Die Veröffentlichung dieser Lösung geschieht ohne inhaltliche Prüfung durch die Bezirksregierung Düsseldorf und den Mathe-Treff.
Die Lösung stammt nicht vom Originalautor der Aufgabe, sondern von einem Leser des Mathe-Treffs. Wir bedanken uns herzlich für die Erstellung der Aufgabenlösung.

Lösung zu Aufgabe Nr. 1 – Brücke großer Belt

a) Wähle das Koordinatensystem so, dass der tiefste Punkt der Brücke die Koordinaten D(0|3) hat. Eine Pfeilerspitze hat in diesem Koordinatensystem die Koordinaten P(812|189) (Begründung: 812 = 1624/2 und 189 = 254 – 65)

Mit dem Ansatz $f(x) = ax^2 + c$ folgt der Funktionsterm $f(x) = 0{,}000282x^2 + 3$

b) Mit dem Ansatz $g(x) = a \cdot \left(e^{bx} + e^{-bx}\right)$ folgt der Funktionsterm

$$g(x) = 1{,}5 \cdot \left(e^{0{,}00596x} + e^{-0{,}00596x}\right)$$

<u>Begründung:</u>

Es gilt $g(0) = a \cdot 2 = 3 \Leftrightarrow a = 1{,}5$, da das Koordinatensystem gleich gewählt bleibt.

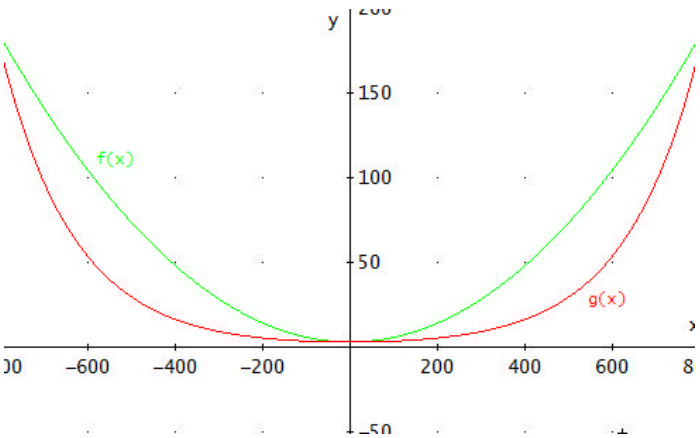
Außerdem: $g(812) = 1{,}5 \cdot (e^{812b} + e^{-812b}) = 189$

Substituiere: $u = e^{812b} \Rightarrow \frac{189}{1{,}5} = u + \frac{1}{u} \Leftrightarrow u^2 - 126u + 1 = 0$

$u_{1,2} = 63 \pm \sqrt{3968}$; $u_1 \approx 125{,}99$, $u_2 \approx 0{,}0079$

Und mittels Rücksubstitution: $b \approx \frac{\ln 0{,}0079}{812} \approx 0{,}00596$

c) Die Funktion g(x) modelliert den Verlauf des Kabels genauer, weil der Graph im Bereich des größten Durchhangs flacher verläuft.



d) Es gilt $f'(x) = 0{,}000564x$ und somit $f'(812) \approx 0{,}46$ und

$g'(x) = 0{,}00894 \cdot (e^{0{,}00596x} - e^{-0{,}00596x})$ und somit $g'(812) \approx 1{,}13$
Die Skalierung wird in vertikaler und horizontaler Richtung gleich sein, die Steigung entspricht an den Pfeilerspitzen eher dem Steigungswert 1,13 von g.

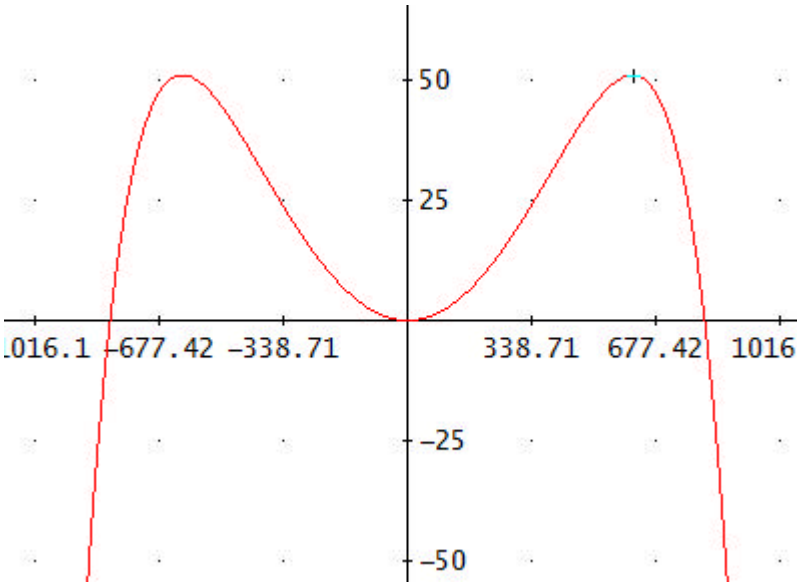
e) Nimmt man die Funktion g, so gilt für die Länge des Tragseiles Nr.7.

$g(812 - 7 \cdot 27) = g(623) \approx 61{,}51$

und für die Funktion f: $f(812 - 7 \cdot 27) = f(623) \approx 112{,}45$

Vergleicht man diese Längen mit dem Bild und der Länge des Pfeilers über der Fahrbahn 189 m, so modelliert jetzt die Funktion f das Seil besser.

f) Gesucht ist das Maximum der Funktion $f(x) - g(x)$. Dies liefert bei numerischer Berechnung den Wert x = 0, dort befindet sich aber ein Minimum der Differenzfunktion



Zeichnerisch ermittelt man mittels Zoom ungefähr eine Maximalstelle bei $x \approx 613$, die größte Abweichung liegt also zwischen dem 7. und 8. Seil.

Die Veröffentlichung dieser Lösung geschieht ohne inhaltliche Prüfung durch die Bezirksregierung Düsseldorf und den Mathe-Treff.
Die Lösung stammt nicht vom Originalautor der Aufgabe, sondern von einem Leser des Mathe-Treffs. Wir bedanken uns herzlich für die Erstellung der Aufgabenlösung.

Lösung zu Aufgabe Nr. 2 – Forellenzucht

a) Die Forellen erreichen nach zwei Jahren eine durchschnittliche Länge von 25cm und sind dann ausgewachsen. Dem Anwachsen ist also eine natürliche Schranke S gesetzt. Die Zunahme pro Zeiteinheit wird umso geringer, je mehr sich der momentane Bestand $f(t)$ der Schranke nähert, je kleiner also die Differenz $|S - f(t)|$ ist. Zur Modellierung ist die Annahme berechtigt, dass die momentane Wachstumsgeschwindigkeit $f'(t)$ proportional ist zur Differenz $S - f(t)$, also $f'(t) = k \cdot (S - f(t))$ mit k > 0.

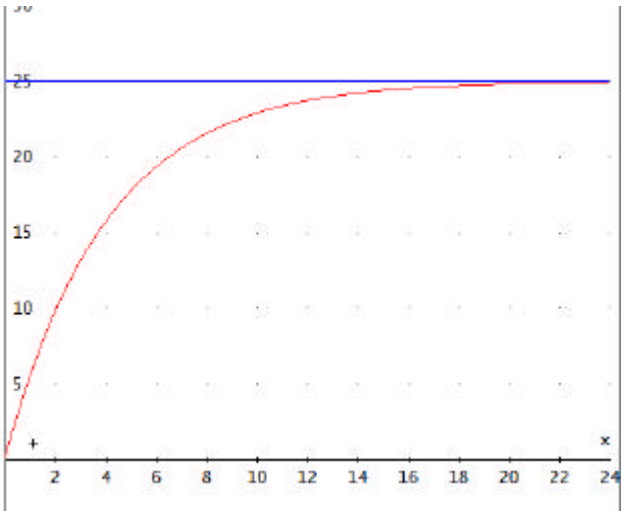
b) Zur Lösung dieser Differentialgleichung des beschränkten Wachstums macht man den Ansatz $f_1(t) = S - c \cdot e^{-kt}$.

Es gilt $\lim\limits_{t \to \infty} f_1(t) = S = 25$

Weiter $f_1(0) = 25 - c = 0{,}2 \Leftrightarrow c = \frac{124}{5}$

und $f_1(10) = 25 - \frac{124}{5} \cdot e^{-k \cdot 10} = 22{,}9 \Rightarrow k = -\frac{1}{10}\left(\ln(22{,}9 - 25) \cdot \left(-\frac{5}{124}\right)\right) \approx 0{,}247$

Nimmt man andere Wertepaare der Tabelle, so gibt es geringfügige Änderung bei den Nachkommastellen.



c) Für den Mittelwert gilt $\overline{m} = \frac{1}{4-3} \cdot \int_3^4 f_1'(t)dt = f_1(4) - f_1(3) \approx 2{,}587$

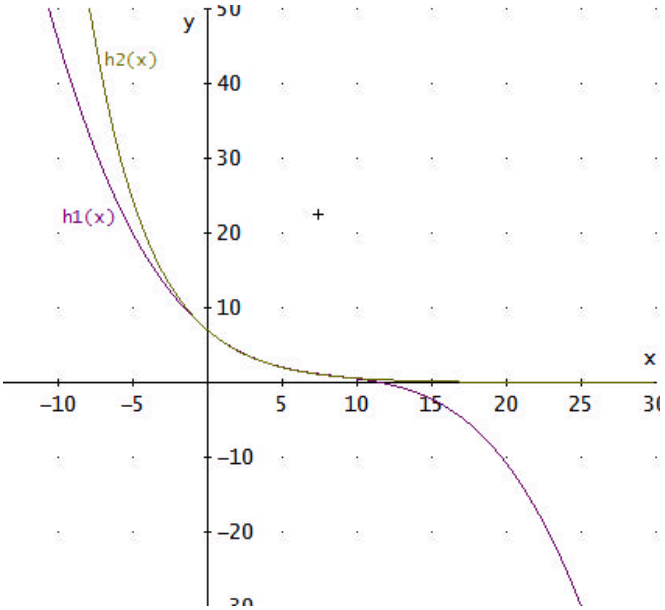
d) möglicher Ansatz: $h_1(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ führt auf das Gleichungssystem:

$h_1(1) = a + b + c + d = 5{,}5$
$h_1(4) = 64a + 16b + 4c + d = 2{,}6$
$h_1(6) = 216a + 36b + 6c + d = 1{,}6$
$h_1(8) = 512a + 64b + 8c + d = 1$

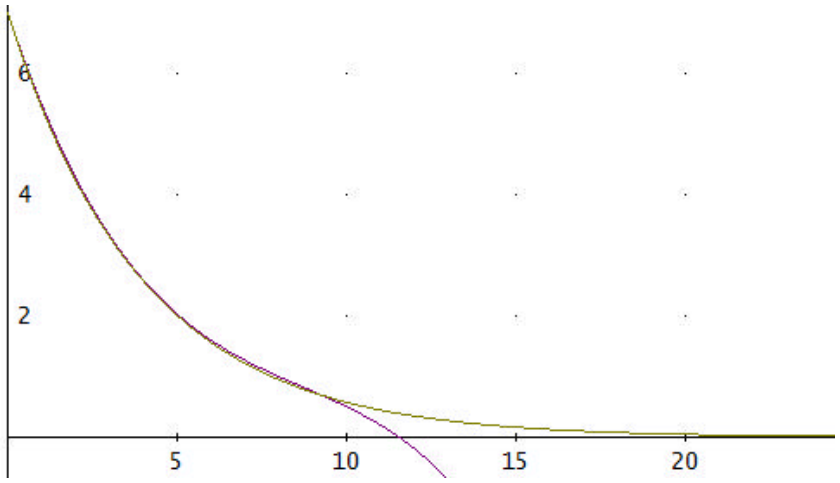
Mit dem CAS ergibt dies die Koeffizienten

$a \approx -0{,}00619$; $b \approx 0{,}16143$; $c \approx -1{,}6431$; $d \approx 6{,}9886$

Die in Teil e) gegebene Funktion modelliert den Sachverhalt besser.



