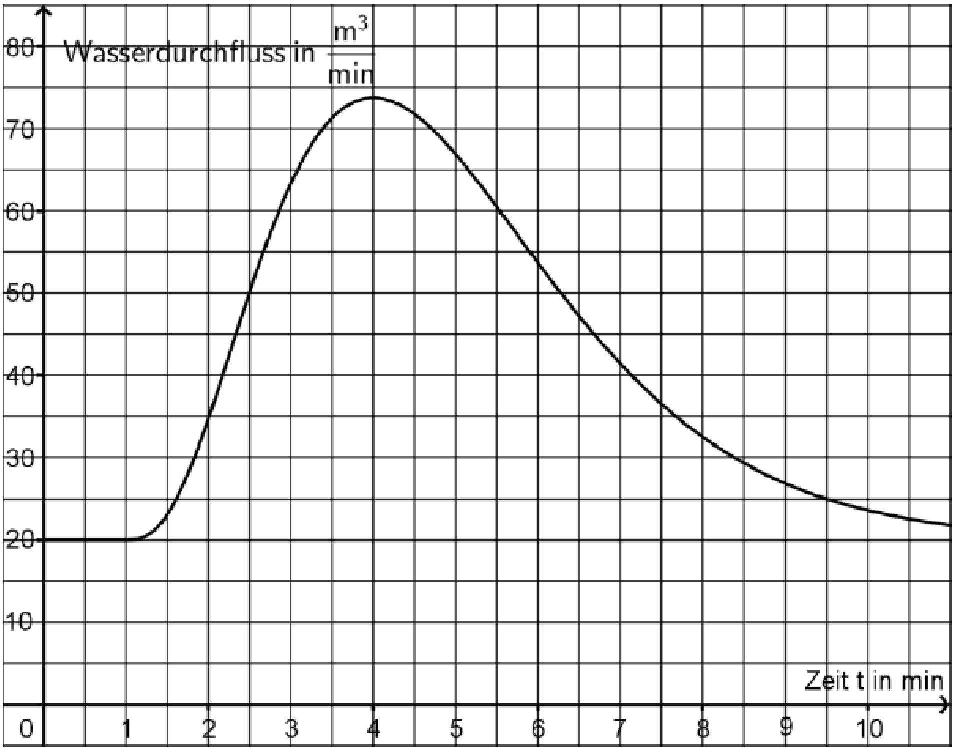


Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 2

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
a)	Definieren: Stammfunktion, unbestimmtes Integral,	**AB I** K6	**2**
b)	Bestimmen: $F(x)=2e^{\frac{1}{2}x}+2x-3e^2$	**AB I/II** K4/K5/K6	**3**
c)	Bestimmen: $A=\int_0^2 f'(x)dx=f(2)-f(0)=1-(-3)=4\,FE$	**AB II** K2/K5	**3**
d)	Erläutern: Abb. 2: Nullstelle für $x\in[a,b]$ berechnen, Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse für $x\in[a,b]$ mit Integral Abb. 3: Schnittstellen a und b berechnen, Integral von a bis b der Differenz von oberer und unterer Funktion Abb. 4: Zerlegung der Fläche angeben, Berechnen der einzelnen Flächenstücke, Summe der Flächeninhalte	**AB II/III** K4/K6	**6**
e)	Beschreiben: 1. Teil des Graphen, 2. Teil des Graphen Angeben: 50. Tag Erläutern: Fläche unter dem Funktionsgraphen interpretieren, Flächenberechnung, Höhe entspricht der Höhe nach 80 Tagen	**AB II/III** K3/K4/K6	**6**
			20

3.3 Beispielaufgabe 3: Analysis – Integralrechnung

Unter dem Wasserdurchfluss eines Bachs an einer bestimmten Stelle versteht man das Volumen des Wassers, das an dieser Stelle in einer bestimmten Zeit vorbeifließt. Die Funktion f beschreibt die zeitliche Entwicklung des Wasserdurchflusses eines Bachs an einer Messstelle, nachdem zum Zeitpunkt $t = 0$ eine bachaufwärts gelegene Schleuse geöffnet wurde. Dargestellt ist der Graph G_f von f.



In: http://www.isb.bayern.de/download/11986/abiturpruefung_mathematik_cas_2012.pdf

a) Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen G_f im Sachzusammenhang.

b) Erläutern Sie die Begriffe mittlere und lokale Änderungsrate unter Verwendung der Darstellung.

c) Deuten Sie den Ausdruck $\int_1^4 f(t)\,dt$.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 3

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
a)	Interpretieren: Ausgangszustand für ca. $t \leq 1$: konstanter Wasserdurchfluss Hochpunkt $(4 \mid 74)$: größter Wasserdurchfluss Wendestelle 1: $x \approx 2{,}3$; Zunahme des Wasserdurchflusses am größten Wendestelle 2: $x \approx 5{,}7$; Abnahme des Wasserdurchflusses am größten Vermutung für $t > 10$: Weitere Abnahme des Wasserdurchflusses und mögliche Annäherung an den Ausgangszustand	**AB I/II** K3/K4/K5/K6	**10**
b)	Erläutern: mittlere Änderungsrate: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ lokale Änderungsrate: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x \to x_0$ Beispiel: (in m^3) mittlere Änderungsrate für $2 \leq t \leq 4$ $\frac{f(4)-f(2)}{4-2} \approx \frac{74-35}{4-2} = 19{,}5$ mittlere Änderungsrate für $2 \leq t \leq 3$ $\frac{f(3)-f(2)}{3-2} \approx \frac{63-35}{3-2} = 28$ lokale Änderungsrate für $t \to 2$	**AB I/II** K3/K4/K5/K6	**6**
c)	Deuten: allgemein: Das bestimmte Integral entspricht der Fläche unter einer Kurve in einem Intervall. konkret: Der Wert des bestimmten Integrals entspricht dem Wasserdurchfluss in einem Zeitraum von einer Minute bis vier Minuten nach Öffnen der Schleuse.	**AB II/III** K4/K6	**4**
			20

3.4 Beispielaufgabe 4: Stochastik – Binomialverteilung und Alternativtest

1. Mit einem idealen Würfel wird 100-mal gewürfelt. Die Zufallsgröße X beschreibt in diesem Zufallsexperiment die Anzahl der geworfenen Augenzahl 6.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X.

b) Beim Durchführen des betrachteten Würfelexperiments werden die Ereignisse betrachtet, bei denen die Anzahl der Sechsen kleiner oder größer als der Erwartungswert von X ist. Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten für beide Ereignisse miteinander.