<u>relevanter Bereich</u>



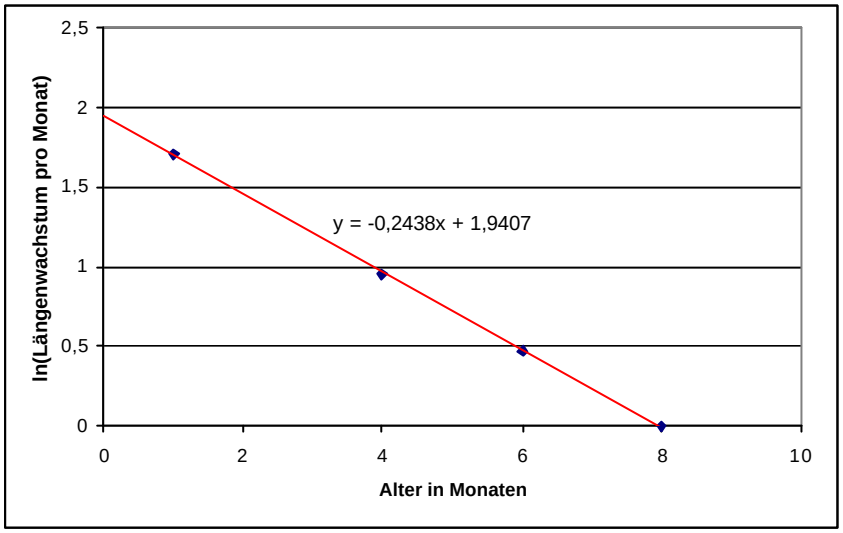
e) Ansatz $h_2(t) = c \cdot e^{-k \cdot t}$

I. $h_2(1) = c \cdot e^{-k} = 5{,}5$; II. $h_2(4) = c \cdot e^{-4k} = 2{,}6$

II. auflösen nach c und einsetzen in I.

$$5{,}5 = 2{,}6 \cdot \frac{e^{-k}}{e^{-4k}} = 2{,}6 \cdot e^{3k} \Rightarrow k = \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{5{,}5}{2{,}6}\right) \approx 0{,}2497 \quad \Rightarrow c = \frac{2{,}6}{e^{-4 \cdot 0{,}2497}} \approx 7{,}06$$

f) Die Zeichnung zeigt, dass der exponentielle Ansatz das Längenwachstum über 24 Monate besser beschreibt, da der Graph auch jenseits von ca. 12 Monaten oberhalb der x-Achse verläuft. Ob die Funktionsanpassung sinnvoll ist, kann man z.B. durch Auftragen der Messwerte in ein (x|ln(y))-Koordinatensystem sehen.



Der gewählte Ansatz der Exponentialfunktion ist angemessen, es ergibt sich eine Ausgleichsgerade im (x|lny)-Koordinatensystem.

g) $$\int_0^{24} 7{,}06 \cdot e^{-0{,}2497 \cdot t} dt = -\frac{7{,}06}{0{,}2497} \cdot e^{-0{,}2497 \cdot t} \Big|_0^{24} \approx 28{,}2$$

Die Siegerländer Forelle ist also nach 24 Monaten ungefähr 28 cm lang, es handelt sich also um ein größeres Exemplar.

h) $$h_3(t) = 0{,}2 + \int_0^t h_2(t) dt \approx 0{,}2 + \frac{7{,}06}{0{,}2497} \cdot \left(1 - e^{-0{,}2497 \cdot t}\right)$$

Die Veröffentlichung dieser Lösung geschieht ohne inhaltliche Prüfung durch die Bezirksregierung Düsseldorf und den Mathe-Treff.
Die Lösung stammt nicht vom Originalautor der Aufgabe, sondern von einem Leser des Mathe-Treffs. Wir bedanken uns herzlich für die Erstellung der Aufgabenlösung.

-

Lösung zu Aufgabe Nr. 3 – Verkehrszählung

a) Die Abbildung in Teil c) zeigt die Graphen der Funktionen f, f', f''

b)

Ansatz: $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$

Bedingungen:

$f(0) = 400 \Leftrightarrow f = 400$
$f(8) = 32768a + 4096b + 512c + 64d + 8e + 400 = 2100$
$f'(8) = 20480a + 2048b + 192c + 16d + e = 0$
$f(14) = 537824a + 38416b + 2744c + 196d + 14e + 400 = 1600$
$f'(14) = 192080a + 10976b + 588c + 28d + e = 0$
$f'(17) = 417605a + 19652b + 867c + 34d + e = 0$

Aus diesen Bedingungen ergeben sich mit Hilfe eines Computeralgebrasystems die Koeffizienten

$a \approx -0{,}04660580707$;

$b \approx 2{,}31668206$; $c \approx -40{,}07244995$; $d \approx 265{,}2424365$

$e \approx -340{,}0465243$; $f = 400$

Gerundet ergeben sich die Werte der Kontrollfunktion, mit der auch weitergearbeitet wird.

$f(x) = -0{,}0466x^5 + 2{,}3167x^4 - 40{,}07x^3 + 265{,}2x^2 - 340x + 400$

c) Gesucht wird bei (i) der Hochpunkt der Funktion f - dieser sollte bei guter Wahl von f bei 2100 liegen - ,sowie bei (ii) der Hochpunkt von f'

$f'(x) = -0{,}233x^4 + 9{,}2668x^3 - 120{,}21x^2 + 530{,}4x - 340$

$f''(x) = -0{,}932x^3 + 27{,}8004x^2 - 240{,}42x + 530{,}4$

$f'''(x) = -2{,}796x^2 + 55{,}6008x - 240{,}42$

Die Nullstellen der ersten Ableitung sind gerundet $x_1 \approx 0{,}8$; $x_2 \approx 8$; $x_3 \approx 14$; $x_4 \approx 17$

Die hinreichende Bedingung für Extrema ergibt:

$f''(0{,}8) \approx 355{,}4 > 0 \Rightarrow TP$

$f''(8) \approx -90{,}9 < 0 \Rightarrow HP$

$f''(14) \approx 56 > 0 \Rightarrow TP$

$f''(17) \approx -101{,}3 < 0 \Rightarrow HP$

$TP(0{,}8 \mid 278)$; $HP(8 \mid 2100)$; $TP(14 \mid 1600)$; $\mathrm{HP}(17 \mid 1726)$

Die höchste vorkommende Verkehrsdichte lag (wie angegeben) um 8 Uhr.

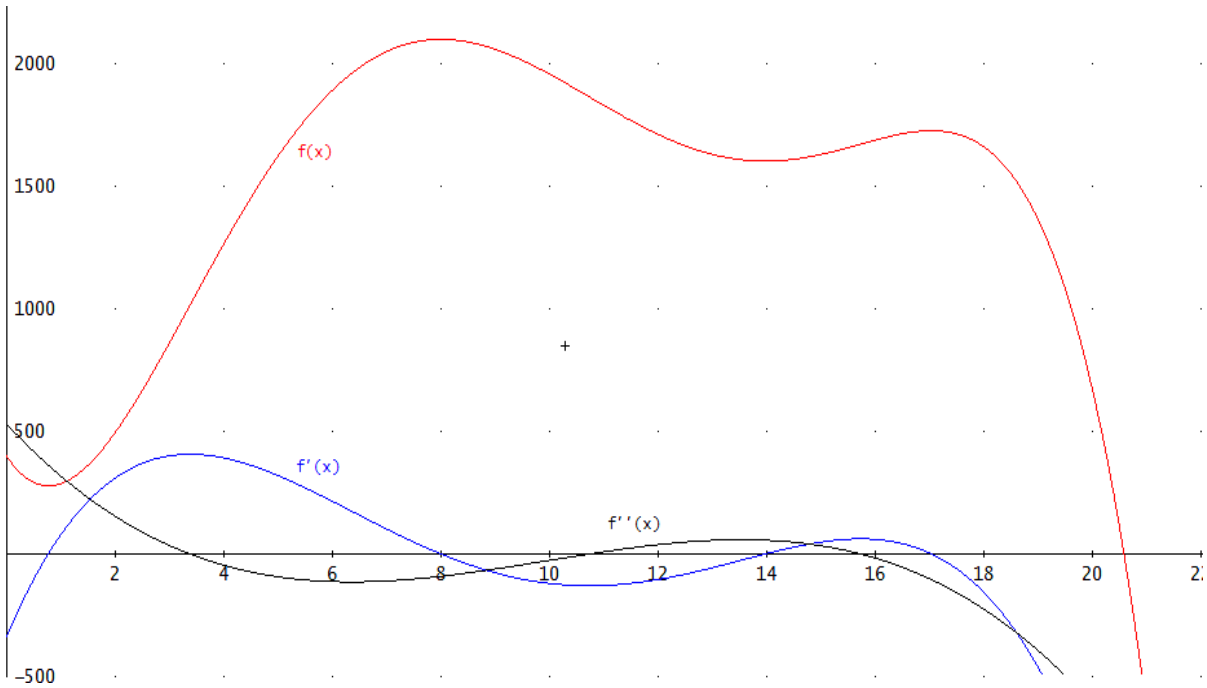
Die Nullstellen der zweiten Ableitung sind $x_1 \approx 3{,}4$; $x_2 \approx 15{,}7$; $x_3 \approx 10{,}7$

$f'''(3{,}4) \approx -83{,}7 < 0$

$f'''(15{,}7) \approx -56{,}7 < 0$

$f'''(10{,}7) \approx 34{,}4 > 0$

Die Verkehrsdichte nimmt also zwischen 3 und 4 Uhr am schnellsten zu und es gilt $f'(3{,}4) \approx 407$ (blauer Graph der ersten Ableitung hat dort das absolute Maximum)



d) Der Graph von f verläuft kurz hinter x = 20 unterhalb der x-Achse, was aber in Hinblick

auf die Aufgabenstellung unrealistisch ist.

<u>Ersatzfunktion:</u>

$g(18) = f(18)$ (Funktionswert soll um 18 Uhr übereinstimmen)

$g'(18) = f'(18)$ (Die Steigung auch)

$g(24) = 400$

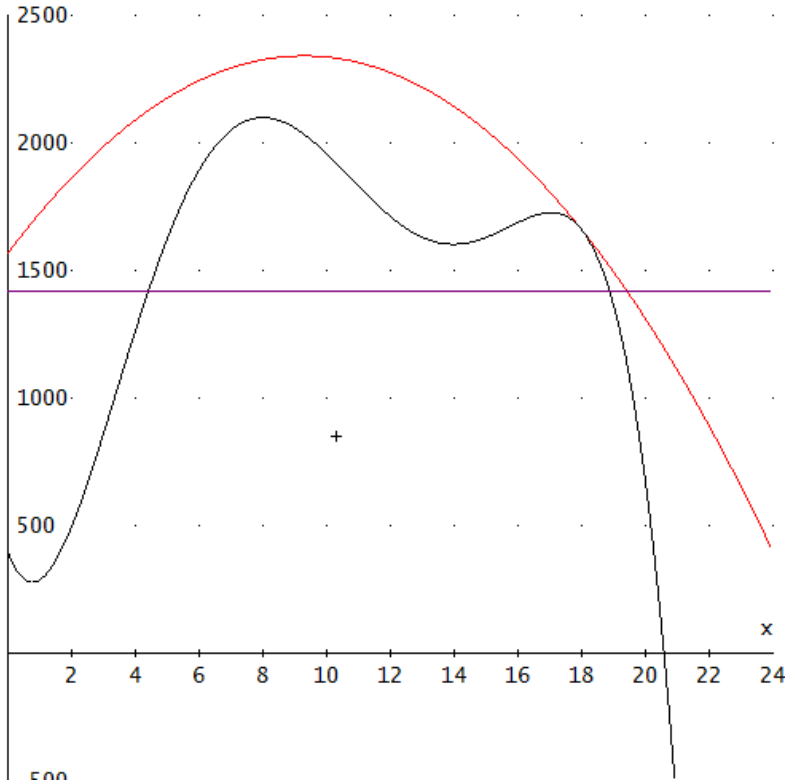
Ansatz: $g(x) = ax^2 + bx + c$

I. $g(18) = 324a + 18b + c = 1660{,}5904$

II. $g'(18) = 36a + b = -156{,}2704$

III. $g(24) = 576a + 24b + c = 400$

Wieder mit dem CAS ergibt sich $a = -8{,}971\overline{3}$; $b = 166.6976$; $c = 1566{,}7456$



Graph von g in rot, Graph von f hier in schwarz.

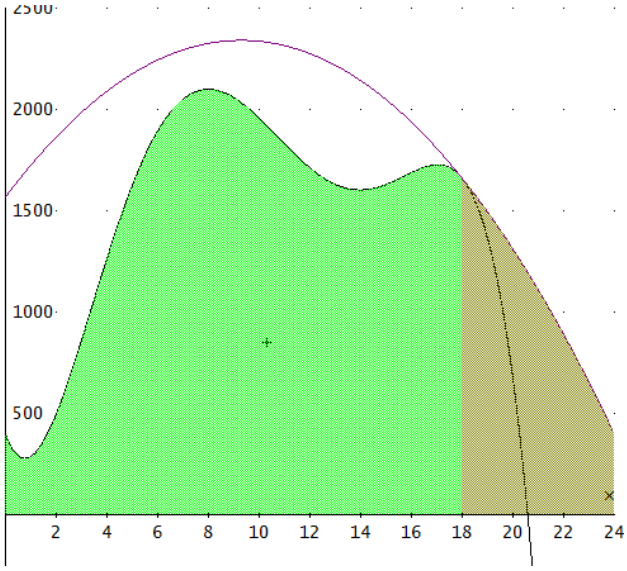
e) Die durchschnittliche Verkehrsdichte beträgt $\frac{34000Kfz}{24h} = 1416\frac{2}{3}\frac{Kfz}{h}$ (vgl. violette Gerade

im Bild oben).

Den exakten Wert erhält man mittels

$$\int_0^{18} f(x)dx + \int_{18}^{24} g(x)dx \approx 27422{,}6 + 6504{,}8 = 33927{,}4$$

Die Funktionen modellieren den Wert 34000 also recht gut.



f) Anzahl der Kfz von 0 bis 9 Uhr: $\int_0^9 f(x)dx \approx 11781$

Prozentualer Anteil: $\frac{11781}{33927{,}4} \approx 0{,}347$, also ungefähr 34,7%

Die Veröffentlichung dieser Lösung geschieht ohne inhaltliche Prüfung durch die Bezirksregierung Düsseldorf und den Mathe-Treff.
Die Lösung stammt nicht vom Originalautor der Aufgabe, sondern von einem Leser des Mathe-Treffs. Wir bedanken uns herzlich für die Erstellung der Aufgabenlösung.

Lösung zu Aufgabe Nr. 5 – Graph f, f', F

$f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x} = (x+1)^2 \cdot e^{-x}$

a) Die Achsendurchschlagspunkte sind die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen:

y-Achse: $f(0) = 1$ P(0|1)

x-Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$ N(-1|0)

Verhalten im Unendlichen:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

relative Extrema:

notwendige Bedingung $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1 - x^2) \cdot e^{-x} = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

hinreichende Bedingung $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(x) = (x^2 - 2x - 1) \cdot e^{-x}$

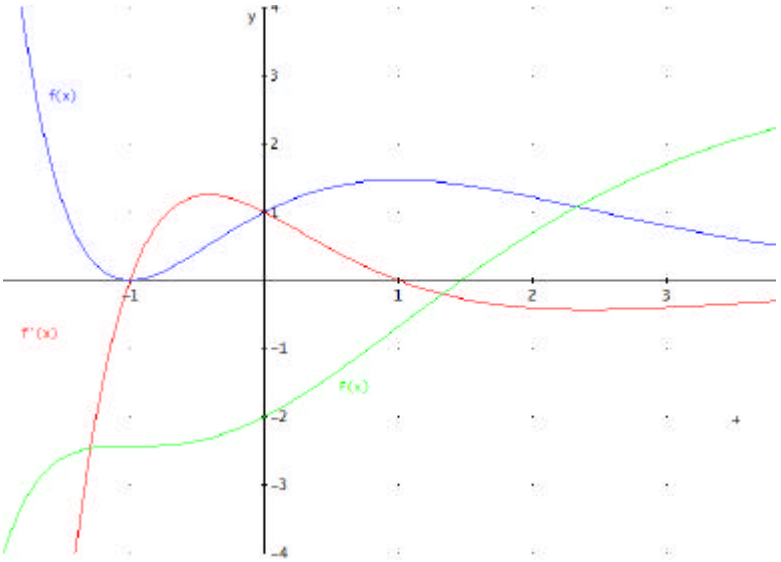
$f''(1) = -2e^{-1} < 0 \quad \Rightarrow HP(1 \mid f(1))$, also $HP(1 \mid 4e^{-1})$

$f''(-1) = 2e^{1} > 0 \quad \Rightarrow TP(-1 \mid f(-1))$, also $TP(-1 \mid 0)$

b) Bild 1 zeigt den Funktionsgraphen, Bild 3 die Ableitung und Bild 2 die Stammfunktion

<u>Begründung:</u>

- Der Graph in Bild 1 erfüllt als einziger Graph das erwartetet Grenzverhalten im Unendlichen
- Der Graph hat die berechneten Hochpunkte, Tiefpunkte und Achsendurchschlagspunkte
- Der Graph der Ableitungsfunktion schneidet die x –Achse an den Stellen, an denen der Graph von f Hoch- bzw. Tiefpunkt hat.
- Die Stammfunktion hat an der Stelle -1 einen Sattelpunkt, dort hat die Funktion f einen Tiefpunkt mit waagerechter Tangente



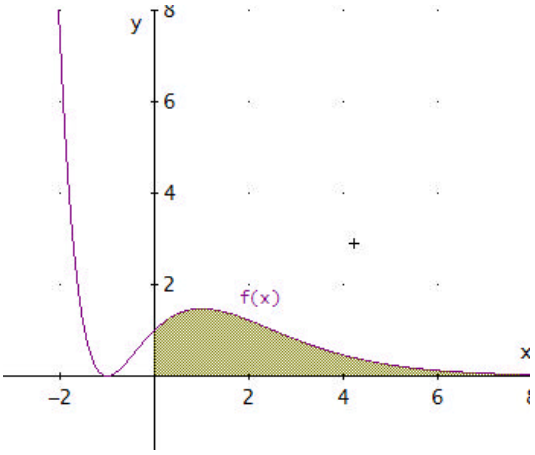
c) Die Funktion $F(x) = (-x^2 - 4x - 5) \cdot e^{-x} + 3$ ist Stammfunktion von f, wie man durch Ableiten von F mittels Produktregel sofort nachweisen kann.

Die Fläche reicht ins Unendliche, Grenzen sind also x = 0 und die Gerade x = z.