2. Eine Urne enthält 300 weiße und 100 schwarze Kugeln. Eine andere, gleich aussehende Urne enthält 100 weiße und 300 schwarze Kugeln. Den Inhalt der Urnen kann man nicht einsehen. Man nimmt eine Urne und will durch Ziehen von sieben Kugel mit Zurücklegen testen, ob es die mit den mehrheitlich schwarzen Kugeln ist.

   Beschreiben Sie einen geeigneten Test und geben Sie eine Entscheidungsregel an. Erläutern Sie die unvermeidbaren Fehler des Tests.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	**BE**
1 a)	Angeben: Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der Sechsen bei 100 Würfen $(n=100)$. $X=\{0;1;2;...;...;99;100\}$ Untersuchen: die Wahrscheinlichkeit eines Treffers ist konstant $p=\frac{1}{6}$. Es handelt sich also um eine Bernoulli-Kette und die Zufallsgröße X ist binomialverteilt. Für die Wahrscheinlichkeit gilt die Bernoulliformel: $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$	**AB I** K3/K5/K6	**5**
1 b)	Vergleichen: $E(X)=100\cdot\frac{1}{6}\approx 16,7$ $P(X\le 16)=\sum_{k=0}^{16}\binom{100}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}\approx 0,4942$ $P(X\ge 17)=\sum_{k=17}^{100}\binom{100}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}\approx 0,5058$ $P(X\le 16)<P(X\ge 17)$	**AB I/II** K3/K5/K6	**5**
2	Beschreiben: - Alternativtest für binomialverteilte Zufallsgröße	**AB I/II/III** K3/K5/K6	**10**

	geeignet - Treffer: schwarze Kugel wird gezogen, $n=7$ - Zufallsgröße X: Anzahl schwarzer Kugeln - H_0: Urne hat mehrheitlich schwarze Kugeln, also $p_0=\frac{3}{4}$ - H_1: Urne hat mehrheitlich weiße Kugeln, also $p_1=\frac{1}{4}$ - sinnvolle Wahl **einer** Entscheidungsregel: • erste akzeptable Entscheidungsregel: $k=2$, also Annahmebereich von H_0: $A=\{3;4;5;6;7\}$ Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A}=\{0;1;2\}$ • geeignetste Entscheidungsregel: $k=3$, also Annahmebereich von H_0: $A=\{4;5;6;7\}$ Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A}=\{0;1;2;3\}$ • zweite akzeptable Entscheidungsregel: $k=4$, also Annahmebereich von H_0: $A=\{5;6;7\}$ Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A}=\{0;1;2;3;4\}$ Erläutern: - Fehler 1. Art: Urne enthält mehr schwarze Kugeln, das Stichprobenergebnis liegt aber im Ablehnungsbereich von $H_{0,}$ also Ablehnung der Nullhypothese - Fehler 2. Art: Urne enthält mehr weiße Kugeln, das Stichprobenergebnis liegt aber im Annahmebereich von H_0 , also Annahme der Nullhypothese		
			20

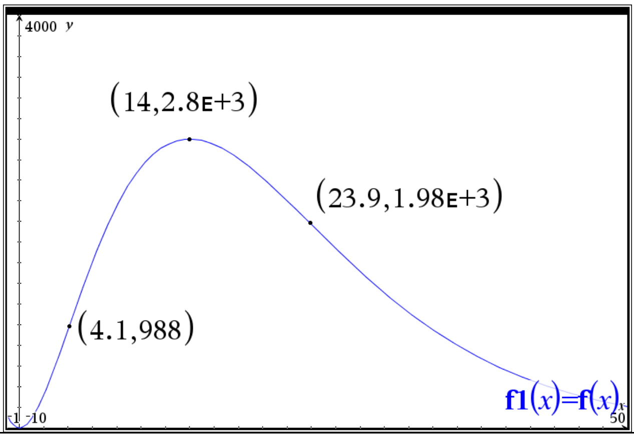
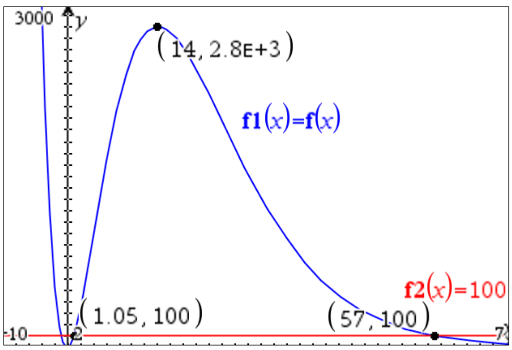
3.5 Beispielaufgabe 5: Analysis – Grippeepidemie im Eichsfeldkreis

Extrempunkte und Wendepunkte sind charakteristische Punkte des Graphen einer Funktion. Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise, um die Koordinaten dieser Punkte mit den Mitteln der Differentialrechnung zu berechnen.

Der Verlauf einer Grippeepidemie im Eichsfeldkreis wird durch die Funktion

$f(x) = \frac{100}{7} x^2 \cdot e^{2-\frac{1}{7}x}$ $(x \in \mathbb{R})$ beschrieben, wobei x die Anzahl der Tage nach Beginn der Epidemie und f(x) die Anzahl der Erkrankten zu diesem Zeitpunkt bezeichnet. Man geht davon aus, dass eine Grippeepidemie besteht, wenn es mehr als 100 Erkrankte im Eichsfeldkreis gibt. Sollten mehr als 1000 Personen erkranken, müssen in öffentlichen Einrichtungen besondere Bestimmungen eingehalten werden.
Interpretieren Sie den Funktionsgraphen hinsichtlich des Verlaufs der Grippeepidemie.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 5

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
	Erläutern: notwendige und hinreichende Bedingung	**AB I** K5/K6	
	Interpretieren:		
	Graph der Funktion in einem geeigneten Intervall 	**AB II** K4/K5/K6	
	Dauer der Epidemie wird mittels Definitionsbereich ermittelt: $x_1 = -0{,}91$ (entfällt) $x_2 = 1{,}05$; $x_3 = 56{,}98$  Lösungen deuten	**AB I/II** K1/K4/K6	**20**
	Ermitteln des Höhepunktes der Epidemie: $f''(x) = 0$	**ABII/AB III** K3/K6	