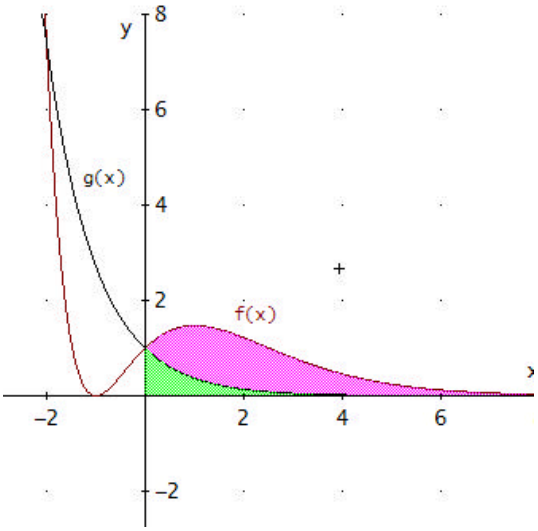
$$\int_0^z f(x)dx = F(x)\Big|_0^z = F(z) - F(0) = (-z^2 - 4z - 5)e^{-z} + 3 - (-5+3)$$

$$\lim_{z \to +\infty} \left((-z^2 - 4z - 5)e^{-z} + 3 - (-5+3)\right) = 5$$

Durch Grenzwertbildung erhält man den Flächeninhalt 5



Die nächste Abbildung zeigt die Graphen von f und von $g(x) = e^{-x}$, sowie die beschriebene Teilung der Fläche. Berechnet wird nun die Fläche unter dem Graphen von g.



$$\int_0^z g(x)dx = -e^{-x}\Big|_0^z = -e^{-z} - (-1)$$

$$\lim_{z \to +\infty} (-e^{-z} - (-1)) = 1$$

Durch Grenzwertbildung erhält man den Flächeninhalt 1

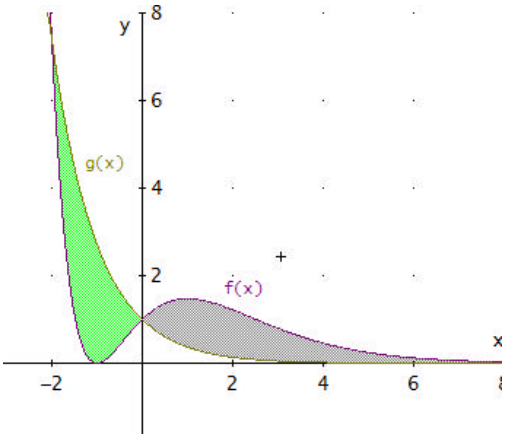
Oben ergab sich für die Fläche unter dem Graphen von f der Inhalt 5.

Teilverhältnis ist also 1 : 4

d) Da die Fläche zwischen den Graphen von f und g im I. Quadranten nach Teil c den Flächeninhalt 4 hat, muss die Fläche im II. Quadranten zwischen -2 und 0 ebenfalls den Flächeninhalt 4 haben. Der Graph von g liegt im II. Quadranten über dem Graphen von f, deshalb wird

$$\int_{-2}^{0} \left(f(x) - g(x)\right)dx < 0 \quad \text{(also -4)}$$

Gesamtintegralwert ist dann 0 (es wird also nicht der Flächeninhalt, sondern die Bilanzsumme berechnet.)


y
8
6
4
2
g(x)
f(x)
x
−2
2
4
6

Die Veröffentlichung dieser Lösung geschieht ohne inhaltliche Prüfung durch die Bezirksregierung Düsseldorf und den Mathe-Treff.
Die Lösung stammt nicht vom Originalautor der Aufgabe, sondern von einem Leser des Mathe-Treffs. Wir bedanken uns herzlich für die Erstellung der Aufgabenlösung.

Lösung zu Aufgabe Nr. 7 – Lipnature

a) Bestimmung der Funktionsgleichung

Ansatz für die achsensymmetrische Funktion vierten Grades ist $f_1(x) = ax^4 + bx^2 + c$

Bedingungen: f_1 hat an der Stelle $x_0 = 4$ eine Nullstelle, also, f_1 hat an der Stelle $x_E = -2$ ein relatives Extremum, also $f_1'(-2) = 0$ und der Graph schneidet die y – Achse an der Stelle $y_S = 2$, also $f_1(0) = 2$.

I. $f_1(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$

II. $f_1(4) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{mit\ \mathrm{I.}} a \cdot 4^4 + b \cdot 4^2 + 2 = 0$

III. $f_1'(-2) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot a \cdot (-2)^3 + 2 \cdot b \cdot (-2) = 0 \Leftrightarrow -32a - 4b = 0$

II. $256a + 16b + 2 = 0$

III. $-32a - 4b = 0$

II + $4 \cdot$ III: $128a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{64}$

Einsetzen in III. folgt: $-32 \cdot \left(-\frac{1}{64}\right) - 4b = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - 4b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{8}$

Also ist $f_1(x) = -\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + 2$

b) Schnittpunkte

$f_1(x) = f_2(x)$

$-\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + 2 = \frac{1}{8}x^2 - 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{64}x^4 = -4 \Leftrightarrow x^4 = 256 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 4$

Schnittpunkte sind $S_1(4|0)$ und $S_2(-4|0)$; die y – Koordinate ergibt sich jeweils durch Einsetzen von 4 und -4 in $f_1(x)$ oder $f_2(x)$.

c) Extrempunkte

notwendige Bedingung für Extrema $f_1'(x) = 0$

$$f_1'(x) = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{4}x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (-\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ oder}$$

$$-\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{2,3} = \pm 2$$

hinreichende Bedingung für Extrema: $f_1'(x) = 0$ und $f_1''(x) \neq 0$

$$f_1''(x) = -\frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{4}$$

$$f_1''(0) = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \textit{Minimum} \qquad \text{TP}(0 \mid 2)$$

$$f_1''(2) = -\frac{3}{16} \cdot 2^2 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \textit{Maximum} \qquad \text{HP}(2 \mid 2{,}25)$$

$$f_1''(-2) = -\frac{3}{16} \cdot (-2)^2 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \textit{Maximum} \qquad \text{HP}(-2 \mid 2{,}25)$$

Wendepunkte

notwendige Bedingung für Wendepunkte $f_1''(x) = 0$

$$f_1''(x) = -\frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \neq \pm 1{,}15$$

hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $f_1''(x) = 0$ und $f_1'''(x) \neq 0$

$$f_1'''(x) = -\frac{3}{8}x \Rightarrow f_1'''(\pm\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}) = \mp\frac{\sqrt{3}}{4} \neq 0$$

also gibt es Wendpunkte $\text{WP}_{1,2}(\pm\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \mid \frac{77}{36})$ oder $\text{WP}_{1,2}(\pm 1{,}15 \mid 2{,}14)$

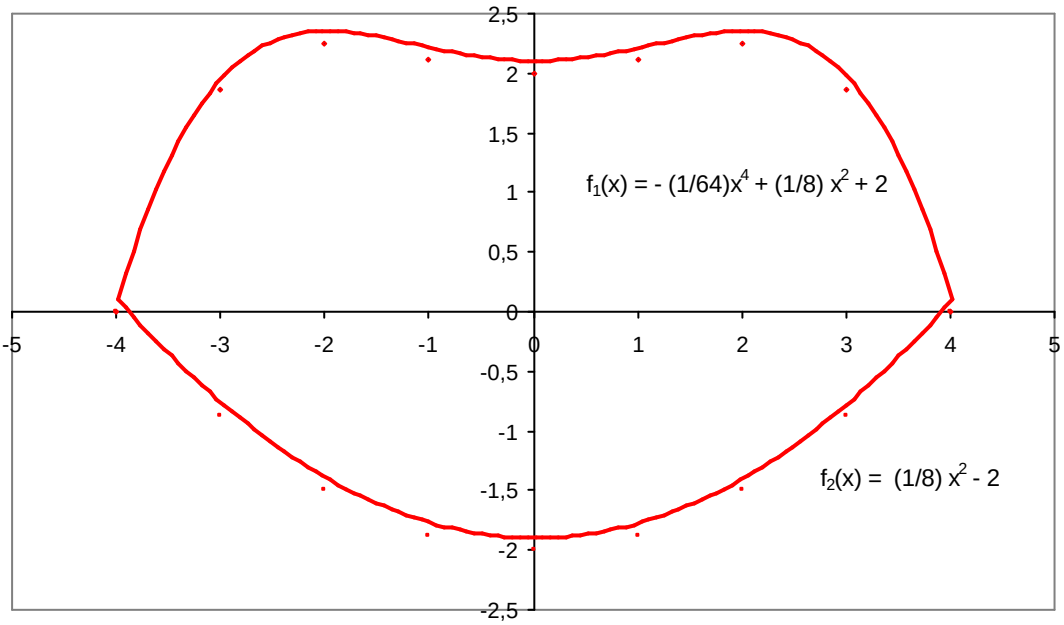
$$f_1(\pm\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}) = -\frac{1}{64}\left(\pm\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right)^4 + \frac{1}{8}\left(\pm\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2 = -\frac{1}{64}\left(\frac{16\cdot 9}{81}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{4\cdot 3}{9}\right) + 2$$

$$= -\frac{1}{64}\cdot\frac{16}{9} + \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3} + 2 = -\frac{1}{36} + \frac{1}{6} + 2 = -\frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{72}{36} = \frac{77}{36}$$

d) Skizze des Firmenlogos

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
-4	0	0
-3	-0,875	1,859375
-2	-1,5	2,25
-1	-1,875	2,109375
0	-2	2
1	-1,875	2,109375
2	-1,5	2,25
3	-0,875	1,859375
4	0	0

Lipnature



e) Flächeninhalt des Kussmundes

$$\int_{-4}^{4}\left(f_1(x) - f_2(x)\right)dx = 2\cdot\int_{0}^{4}\left(f_1(x) - f_2(x)\right)dx = 2\cdot\int_{0}^{4}\left(-\frac{1}{64}x^4 + 4\right)dx = 2\cdot\left(-\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{5}x^5 + 4x\right)\Big|_0^4$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{5}\cdot 4^5 + 4\cdot 4\right) = 2\cdot\left(-\frac{16}{5}+16\right) = \frac{128}{5} = 25{,}6$$ **(Flächeneinheiten FE)**

f) Extremwertaufgabe

Gesucht ist ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt:

- Größe, die extremal werden soll: $A(x;y) = x\cdot(-y)$

(Beachte: da A positiv ist und y nach unten zeigt, ergänze das Minuszeichen; x ist nur eine Hälfte des Rechteckes)

- Nebenbedingung: Der Eckpunkt des Teilrechtecks liegen auf dem Graphen der Funktion f_2, also gilt $y = f_2(x) = \frac{1}{8}x^2 - 2$

- Einsetzen der Nebenbedingung in die Extremalgröße ergibt
  $A(x) = -x\cdot\left(\frac{1}{8}x^2 - 2\right) = -\frac{1}{8}x^3 + 2x$

- Bestimmung der Extremwerte der Funktion A (notwendige und hinreichende Bedingung)

  $$A'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{4}{\sqrt{3}} = \pm\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}$$

  x muss positiv sein, da es sich um eine Rechtecklänge handelt.