	$x_1 = 0$ entfällt; $x_2 = 14$ $f''(14) = -\frac{200}{7} < 0$ lokales Maximum $f(14) = 2800$ mathematische Kenntnisse auf Sachverhalt beziehen		
	Ermitteln: $f(x) = 1000$ $x_1 \approx -2{,}6$ entfällt; $x_2 \approx 4{,}1$; $x_3 \approx 33{,}4$ Zeitraum besonderer hygienischer Maßnahmen zwischen den 4. und 34. Tag	**ABII** K1/K4/K6	
	Die Anzahl der maximalen Neuerkrankungen könnte noch ermittelt werden: $f''(x) = 0$ $x_1 \approx 4{,}1$; $x_2 \approx 23{,}9$ $f'''(x) < 0$ maximaler Anstieg; $f'''(23{,}9) > 0$ minimaler Anstieg	**ABII/III** K4/K6	

4. Fragenkatalog zum Teil 2

Im Fragenkatalog wird davon ausgegangen, dass der 1. Teil einem Umfang von 20 BE entspricht und somit sollte auch der 2. Teil die gleiche Wertigkeit haben.

Im Anschluss an den 1. Teil (Vortrag) können ggf. zusätzliche Fragen zu diesem Teil gestellt werden.
Aus diesem Fragenkatalog sollen Fragen unter Beachtung der Anforderungsbereiche I, II und III ausgewählt werden, die insgesamt 20 BE entsprechen.

4.1 Vektorrechnung/Analytische Geometrie

Gegeben sind die Punkte $A(3|-5|7)$ und $B(2|-2|5)$ sowie die Punkte $P_z(1|1|z)$ mit $z \in R$. Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punktes P_z so, dass die Punkte A, B, P_z ein Dreieck bilden.

b) Beschreiben Sie einen Lösungsweg zur Berechnung der Höhe des Dreiecks auf die Seite $\overline{AB}$.

c) Gegeben sind die Geraden h und k durch

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in R) \text{ und } \qquad k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (s \in R).$$

Untersuchen Sie die Lagemöglichkeiten der Geraden h und k zueinander.
Bestimmen Sie den Wert für den Parameter a so, dass die Geraden senkrecht zueinander stehen.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.1

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
1.a)	Ermitteln: Geradengleichung, Gleichungssystem, r = 2 ermitteln, zwei Werte für z mit $z \neq 3$	**AB I** K2/K5	**5**
1.b)	Erläutern, z. B.: über Bestimmung des Lotfußpunktes auf die Gerade AB	**AB II** K5	**5**
1.c)	Untersuchen: für $a = 1$ identisch für $a \neq 1$ Schnittpunkt, da gleiche Stützvektoren Schnittpunkt der Geraden $S(4|-5|3)$ ablesen, Bestimmen: Skalarprodukt, für $a = -5$ Geraden senkrecht zueinander	**AB I/II** K1/K5	**10**

4.2 Vektorrechnung/Analytische Geometrie

Gegeben ist die Gleichung der Geraden g mit $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-7\\3\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}\quad(t\in R)$

a) Beschreiben Sie Ihr Vorgehen zur Ermittllung
   - der Durchstoßpunkte der Gerade g durch die Koordinatenebenen
   - der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

b) Berechnen Sie den Abstand des Durchstoßpunkts D_{yz} der Gerade g durch die yz-Ebene zum Koordinatenursprung.

c) Erläutern Sie eine Lösungsstrategie, um denjenigen Punkt der Gerade g, der den kürzesten Abstand vom Ursprung besitzt, zu bestimmen.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.2

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
a)	Beschreiben: $x=0\rightarrow D_{yz};\quad y=0\rightarrow D_{xz};\quad z=0\rightarrow D_{xy}$ $S_x(x\|0\|0);\ S_y(0\|y\|0);\ S_z(0\|0\|z)$	**AB I/II** K5/K6	**5**
b)	Berechnen: $D_{yz}\left(0\middle\|\frac{19}{4}\middle\|\frac{5}{4}\right)$ für $t=\frac{7}{4}$ Abstand D_{YX} vom Ursprung: $\frac{\sqrt{386}}{4}\approx 4{,}9\,LE$	**AB II** K5/K6	**5**
c)	Erläutern: Skizze $P\in g$, also $P(-7+4\cdot t\|3+t\|3-t)$ $\left\|\overrightarrow{OP}\right\|$ ist minimal *oder* $\overrightarrow{OP}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}=0$	**AB III** **K2/K6**	**5**

4.3 Vektorrechnung/Analytische Geometrie

Gegeben ist die Gerade g durch $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-7\\3\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}\quad(t\in R)$.

Die Gerade h verläuft durch die Punkte $P(0|1|-7)$ und $Q(-8|-1|-5)$.

a) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h zueinander parallel verlaufen.
b) Beschreiben Sie einen Lösungsweg zur Berechnung des Abstands der Geraden g und h.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.3

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	**BE**
a)	Zeigen: $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-8\\-2\\2\end{pmatrix}\quad(s\in R)$ parallele Richtungsvektoren $g\cap h=\varnothing$	**AB I/II** K1/K5/K6	**5**
b)	Beschreiben: individuelle Lösung z. B. nach dem Lotfußpunkt-verfahren ggf. Veranschaulichung durch ein Tafelbild	**AB II/III** K2/K6	**5**

4.4 Vektorrechnung/Analytische Geometrie

a) Definieren Sie das Skalarprodukt zweier Vektoren.
Erläutern Sie eine praktische Anwendung für das Skalarprodukt.

b) Die Punkte $A(-2|3|-3)$, $B(-1|1|2)$, $C(1|-2|3)$ und $D(0|0|-2)$ sind in dieser Reihenfolge die Eckpunkte eines Parallelogramms.
Begründen Sie diese Aussage.
Berechnen Sie den Schnittwinkel der Diagonalen.

c) Weisen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussage nach:
Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen senkrecht stehen, dann ist es eine Raute.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.4

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	**BE**
4 a)	Definieren: Skalarprodukt Erläutern, z. B.: mechanische Arbeit	**AB II** K3/K5/K6	**5**
4 b)	Begründen: gegenüberliegende Seiten als Repräsentanten ein und desselben Vektors Berechnen: $\alpha \approx 63{,}2°$	**AB I/II** K1/K5/K6	**10**
4 c)	Nachweisen: Linearkombination aufstellen, verknüpfen, zielgerichtet umformen	**AB II/III** K1/K2/K6	**5**

4.5 Vektorrechnung/Analytische Geometrie

Eine Gerade g verläuft durch die Punkte $A(-2|3|-4)$ und $B(4|2|2)$.
Sie durchstößt die xz-Ebene im Punkt T und die xy-Ebene im Punkt S.

a) Ermitteln Sie einen der beiden Durchstoßpunkte und beschreiben Sie die Vorgehensweise zur Berechnung der Länge der Strecke $\overline{ST}$.

b) Begründen Sie, dass die Gerade auch die dritte Koordinatenebene durchstößt.

c) Ein Punkt P soll die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 1 : 2 teilen.
Erläutern Sie Ihr Vorgehen und berechnen Sie die Koordinaten von P.
Beschreiben Sie die Lage von P.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.5

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
a)	Geradengleichung: $g(AB): \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (t \in R)$ Durchstoßpunkte xz-Ebene, xy-Ebene: $T(-16\|0\|14)$ oder $S\left(2\|\frac{7}{3}\|0\right)$ Beschreiben: Betrag von $\overrightarrow{ST}$	**AB I/II** K5/K6	**10**
b)	Begründen	**AB II** K1/K6	**3**
c)	Erläuterung der Lage von P auf g(AB) 1:2 Berechnung der Koordinaten $g(AB): \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $P\left(0\|\frac{8}{3}\|-2\right)$ Beschreiben: P liegt in der yz-Ebene, ist also Durchstoßpunkt der Gerade durch die yz-Ebene	**AB II** K2/K4/K5	**7**
			20

4.6 Vektorrechnung/Analytische Geometrie

a) Geben Sie für die Geraden mit folgenden Eigenschaften jeweils eine Gleichung in Parameterform an und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

I Die Gerade verläuft parallel zur y-z-Ebene.
II Die Gerade durchstößt mindestens zwei Koordinatenebenen.

b) Gegeben ist für jede reelle Zahl a eine Gerade durch $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in R)$.

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a mögliche Durchstoßpunkte mit den Koordinatenebenen.

Gegeben ist eine weitere Gerade durch $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (s \in R)$.

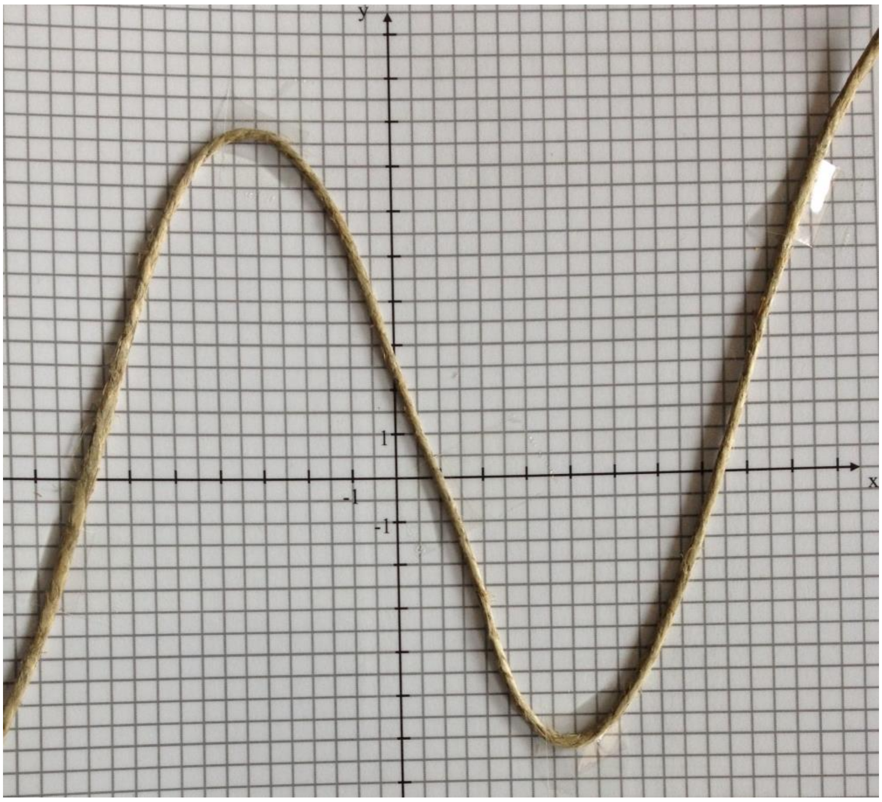
Untersuchen Sie in Abhängigkeit von a die Lage der Geraden g_a und h zueinander.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.6

	Inhalte	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche	BE
a)	Angeben und erläutern: je ein Beispiel, z. B. - I: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\qquad (r\in R)$ - II: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad (r\in R)$, $D_{xy}=D_{xz}(1\vert 0\vert 0)$, $D_{yz}(0\vert 1\vert 1)$ oder $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\qquad (s\in R)$, $D_{xy}(1\vert 1\vert 0)$, $D_{yz}(0\vert -1\vert -3)$, $D_{xz}(0{,}5\vert 0\vert -1{,}5)$	K1/K2/K4 **AB I/II**	**10**
b)	Bestimmen: - für $a=-4$: ein Durchstoßpunkt $D_{xy}=D_{xz}=D_{yz}(0\vert 0\vert 0)$ - für $a\neq -4$: Durchstoßpunkt auf der x-Achse $D_{xy}(4+a\vert 0\vert 0)=D_{xz}$ - Sonderfall für $a=0$: $D_{xy}(4\vert 0\vert 0)=D_{xz}$, Gerade parallel zur yz-Ebene, Untersuchen: $\text{solve}\left(\begin{cases}4+a\cdot t=2+2\cdot r\\1-t=-3\cdot r\\-1+t=-3\cdot r\end{cases},\{t,r,a\}\right)$ $r=0$ and $t=1$ and $a=-2$ - für $a=-2$ Schnittpunkt $S(2\vert 0\vert 0)$ - für $a=-\frac{2}{3}$ parallel - für $a\neq -\frac{2}{3}$ und $a\neq -2$ windschief	K2/K4/K5 **AB II/III**	**10**
			20

4.7 Analysis

Der Kurvenverlauf kann durch eine ganzrationale Funktion sinnvoll angenähert werden.
Erläutern Sie ein Vorgehen, um eine zugehörige Funktionsgleichung zu bestimmen.