  $$A''\left(\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{3}{4}\cdot\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3} < 0$$

  $$x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow -y = -\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2 = -\frac{1}{8}\cdot\frac{16\cdot 3}{9} + 2 = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

  $$A(x;y) = 2\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3} = 2\cdot\frac{16}{9}\sqrt{3} = \frac{32}{9}\sqrt{3}$$

g) Funktionsschar

Ansatz für die gesuchte Funktion: $f(x) = kx^2 + c$

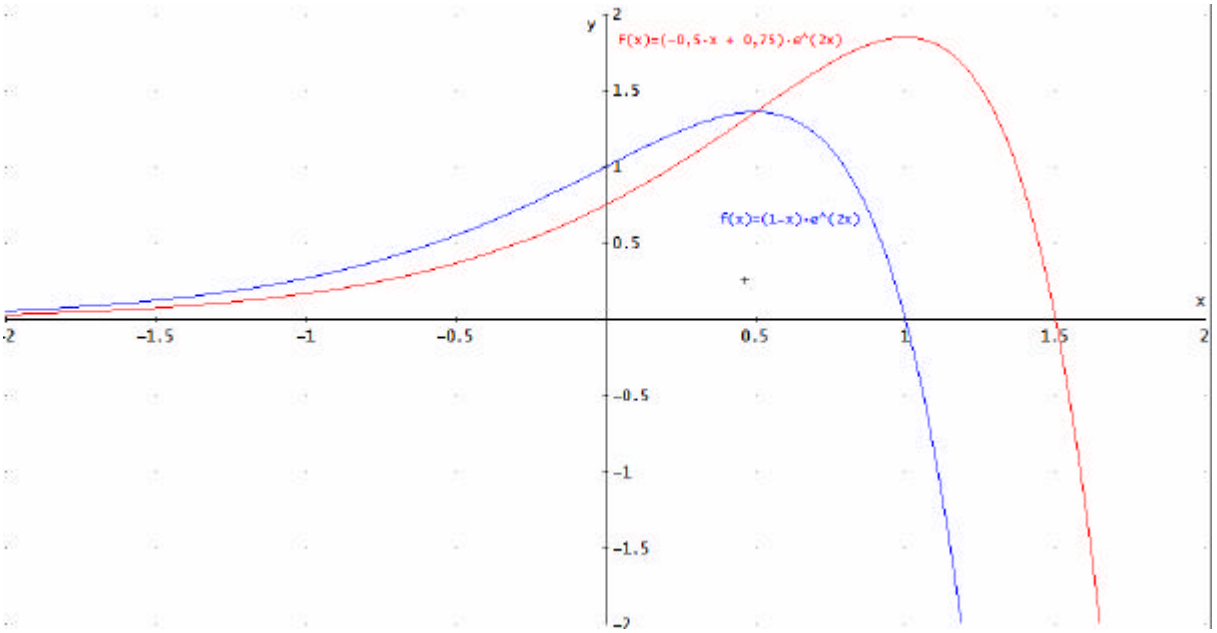
Bedingungen: $f(4) = 0 \Rightarrow 16k + c = 0 \Rightarrow c = -16k$

$\Rightarrow f_k(x) = k \cdot x^2 - 16k$

Die Veröffentlichung dieser Lösung geschieht ohne inhaltliche Prüfung durch die Bezirksregierung Düsseldorf und den Mathe-Treff.
Die Lösung stammt nicht vom Originalautor der Aufgabe, sondern von einem Leser des Mathe-Treffs. Wir bedanken uns herzlich für die Erstellung der Aufgabenlösung.

Lösung zu Aufgabe Nr. 8 – Kombi (Innermathematische Aufgabe)

Der blaue Graph ist der in der Aufgabe abgebildete von f, der rote Graph ist der von F.



1. Kurvendiskussion

   a) Nullstelle $f(x) = (1-x)\cdot \underbrace{e^{2x}}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

   b) Extrempunkte notwendige Bedingung $f'(x)=0$

$$f'(x) = -1\cdot e^{2x} + (1-x)\cdot 2\cdot e^{2x} = e^{2x}(-1+2-2x) = \underbrace{e^{2x}}_{\neq 0}(1-2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

hinreichende Bedingung $f'(x)=0$ und $f''(x)\neq 0$

$$f''(x) = 2\cdot e^{2x}\cdot(1-2x) + e^{2x}\cdot(-2) = e^{2x}(2-4x-2) = -4x\cdot e^{2x}$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -4\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot\frac{1}{2}} = -2e < 0 \Rightarrow HP\left(\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}e\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e$$

c) <u>Wendepunkte</u>

notwendige Bedingung $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4x \cdot e^{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

hinreichende Bedingung $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$f'''(x) = -4e^{2x} - 4x \cdot 2 \cdot e^{2x} = e^{2x}(-4 - 8x)$$
$$f'''(0) = -4 \neq 0 \Rightarrow WP(0\,|\,1)$$

$f(0) = 1$

d) <u>Grenzverhalten</u>

Die Exponentialfunktion entscheidet über das Grenzverhalten

$\lim\limits_{x \to \infty} (1 - x) \cdot e^{2x} = -\infty$ (wegen –x kommt hier das Minus hin; vgl. mit Graph)

$\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - x) \cdot e^{2x} = 0$

2) <u>Stammfunktion</u>

$$F'(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) \cdot 2 \cdot e^{2x} = e^{2x}\left(-\frac{1}{2} - x + \frac{3}{2}\right) = (1 - x) \cdot e^{2x}$$

3) <u>Flächenberechnung</u>

Berechne das Integral von 0 bis zur Nullstelle 1. Da die Fläche oberhalb der x-Achse liegt, müssen keine Beträge verwendet werden.

$$\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \cdot e^2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(e^2 - 3)$$

4) <u>Flächenberechnung</u>

$$\int_u^0 f(x)dx = F(0) - F(u) = \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}u + \frac{3}{4}\right)e^{2u}$$

$$\lim_{u \to -\infty}\left(\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}u + \frac{3}{4}\right)e^{2u}\right) = \frac{3}{4}$$

Geometrisch bedeutet dies, dass die nach links ins Unendliche reichende Fläche einen endlichen Flächeninhalt besitzt.

5) <u>Extremwertaufgabe</u>

$A(x;y) = x \cdot y$

Nebenbedingung: Der Punkt $P(x;y)$ liegt auf dem Graphen von f, also
$y = (1-x) \cdot e^{2x}$

$\Rightarrow A(x) = x \cdot (1-x) \cdot e^{2x} = (x - x^2) \cdot e^{2x}$

<u>Extrempunkte</u> notwendige Bedingung $A'(x) = 0$

$A'(x) = (1-2x) \cdot e^{2x} + (x - x^2) \cdot 2 \cdot e^{2x} = e^{2x} \cdot (-2x^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{,1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

<u>hinreichende Bedingung</u> $A'(x) = 0$ und $A''(x) \neq 0$

$A''(x) = 2 \cdot e^{2x}(-2x^2 + 1) + e^{2x}(-4x) = e^{2x} \cdot (-4x^2 - 4x + 2)$

$A''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{\sqrt{2}} \cdot \left(-4 \cdot \frac{2}{4} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\right) = e^{\sqrt{2}}(-2 - 2 \cdot \sqrt{2} + 2) = -2\sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{2}} < 0$

$\Rightarrow HP\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \,|\, \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) \cdot e^{\sqrt{2}}\right)$

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) == \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{4}\right) \cdot e^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) \cdot e^{\sqrt{2}} \approx 0{,}85$

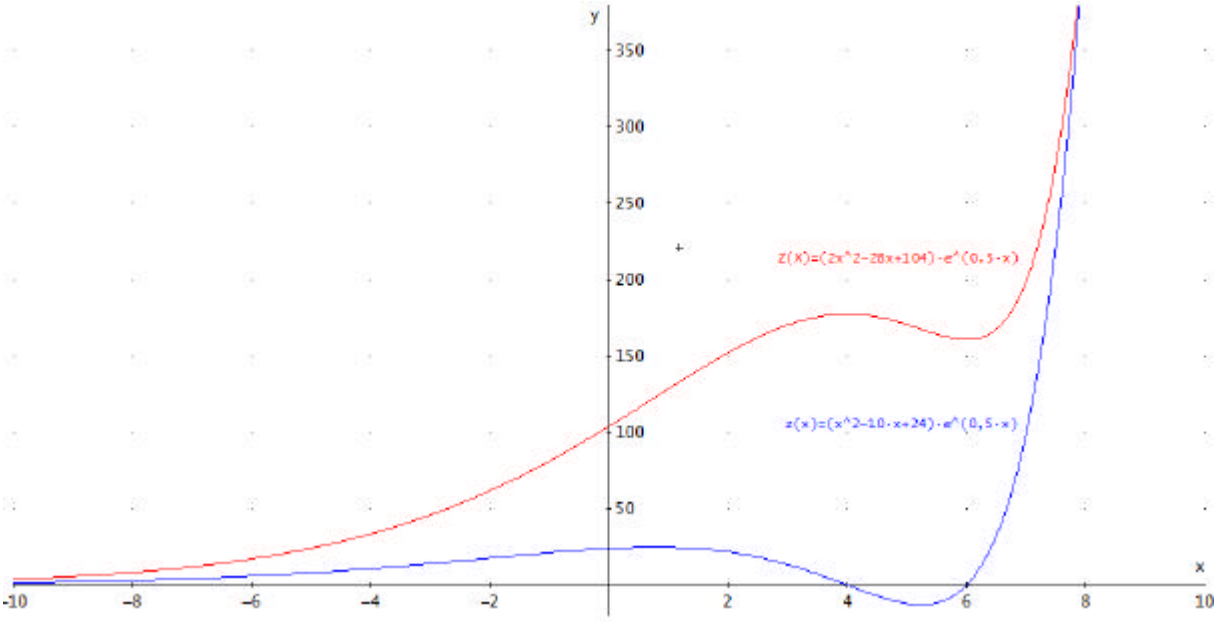
Untersuchung der Ränder x = 1 und x = 0 ergibt jeweils A(0) = 0, also ist der gesuchte Flächeninhalt 0,85 FE (Flächeneinheiten)

Die Veröffentlichung dieser Lösung geschieht ohne inhaltliche Prüfung durch die Bezirksregierung Düsseldorf und den Mathe-Treff.
Die Lösung stammt nicht vom Originalautor der Aufgabe, sondern von einem Leser des Mathe-Treffs. Wir bedanken uns herzlich für die Erstellung der Aufgabenlösung.

Lösung zu Aufgabe Nr. 9 – Stausee

Korrigierte Fassung vom 22. März 2007

Die Funktion $z(x) = (x^2 - 10x + 24) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ beschreibt die Zulaufrate des Wassers in den Stausee gemessen in tausend Kubikmeter pro Tag. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion in einem größeren Bereich (blau), sowie die Stammfunktion (rot), die die Wassermenge im Stausee zu einem bestimmten Zeitpunkt beschreibt.