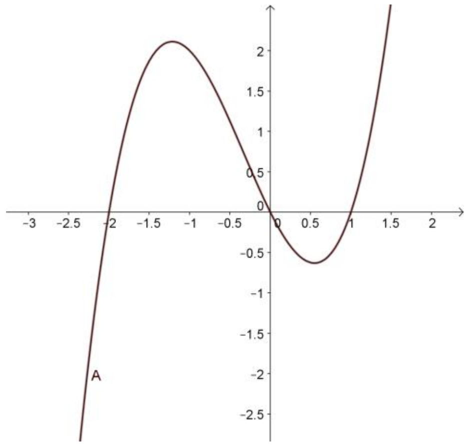


Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.7

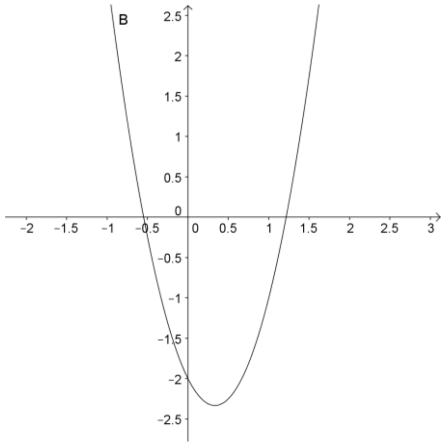
	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	**BE**
	wesentliche Eigenschaften der Funktion, allgemeine Funktionsgleichung, mit Schnittpunkten und Extrempunkten Gleichungen aufstellen, Funktionsgleichung ermitteln	**AB I/II/III** K2/K5/K6	**10**

4.8 Analysis

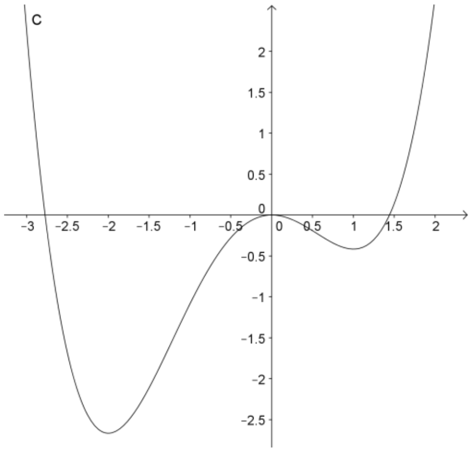
Dargestellt sind die Graphen von zwei Funktionen A und D sowie die Graphen der zugehörigen Stammfunktionen und Ableitungsfunktionen.
Ordnen Sie den Graphen A und D die zugehörigen Graphen zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



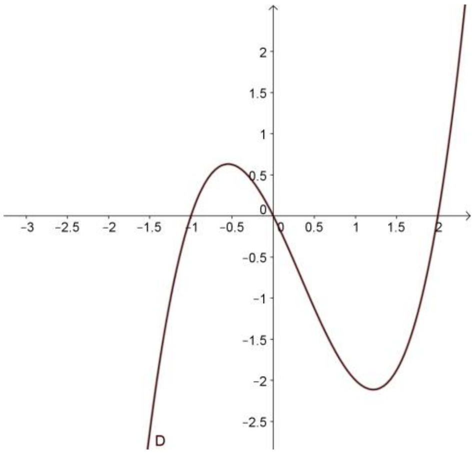
(A)



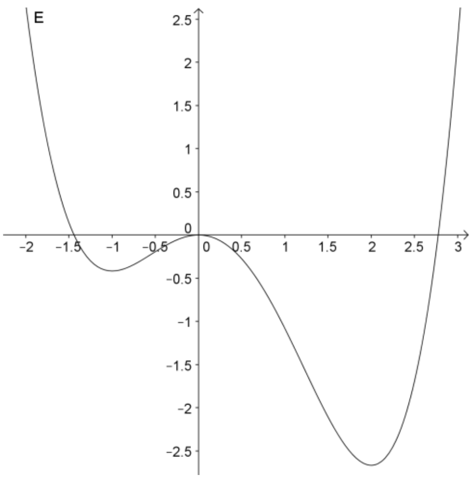
(B)



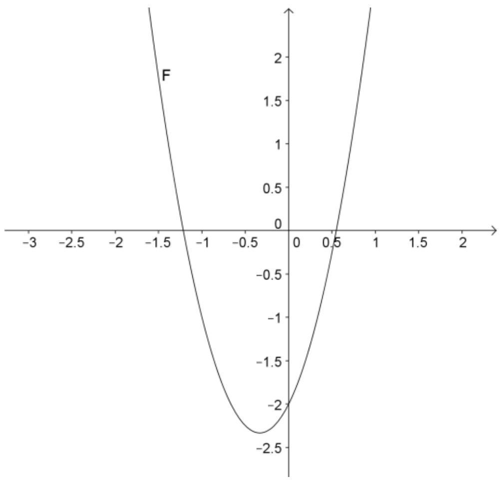
(C)



(D)

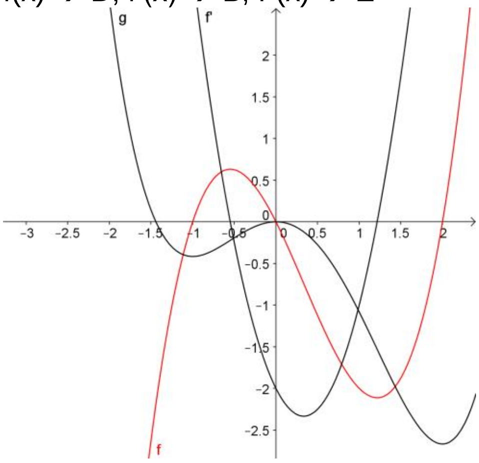
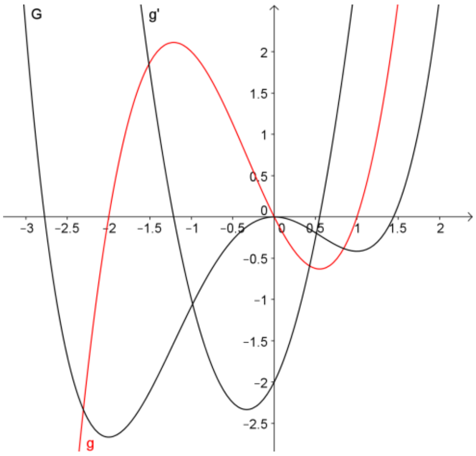