1. Da eine negative Zulaufrate bedeutet, dass Wasser herausläuft, werden bei diesem Aufgabenteil die Nullstellen der Funktion z gesucht.

$$z(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 10x + 24) \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 24} = 5 \pm 1 \Rightarrow x_1 = 4 \text{ und } x_2 = 6.$$

Bis zum vierten Tag einschließlich fließt Wasser zu; am fünften und sechsten Tag fließt Wasser ab; nach dem sechsten Tag fließt wieder Wasser zu.

<u>Zulauf</u> $0 < x \le 4$ und $x > 6$ <u>Ablauf</u> $4 < x \le 6$

2. <u>Bestimmung der inneren Extremstellen von z</u>

Notwendige Bedingung: $z'(x) = 0$

$$z'(x) = (2x - 10) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + (x^2 - 10x + 24) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\left(\frac{1}{2}x^2-3x+2\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x^2-6x+4=0 \Rightarrow x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-4}=3\pm\sqrt{5}$$

Aus dem Graphen geht hervor, dass die Lösung $3-\sqrt{5}$ sein wird.

hinreichende Bedingung: $z'(x)=0$ und $z''(x)\neq 0$

$z''(x)=\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-2\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ ist gegeben

$$z''(3-\sqrt{5})=\left(\frac{1}{4}(3-\sqrt{5})^2-\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})-2\right)\cdot e^{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}$$
$$=\left(\frac{1}{4}(9-6\sqrt{5}+5)-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}-2\right)\cdot e^{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}$$
$$=\left(\frac{9}{4}-\frac{6}{4}\sqrt{5}+\frac{5}{4}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}-2\right)\cdot e^{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}=-\sqrt{5}\cdot e^{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}<0$$

Wegen $z(6{,}5)=32{,}24>24{,}83=z(3-\sqrt{5})$ ist die Zulaufrate allerdings am Rand des Intervalls bei x = 6,5 maximal.

3. <u>Änderung der Wassermenge</u>

$z(5)=(5^2-10\cdot 5+24)\cdot e^{\frac{5}{2}}=-e^{2,5}<0$. Zum Zeitpunkt x = 5 ist die Zulaufrate negativ, das heißt, dass aus dem Stausee Wasser herausläuft.

4. <u>Stärkste Änderung der Zulaufrate</u>

Notwendige Bedingung $z''(x)=0$

$$z''(x)=\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-2\right)\cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-2=0 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0$$
$$\Rightarrow x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+8}=1\pm 3$$

$x_2=-2$ entfällt, weil es sich um eine Zeit handelt bzw. außerhalb des vorgegebenen Definitionsbereichs liegt.

Hinreichende Bedingung: $z''(x)=0$ und $z'''(x)\neq 0$

$z'''(x)=\left(\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ ist gegeben

$$z'''(4) = \left(\frac{1}{8}\cdot 4^2 + \frac{1}{4}\cdot 4 - \frac{3}{2}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 4} = \left(2+1-\frac{3}{2}\right)\cdot e^2 = \frac{3}{2}e^2 \neq 0$$

Es gilt $z'(6{,}5) = 93{,}49 > -14{,}78 = z'(4)$ **stärkste Änderung am Rand des Intervalls.**

Am stärksten fällt die Zulaufrate allerdings bei x = 4.

5. Die Fläche, die der Graph der Funktion z(x) mit der x-Achse einschließt, beschreibt die Wassermenge, die insgesamt in das Becken hinein- und herausgelaufen ist. Da die Fläche oberhalb der x-Achse größer ist als die Fläche unterhalb der x-Achse, bedeutet das, dass zur Anfangsmenge mehr Wasser zugelaufen als abgelaufen ist, also wird der Anfangszustand nicht wieder erreicht.

6. Zur Lösung der Aufgabe 6 verwende man folgenden Zusammenhang:

   Ist $w(x)$ mit $x \in [x_1; x_2]$ die momentane Änderungsrate einer Größe B und $B(x_1)$ der Bestand der Größe zum Zeitpunkt x_1, dann gilt für den Bestand der Größe zum Zeitpunkt x_2:

$$\boxed{B(x_2) = B(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} w(x)dx}$$

   Hier ist $B(x_1) = B(0) = 5000$ und $x_2 = 3$; w(x) in 10000 Bakterien pro Tag

$$B(3) = 5000 + 10000\cdot\int_0^3 (x^3 - 12x^2 + 35x)dx = 5000 + 10000\cdot\left(\frac{x^4}{4} - 4x^3 + \frac{35}{2}x^2\right)\Big|_0^3$$

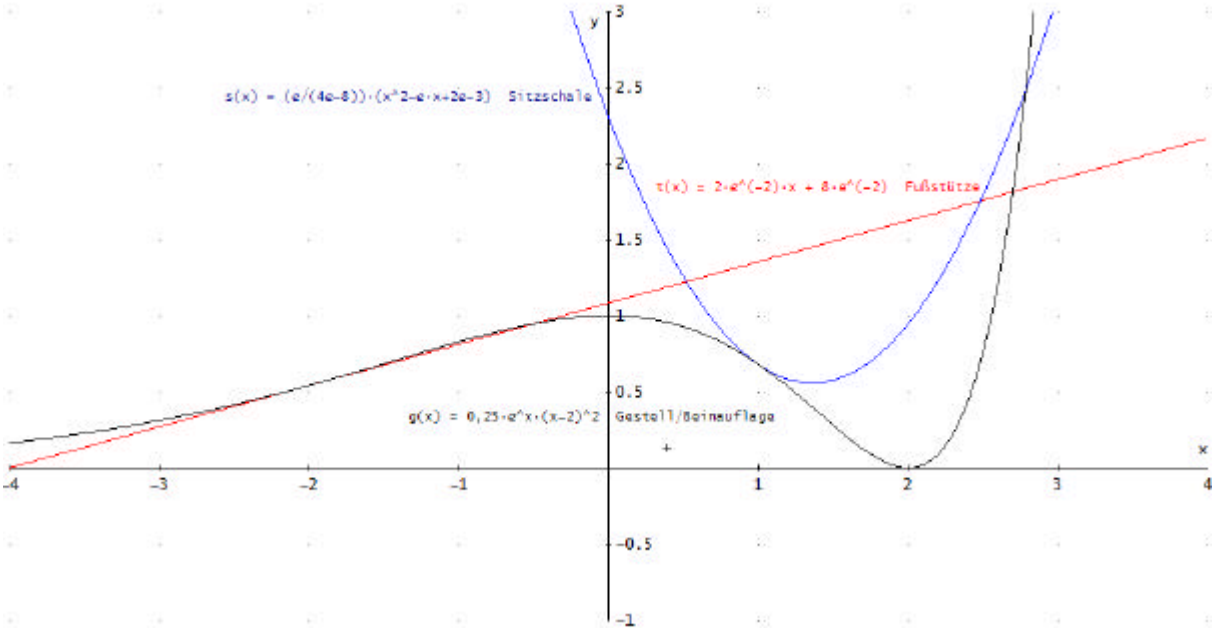
$$= 5000 + 10000\cdot\left(\frac{3^4}{4} - 4\cdot 3^3 + \frac{35}{2}\cdot 3^2 - 0\right) = 5000 + 10000\cdot\left(\frac{81}{4} - 4\cdot 27 + \frac{35}{2}\cdot 9\right)$$

$$= 702500$$

   Nach 3 Tagen sind 702500 Bakterien im Stausee.

Die Veröffentlichung dieser Lösung geschieht ohne inhaltliche Prüfung durch die Bezirksregierung Düsseldorf und den Mathe-Treff.
Die Lösung stammt nicht vom Originalautor der Aufgabe, sondern von einem Leser des Mathe-Treffs. Wir bedanken uns herzlich für die Erstellung der Aufgabenlösung.

Lösung zu Aufgabe Nr. 10 – Wellnessliege



Die Abbildung zeigt die drei in der Aufgabe betrachteten Graphen.

a1) Mit der Produkt- und Kettenregel folgt

$$g'(x) = \frac{1}{4} \cdot e^x \cdot (x-2)^2 + \frac{1}{4} \cdot e^x \cdot 2 \cdot (x-2) = \frac{1}{4} \cdot e^x \cdot (x^2 - 4x + 4 + 2x - 4) = \frac{1}{4} \cdot e^x \cdot (x^2 - 2x)$$

a2) $m = g'(-2) = 2 \cdot e^{-2}$ und $g(-2) = 4 \cdot e^{-2}$ $\quad \Rightarrow t(x) = 2 \cdot e^{-2} \cdot x + 8 \cdot e^{-2}$

a3) Die Fußstütze ist sinnvoll im Bereich zwischen dem Erdboden und dem Berührpunkt mit dem Graphen von g, also zwischen $t(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4$ und der Berührstelle $x = -2$.

<u>Bereich:</u> $-4 \le x \le -2$

b1) Knickfrei bedeutet: $g(1) = s(1)$ und $g'(1) = s'(1)$

$$s'(x) = \frac{e}{4e-8} \cdot (2x - e) = \frac{e}{4(e-2)} \cdot (2x - e)$$

$$s'(1) = \frac{e}{4(e-2)} \cdot (2 - e) = -\frac{e}{4(e-2)} \cdot (e - 2) = -\frac{e}{4} = g'(1)$$

$$s(1) = \frac{e}{4(e-2)} \cdot (1 - e + 2e - 3) = \frac{e}{4(e-2)} \cdot (-2 + e) = \frac{e}{4} = g(1)$$

b2) notwendige Bedingung für Extrema: $s'(x) = 0$

$$\frac{e}{4e-8} \cdot (2x - e) = 0 \Leftrightarrow 2x - e = 0 \Leftrightarrow x = \frac{e}{2}$$

hinreichende Bedingung $s'(x) = 0$ und $s''(x) \neq 0$

$s''(x) = \frac{e}{4e-8} \cdot 2 = \frac{e}{2e-4} > 0$ für alle x, also auch für $x = \frac{e}{2}$ $\Rightarrow$ Tiefpunkt

$$s\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{e}{4(e-2)} \cdot \left(\left(\frac{e}{2}\right)^2 - e \cdot \left(\frac{e}{2}\right) + 2e - 3\right) = \frac{e}{4(e-2)} \cdot \left(\frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{2} + 2e - 3\right)$$

$$= \frac{e}{4(e-2)} \cdot \left(-\frac{e^2}{4} + 2e - 3\right) = \frac{e}{16(e-2)} \cdot (e^2 - 8e + 12) = \frac{e}{16(e-2)} \cdot (e-2) \cdot (e-6)$$

$$= \frac{e}{16} \cdot (e-6) = \frac{e^2}{16} - \frac{3e}{8}$$

$$\Rightarrow \quad TP\left(\frac{e}{2}; \frac{e^2}{16} - \frac{3e}{8}\right)$$

c1) Es handelt sich um die Fläche zwischen x – Achse und den Graphen von g und t.

c2) $x = -4$ ist die Nullstelle von t (vergleiche a3))

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ist Nullstelle von g

$g(0) = 1$ ist der Schnittpunkt des Graphen von g mit der y-Achse.