(E)



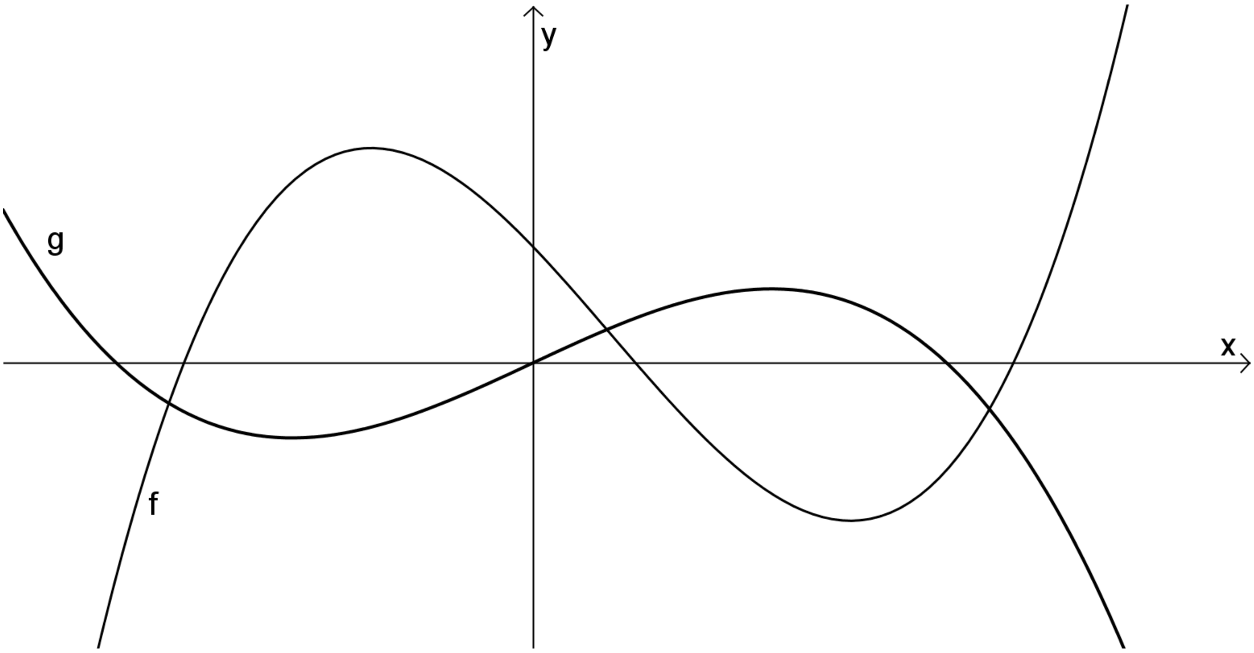
(F)

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.8

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
	Zuordnen: f(x) → D; f'(x) → B; F(x) → E  g(x) → A; g'(x) → F; G(x) → C  Begründen: mindestens zwei Eigenschaften pro Zuordnung	**AB II/III** K2/K5/K6	**10**

4.9 Analysis

Erläutern Sie, wie die von den Graphen zweier Funktionen eingeschlossene Fläche berechnet wird.



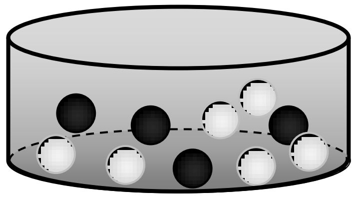
Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.9

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
	Erläutern: Schnittstellen berechnen zwei bestimmte Integrale mit den jeweiligen Schnittstellen als Grenzen	**AB III** K5/K6	**5**

4.10 Stochastik

1 In einem Gefäß befinden sich schwarze und weiße Kugeln.
Beschreiben Sie zwei unterschiedliche Zufallsexperimente.

(Hinweis:
Es kann ein reales Gefäß mit Kugeln gegeben werden.
Dabei können die Anzahl und die Farben geändert werden.)



2 Einer Urne mit genau 17 weißen und 83 blauen Kugeln werden zufällig und mit Zurücklegen Kugeln entnommen.

a) Interpretieren Sie in diesem Kontext die Ereignisse A bis C, für die gilt:

$P(A) = \binom{12}{4} \cdot 0{,}17^4 \cdot 0{,}83^8$ $\quad P(B) = 0{,}17^4 \cdot 0{,}83^8$ $\quad P(C) = 1 - 0{,}83^{12}$

b) Gegeben ist das Ereignis D: Die fünfte entnommene Kugel ist die dritte weiße Kugel.
Geben Sie für das Ereignis D im gegebenen Kontext einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an und berechnen Sie diese.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.10

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
1	Beschreiben: zwei Zufallsexperimente für das vorhandene Gefäß	**AB I** K1/K6	**5**
2 a)	Interpretieren, z. B.: X_n: zufällige Anzahl der weißen Kugeln unter den n entnommenen Kugeln A = {unter 12 entnommenen Kugeln befinden sich genau vier weiße} B = {es werden vier weiße und acht blaue Kugeln hintereinander entnommen C = {unter den 12 entnommenen Kugeln ist mindestens eine weiße}	**AB II/III** K2/K4	**10**
2 b)	Angeben und berechnen: $P(D) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}17^2 \cdot 0{,}83^2 \cdot 0{,}17 \approx 0{,}0203$	**AB II** K2/K3	**5**
			20

4.11 Stochastik

a) Erläutern Sie den Begriff „Erwartungswert einer Zufallsgröße“ an einem selbst gewählten Beispiel.
Ermitteln Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X.

k	1	3	5	7	9
P(X=k)	a	0,1	0,3	0,2	0,1

b) Beschreiben Sie die Bedingungen für ein BERNOULLI-Experiment.
Geben Sie dazu ein Beispiel und ein Gegenbeispiel an.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.11

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
a)	Erläutern: Beispiel, Zufallsvariable, Erwartungswert Ermitteln: $a = 0{,}3,\ E(X) = 4{,}2$	**AB II** K5/K6	**5**
b)	Beschreiben: Einzelexperiment mit zwei Ergebnissen; unabhängig Angeben: Beispiel und Gegenbeispiel	**AB II/III** K3/K5/K6	**5**

4.12 Stochastik

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Mensch die Blutgruppe 0 hat, ist 40 %.