Das Rechteck hat eine Mindestlänge von $6 \cdot 0{,}25m = 1{,}5m$ und eine Mindestbreite von $1 \cdot 0{,}25m = 0{,}25m$

c3) Die Fläche setzt sich zusammen aus der Fläche unterhalb der Tangente im Bereich von -4 bis -2 und der Fläche unterhalb des Graphen von g von -2 bis 2.

$$A = A_{Dreieck} + A_{G_g} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot e^{-2} + G(2) - G(-2)$$

$$= 4 \cdot e^{-2} + \frac{1}{4} e^{2} \cdot (4 - 12 + 10) - \frac{1}{4} e^{-2} \cdot (4 + 12 + 10)$$

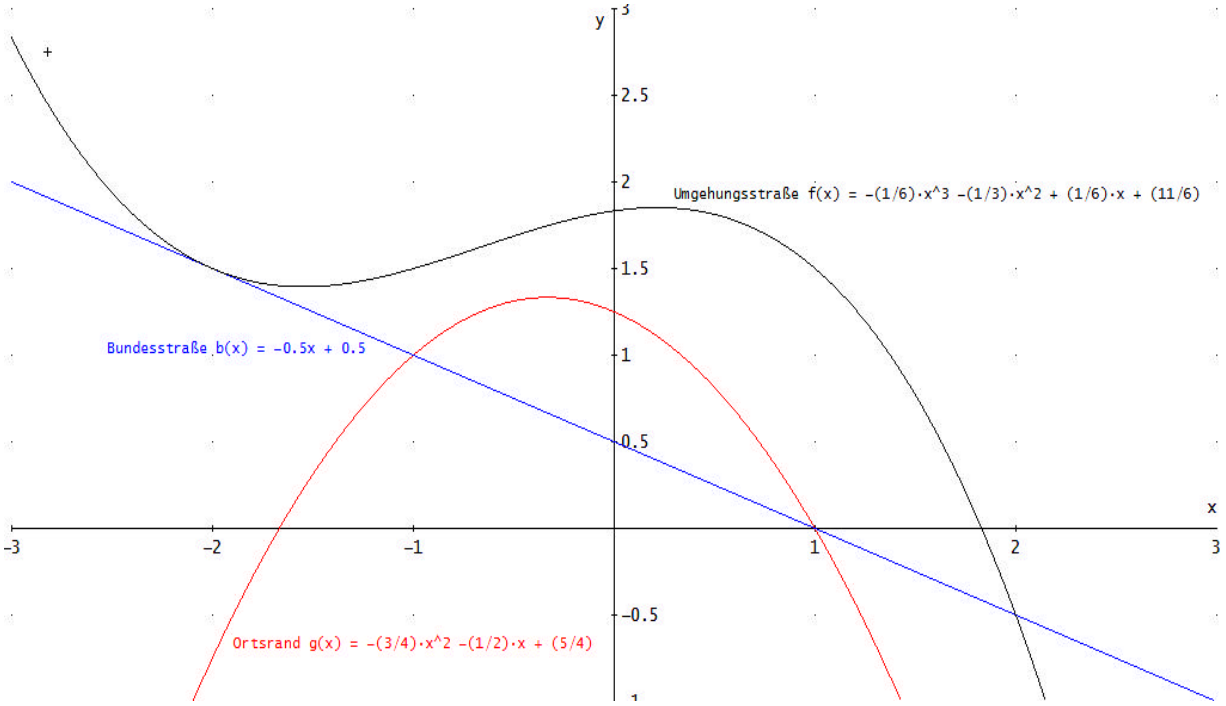
$$= 4e^{-2} + \frac{1}{2} e^{2} - \frac{13}{2} e^{-2} = \frac{1}{2} e^{2} - \frac{5}{2} e^{-2} \approx 3{,}4$$

$$3{,}4 \cdot 0{,}25 m^2 = 0{,}85 m^2$$

Das Ergebnis ist falsch, richtig wäre: $3{,}4 * 0{,}25^2 = 0{,}21$ *Roolfs*

Die Veröffentlichung dieser Lösung geschieht ohne inhaltliche Prüfung durch die Bezirksregierung Düsseldorf und den Mathe-Treff.
Die Lösung stammt nicht vom Originalautor der Aufgabe, sondern von einem Leser des Mathe-Treffs. Wir bedanken uns herzlich für die Erstellung der Aufgabenlösung.

Lösung zu Aufgabe Nr. 11 – Umgehungsstrasse



1. Die alte Bundesstraße verläuft durch die Punkte A(-2|1,5) und C(2|-0,5) und schneidet die y-Achse im Punkt (0|0,5).

   Die Steigung der linearen Funktion, die diese Straße beschreibt ist

   $$m = \frac{-0{,}5-1{,}5}{2-(-2)} = -\frac{1}{2}$$

   $$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

2. Die Umgehungsstraße verläuft durch die Punkte A, C, B(1|1,5) und schließt glatt in A an die alte Straße an, also gilt im Punkt A: Steigung ist –0,5

   $$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad ; \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

   I. $f(-2) = -8a + 4b - 2c + d = 1{,}5$

   II. $f(1) = a + b + c + d = 1{,}5$

III. $f(2) = 8a + 4b + 2c + d = -0{,}5$

IV. $f'(-2) = 12a - 4b + c = -0{,}5$

$II' = II. - I. \Leftrightarrow 9a - 3b + 3c = 0$

$IV' = 3 \cdot IV - 4 \cdot II' \Leftrightarrow -9c = -1{,}5 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow c = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

$III' = III. - I. \Leftrightarrow 16a + 4c = -2$

c in III': $16a = -2 - 4 \cdot \frac{1}{6} \Leftrightarrow 16a = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{6}$

a und c in II': $-3b = -9a - 3c = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{3}$

a, b, c in II.: $d = 1{,}5 - a - b - c = \frac{3}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$

also $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{11}{6}$

3. Man bestimme das Minimum der Differenzfunktion $g(x) = 2 - f(x)$

$g'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$

$g''(x) = x + \frac{2}{3}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{3}{9}} = -\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3} \cdot \sqrt{7}$

$g''\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}\right) = +\frac{1}{3}\sqrt{7} > 0 \Rightarrow TP\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7} \mid \frac{61}{162} - \frac{7 \cdot \sqrt{7}}{81}\right) \approx TP(0{,}22 \mid 0{,}148)$

Der minimale Abstand beträgt ungefähr 150 m, die Bedingungen sind also erfüllt.

4. Gesucht ist der Wendepunkt der Funktion f

$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$

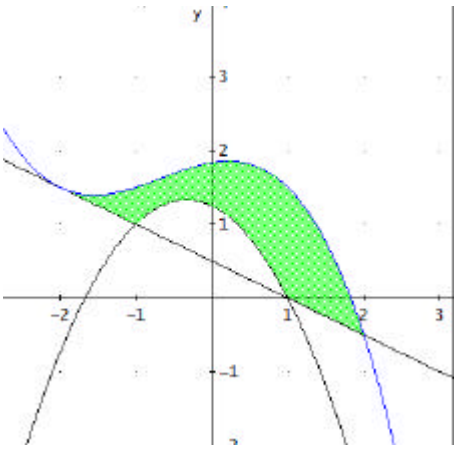
$f''(x) = -x - \frac{2}{3}$

$f'''(x) = -1$

Der Wendepunkt ergibt sich zu $WP\left(-\frac{2}{3} \mid \frac{263}{162}\right)$ oder $\approx WP(-0{,}67 \mid 1{,}62)$

Am Wendepunkt ändert sich das Krümmungsverhalten.

5. <u>Darstellung der gesuchten Fläche</u>



$$h(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{11}{6}$$

$$g(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

$$A = \int_{-2}^{2} (f(x) - h(x))dx - \int_{-1}^{1} (g(x) - h(x))dx$$

$$\int_{-2}^{2} \left(\left(-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{11}{6} \right) - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) \right) dx = \left(-\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{12}x^2 + \frac{11}{6}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \left(-\frac{1}{24} \cdot 16 - \frac{1}{9} \cdot 8 + \frac{1}{12} \cdot 4 + \frac{11}{6} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \right)$$

$$- \left(-\frac{1}{24} \cdot 16 - \frac{1}{9} \cdot (-8) + \frac{1}{12} \cdot 4 + \frac{11}{6} \cdot (-2) + \frac{1}{4} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot (-2) \right)$$

$$= -\frac{2}{3} - \frac{8}{9} + \frac{1}{3} + \frac{11}{3} + 1 - 1 - \left(-\frac{2}{3} + \frac{8}{9} + \frac{1}{3} - \frac{11}{3} + 1 + 1 \right) = \frac{22}{9} + \frac{10}{9} = \frac{32}{9}$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\left(-\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \right) - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) \right) dx$$

$$= \left(-\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = 1$$

Größe der Fläche $A = \left(\frac{32}{9} - 1\right) km^2 \approx 2{,}6 km^2 = 2{,}6 \cdot 10^6 m^2$

Die Einnahmen betragen also ungefähr 26 Mio. Euro.

Die Veröffentlichung dieser Lösung geschieht ohne inhaltliche Prüfung durch die Bezirksregierung Düsseldorf und den Mathe-Treff.
Die Lösung stammt nicht vom Originalautor der Aufgabe, sondern von einem Leser des Mathe-Treffs. Wir bedanken uns herzlich für die Erstellung der Aufgabenlösung.

Lösung zu Aufgabe Nr. 12 – Funktionenschar

Alternativlösung

Hinweis: Der Fall k = 0 führt auf die Funktion $f_0(x) = 1 - x$, dieser Fall wird bis Aufgabenteil d nicht berücksichtigt.

a)

Gemeinsamkeiten:

i.	Alle Graphen haben mindestens eine Nullstelle
ii.	Gemeinsame Asymptote
iii.	2 Wendepunkte
iv.	gemeinsamer Punkt P(0|-1)

Unterschiede:

keinen oder zwei Extrempunkte

b)

Es gilt völlig unabhängig von k: $f_k(0) = -1$, d.h. alle Graphen der Schar schneiden sich im Punkt P(0|-1).