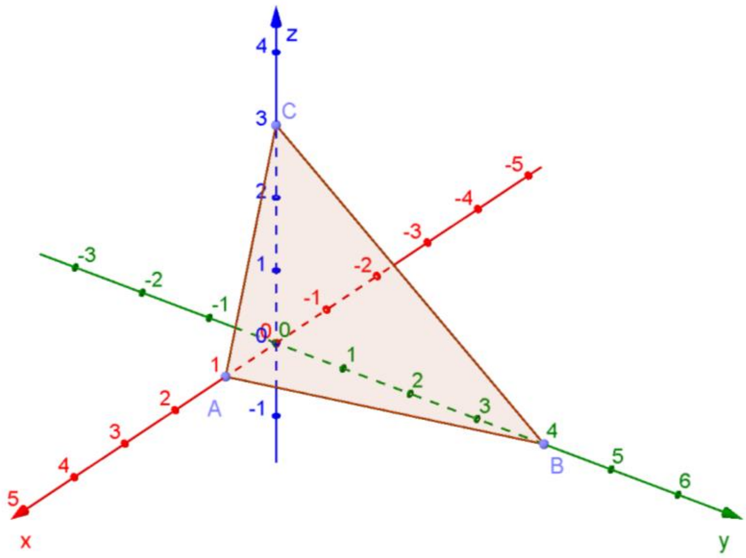
Erläutern Sie an diesem Sachverhalt die BERNOULLI-Formel und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von zehn zufällig ausgewählten Personen weniger als vier die Blutgruppe 0 haben.
Wie viele Personen sind auszuwählen, damit sich in diesem Personenkreis mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % mindestens eine Person mit der Blutgruppe 0 befindet?

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.12

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
	Erläutern: $n = 10;\ p = 0{,}4$ Ermitteln: P(k < 4) ≈ 0,3823 Ermitteln der Anzahl der auszuwählenden Personen: Ansatz, Lösungsweg, 8 Personen	**AB II** K3/K5/K6	**10**

4.13 Vektorrechnung/Analytische Geometrie

Durch die Punkte A, B und C ist eine Ebene E festgelegt.



a) Beschreiben Sie, wie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform ermittelt werden kann.

b) Zeigen Sie, dass durch $12x + 3y + 4z = 12$ die Ebene E beschrieben wird. Geben Sie eine Gleichung einer Ebene F an, die zu E echt parallel ist.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.13

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
a)	Beschreiben: - Koordinaten der Punkte ermitteln: $A(1\|0\|0)$; $B(0\|4\|0)$; $C(0\|0\|3)$ - Ebenengleichung in Parameterform: $E:\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} \quad (r,s \in R)$ - Normalenvektor von E ermitteln - Parametergleichung mit Normalenvektor skalar multiplizieren - in Koordinatenform von E umformen	**AB II/III** K5/K6	**6**
b)	Zeigen: Punktprobe für A, B und C Angeben	**AB I** K5/K6	**4**

4.14 Vektorrechnung/Analytische Geometrie

Beschreiben Sie die besondere Lage der Punkte A,B und C im Koordinatensystem.

a) $A(x|0|0)$ b) $B(x|0|z)$ $C(0|y|4)$

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.14

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
	Beschreiben: besondere Lage der Punkte	**AB I/II** K4/K6	**5**

4.15 Vektorrechnung/Analytische Geometrie

Von einem Parallelogramm ABCD sind die Koordinaten der Eckpunkte $A(4|-3|5)$ und $B(-2|5|-1)$ sowie der Schnittpunkt der Diagonalen $E(-1|2|3)$ gegeben.
Erläutern Sie einen Lösungsweg zur Bestimmung der Koordinaten der Eckpunkte C und D.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.15

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
	Erläutern: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{AE}$ $C(-6|7|1)$ $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + 2\cdot\overrightarrow{BE}$ $D(0|-1|7)$	**AB I/II** K5/K6	**5**

4.16 Vektorrechnung/Analytische Geometrie

Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ n \\ n \end{pmatrix}$ $\quad (n \in \mathbb{R})$.

Untersuchen Sie die Lage der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander in Abhängigkeit von n.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.16

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
	Untersuchen: $\vec{a}$ parallel zu $\vec{b}$: es gibt kein n $\vec{a}$ senkrecht zu $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ für $n = 4$	**AB II/III** K5/K6	**5**

4.17 Vektorrechnung/Analytische Geometrie

Gegeben sind:

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R})$

$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$

$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

$g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (u \in \mathbb{R})$

Überprüfen Sie, ob die Aussage wahr ist:
a) Die Geraden g_1 und g_2 sind parallel.
b) Die Gerade g_3 verläuft durch den Punkt $A(-2|0|3)$.
c) Die Gerade g_4 durchstößt die xz-Ebene.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.17

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
a)	falsch, da Richtungsvektoren linear unabhängig	**AB I** K5/K6	**5**
b)	wahr, für $t = 1$		
c)	wahr für $u = 1$		

4.18 Stochastik

Ein Fußballer schießt erfahrungsgemäß von der Mittellinie mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % ein Tor. Er schießt fünfmal von der Mittellinie auf das Tor.

a) Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang den Term $\binom{5}{2} \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^3$.

b) Geben Sie einen Term an, mit dem man die Wahrscheinlichkeit von fünf Treffern berechnen kann.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.18

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
a)	Interpretieren: 0,9 Trefferwahrscheinlichkeit, zwei Treffer ins Tor, 3 Nichttreffer	**AB I/II** K3/K5/K6	**3**
b)	$0{,}9^5$	**AB I** K3/K5	**3**

4.19 Analysis

Auf einem CAS-Rechner ist folgende Anzeige:

$f(x):=\left(4-x^2\right)\cdot \mathbf{e}^{-x}$	*Fertig*
$\frac{d}{dx}(f(x))$	$\left(x^2-2\cdot x-4\right)\cdot \mathbf{e}^{-x}$

Erläutern Sie die Anzeige und weisen Sie die Rechnung ohne CAS nach.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.19

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
	Erläutern Nachweisen: Ableitungsregel anwenden	**AB I** K4/K5	**5**

4.20 Analysis

Durch eine Verschiebung des Graphen der Funktion f mit $f(x)=\left(4-x^2\right)\cdot e^{-x}$ um $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ entsteht der Graph einer Funktion g. Veranschaulichen und erläutern Sie diese Verschiebung unter Verwendung Ihres CAS. Erläutern Sie Ihr Vorgehen. Geben Sie die Gleichung dieser Funktion g an.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.20

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
	Veranschaulichen und erläutern: $g(x)=g(x)=f(x-2)-1=-x\cdot(x-4)\cdot e^{2-x}-1$	**AB I/II** K4/K6	**5**

4.21 Analysis

Für jede reelle Zahl t ist eine Funktion f_t mit $f_t(x)=(t-x^2)\cdot e^{-x}$ gegeben.
Untersuchen Sie die Anzahl möglicher Extrempunkte in Abhängigkeit von t.

Erwartungsbild zur Beispielaufgabe 4.21

	Inhalte	Anforderungsbereiche/ Kompetenzen	BE
	Untersuchen: $\mathrm{fMax}\left(\left(t-x^2\right)\cdot \mathbf{e}^{-x},x\right)$ $x=-\left(\sqrt{t+1}-1\right) \text{ or } x=\sqrt{t+1}+1 \text{ or } x=\infty$ kein Extrema: $t<-1$ und $t=-1$ für $t=-1$ Sattelpunkt zwei Extrema: $t>-1$	**AB III** K4/K5	**5**

5. Leistungsbewertung

Für die Leistungsbewertung kann entsprechend der im Punkt 1 genannten Kriterien für die Bewertung eine Checkliste herangezogen werden. Die Leistungsbewertung erfolgt unter Beachtung des gültigen Lehrplans, der Bildungsstandards und der Thüringer Schulordnung. Entsprechend der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012) setzt eine Bewertung mit „gut“ (11 Punkte) voraus, dass annähernd vier Fünftel der Gesamtleistung erreicht worden sind, wobei Leistungen in allen drei Anforderungsbereichen vorhanden sein müssen. Eine Bewertung mit „ausreichend“ (5 Punkte) setzt voraus, dass über den Anforderungsbereich I hinaus auch Leistungen in einem weiteren Anforderungsbereich und annähernd die Hälfte der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind.

5.1 Checkliste für die mündliche Prüfung im Fach Mathematik

Kriterium	Einschätzung der Fachprüfungskommission
fachliche Richtigkeit in Bezug auf die Aufgabenstellung	
Vollständigkeit in Bezug auf die Aufgabenstellung	
sachgemäße Anwendung der geforderten Methoden (Beachtung des Operators)	
logische Struktur und Nachvollziehbarkeit der Darstellung	
sprachliche Richtigkeit des Vortrages und des Gespräches	
korrekte Verwendung der Fachsprache	
sachgerechte und kritische Nutzung von Materialien	
Begrenzung der Darstellung auf das Wesentliche	
situationsgerechtes Agieren und Reagieren	
Einhalten eines vorgegebenen Zeitrahmens	
Kommunikationsfähigkeit	
Weitere Bemerkungen	

5.2 Leistungsbewertung entsprechend

a) **der ThürSchulO §59, §74** (vom 20. Januar 1994 zuletzt geändert durch Verordnung vom 7. Juli 2011)

1 = sehr gut ; wenn die Leistung den Anforderungen in besonderem Maße entspricht
2 = gut; wenn die Leistung den Anforderungen voll entspricht
3 = befriedigend; wenn die Leistung im Allgemeinen den Anforderungen entspricht
4 = ausreichend, wenn die Leistung zwar Mängel aufweist, aber im Ganzen den Anforderungen noch entspricht
5 = mangelhaft; wenn die Leistung den Anforderungen nicht entspricht, jedoch erkennen lässt, dass die notwendigen Grundkenntnisse vorhanden sind und die Mängel in absehbarer Zeit behoben werden können
6 = ungenügend; wenn die Leistung den Anforderungen nicht entspricht und selbst die Grundkenntnisse so lückenhaft sind, dass die Mängel in absehbarer Zeit nicht behoben werden können

Der Begriff „Anforderungen" bezieht sich auf den Umfang sowie auf die selbständige und richtige Anwendung der Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten sowie auf die Art der Darstellung.

Die Noten werden in Punkte umgerechnet, dabei gilt:
Note 1 entspricht 15/14/13 Punkten
Note 2 entspricht 12/11/10 Punkten
Note 3 entspricht 9/8/7 Punkten
Note 4 entspricht 6/5/4 Punkten
Note 5 entspricht 3/2/1 Punkten
Note 6 entspricht 0 Punkten
je nach Notentendenz.

b) der Wertigkeit im schriftlichen Abitur

In Anlehnung der Vereinbarung zur Gestaltung der gymnasialen Oberstufe und der Abiturprüfung (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 07.07.1972 i.d.F. vom 15.02.2018) wird empfohlen, nachfolgendes Bewertungsraster anzuwenden.

Prozent	BE	Note	Punkte
bis 95	38 – 40	1+	15
bis 90	36 – 37	1	14
bis 85	34 – 35	1-	13
bis 80	32 – 33	2+	12
bis 75	30 – 31	2	11
bis 70	28 – 29	2-	10
bis 65	26 – 27	3+	9
bis 60	24 – 25	3	8

Prozent	BE	Note	Punkte
bis 55	22 – 23	3-	7
bis 50	20 – 21	4+	6
bis 45	18 – 19	4	5
bis 40	16 – 17	4-	4
bis 33	13 – 15	5+	3
bis 27	11 – 12	5	2
bis 20	8 – 10	5-	1
weniger	0 – 7	6	0