Man kann sogar zeigen, dass P(0|-1) der einzige Schnittpunkt der Schar ist:

Für $x \neq 0$ und $t \neq k$ gilt nämlich:

$$\frac{x^2-k}{x^2+k} - x = \frac{x^2-t}{x^2+t} - x \Leftrightarrow (x^2-k)(x^2+t) = (x^2-t)(x^2+k)$$
$$\Leftrightarrow x^4 + (t-k)x^2 - kt = x^4 + (k-t)x^2 - kt \Leftrightarrow' (t-k)x^2 = (k-t)x^2$$

und wegen $x \neq 0 \Rightarrow t-k = k-t \Leftrightarrow 2t = 2k \Leftrightarrow t = k$ Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

c) $f_k'(x) = \dfrac{2x(x^2+k) - (x^2-k)\cdot 2x}{(x^2+k)^2} - 1 = \dfrac{4kx}{(x^2+k)^2} - 1$

$$f_k''(x) = \frac{4k(x^2+k)^2 - 4kx\cdot 2(x^2+k)\cdot 2x}{(x^2+k)^4} = \frac{4k(x^2+k) - 16kx^2}{(x^2+k)^3} = \frac{-12kx^2 + 4k^2}{(x^2+k)^3}$$

$$f_k'''(x) = \frac{-24kx \cdot (x^2+k)^3 - (-12kx^2+4k^2) \cdot 3 \cdot (x^2+k)^2 \cdot 2x}{(x^2+k)^6}$$

$$= \frac{-24kx \cdot (x^2+k) - 6x \cdot (-12kx^2+4k^2)}{(x^2+k)^4} = \frac{48kx^3 - 48k^2x}{(x^2+k)^4}$$

$$f_k'(x) = \frac{2x(x^2+k) - (x^2-k) \cdot 2x}{(x^2+k)^2} - 1 = \frac{4kx}{(x^2+k)^2} - 1$$

$$f_k''(x) = \frac{4k(x^2+k)^2 - 4kx \cdot 2(x^2+k) \cdot 2x}{(x^2+k)^4} = \frac{4k(x^2+k) - 16kx^2}{(x^2+k)^3} = \frac{-12kx^2+4k^2}{(x^2+k)^3}$$

$$f_k'''(x) = \frac{-24kx \cdot (x^2+k)^3 - (-12kx^2+4k^2) \cdot 3 \cdot (x^2+k)^2 \cdot 2x}{(x^2+k)^6}$$

$$= \frac{-24kx \cdot (x^2+k) - 6x \cdot (-12kx^2+4k^2)}{(x^2+k)^4} = \frac{48kx^3 - 48k^2x}{(x^2+k)^4}$$

<u>Wendestellen:</u>

<u>notwendige Bedingung:</u> $f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow -12kx^2 + 4k^2 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot k(-3x^2+k) = 0$

Wegen $k \neq 0$ (vergleiche Hinweis am Anfang), folgt:

$$x_1 = \sqrt{\frac{k}{3}} = \frac{\sqrt{3k}}{3} \text{ und } x_2 = -\frac{\sqrt{3k}}{3}$$

<u>hinreichende Bedingung:</u> $f_k''(x) = 0$ und $f_k'''(x) \neq 0$

$$f_k'''\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right) = \frac{48k\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)^3 - 48k^2\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)}{\left(\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)^2 + k\right)^4} = \frac{\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)\left(48k \cdot \left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)^2 - 48k^2\right)}{\left(\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)^2 + k\right)^4}$$

$$= \frac{\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right) \cdot \left(48k \cdot \frac{3k}{9} - 48k^2\right)}{\left(\frac{1}{3}k + k\right)^4} = \frac{-32k^2\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)}{\frac{256}{81}k^4} = \frac{\mp 32 \cdot \sqrt{3k} \cdot 81}{256k^2 \cdot 3} = \frac{\mp 27\sqrt{3}}{8\sqrt{k^3}} \neq 0$$

Für einen Sattelpunkt muss zusätzlich gelten $f_k^{'}\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)=0$

also

$$0=f_k^{'}\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)=\frac{4k\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)}{\left(\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)^2+k\right)^2}-1=\frac{4k\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)}{\left(\frac{4}{3}k\right)^2}-1=\frac{4k\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)-\left(\frac{4}{3}k\right)^2}{\left(\frac{4}{3}k\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 0=4k\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)-\left(\frac{4}{3}k\right)^2=4k\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)-\left(\frac{4}{3}k\right)^2\Leftrightarrow\pm\frac{4}{3}\sqrt{3}\cdot k\cdot\sqrt{k}-\frac{16}{9}k^2$$

$$=\frac{4}{3}k\cdot\sqrt{k}\left(\pm\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{k}\right)$$

Wegen $k\neq 0$ folgt $\pm\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{k}=0\Leftrightarrow\frac{4}{3}\sqrt{k}=\pm\sqrt{3}$

Für den Fall Minus gibt es keine Lösung, für den Fall Plus gilt: $\frac{16}{9}k=3\Leftrightarrow k=\frac{27}{16}$

Nur für $k=\frac{27}{16}$ gilt $f_k^{'}(x)=0$, deshalb hat nur dieser Graph der Schar einen Sattelpunkt.

d) $f_k(x)=\frac{x^2-k}{x^2+k}-x$

$x^2+k=0\Leftrightarrow x^2=-k$, für negative k haben die Graphen Polstellen

e) Berechnung der Schnittstellen für k > 0

$$f_0(x)=f_k(x)\Leftrightarrow 1-x=\frac{x^2-k}{x^2+k}-x\Leftrightarrow 1=\frac{x^2-k}{x^2+k}\Leftrightarrow x^2+k=x^2-k\Leftrightarrow k=0$$

Es gibt also keine Schnittstellen.

$$\int_a^b(f_k(x)-f_0(x))dx=\int_a^b\left(\frac{x^2-k}{x^2+k}-1\right)dx=\int_a^b\left(\frac{-2k}{x^2+k}\right)dx=$$

$$=-2k\cdot\int_a^b\frac{1}{k\cdot\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^2\right)}dx=-2\cdot\sqrt{k}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)\Big|_a^b=-2\sqrt{k}\left(\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{k}}\right)-\arctan\left(\frac{b}{\sqrt{k}}\right)\right)$$

Für $a\to+\infty$ und $b\to-\infty$ ergibt sich für das Integral der Wert $-2p\cdot\sqrt{k}$

Unendliche Fläche mit dem endlichen Flächeninhalt $A_k=2p\cdot\sqrt{k}$

Betrachtet man statt der Funktion $f_0(x)$ die Funktion $g(x) = -x$, so erhält man die Schnittstellen $a = -\sqrt{k}$ und $b = \sqrt{k}$

$$\left|\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{x^2 - k}{x^2 + k}\,dx\right| = \left|\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \left(1 - \frac{2k}{x^2 + k}\right)dx\right| = \left|x - 2k\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{1}{k \cdot \left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^2\right)}dx\right|$$

$$= \left|x - 2\sqrt{k} \cdot \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)\Big|_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}\right| = \left|\sqrt{k} - 2\sqrt{k}\,\arctan(1) - (-\sqrt{k} - 2\sqrt{k}\,\arctan(-1))\right|$$

$$= \left|2\sqrt{k} - p\sqrt{k}\right| = \left|(2-p)\sqrt{k}\right| \approx \left|-1{,}14 \cdot \sqrt{k}\right| = 1{,}14 \cdot \sqrt{k}$$

---

f)

f1) $f_{0,5}(x) = \dfrac{x^2 - 0{,}5}{x^2 + 0{,}5} - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 0{,}5 - x^3 - 0{,}5x = 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$

Mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems erhält man näherungsweise die Nullstelle

$x_0 \approx -0{,}4406$

$$A_{0,5} = \left|\int_{-0{,}4406}^{0} \left(\frac{x^2 - 0{,}5}{x^2 + 0{,}5} - x\right)dx\right| = \left|x - 2\sqrt{0{,}5} \cdot \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{0{,}5}}\right) - \frac{1}{2}x^2\,\Big|_{-0{,}4406}^{0}\right|$$

$$= \left|-0{,}2504\right| = 0{,}2504 \text{ FE}$$

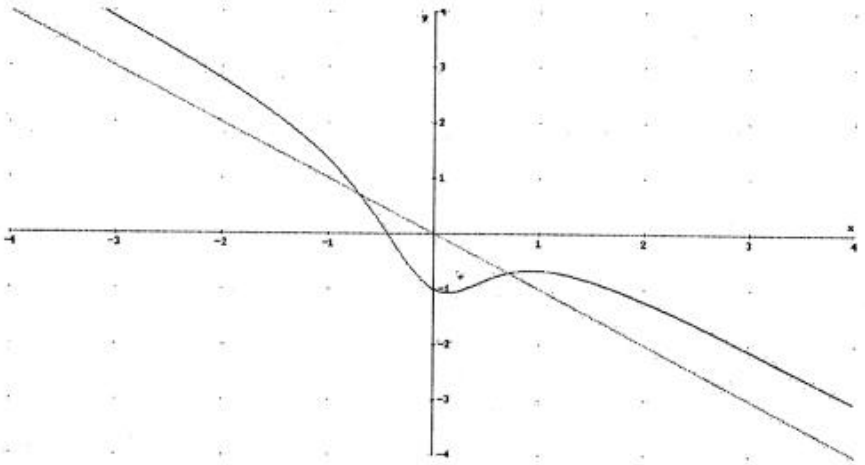
f2)

Die Flächen liegen alle im Dreieck A(0|0); B(-1|0) (vgl. Nullstelle) und C(0|-1) (vgl.Teil b)

Es gilt also die Abschätzung $A_k \le \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$

	I	II	III
a) Gemeinsamkeiten:			
i. (mindestens?) eine Nullstelle			
ii. gemeinsame Asymptote			
iii. 2 Wendepunkte			
iv. gemeinsamer Punkt P(0/ -1)	3	3	
Unterschiede: keinen oder zwei Extrempunkte			
b) Vermutung: P(0/ -1) ist der einzige Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen.			
Nachweis: Sei $x \neq 0$: $\frac{x^2-k_1}{x^2+k_1} - x = \frac{x^2-k_2}{x^2+k_2} - x$			
$\Rightarrow (x^2-k_1)(x^2+k_2) = (x^2-k_2)(x^2+k_1)$			
$\Rightarrow (k_2-k_1)\cdot x^2 = (k_1-k_2)\cdot x^2 \quad \Rightarrow (k_2-k_1) = (k_1-k_2)$, da $x \neq 0 \Rightarrow k_1 = k_2$		5	
Da $f_k(0) = -1$ unabhängig von k ist, ist der Nachweis dafür erbracht, dass sich je zwei Funktionsgraphen nur in diesem Punkt schneiden.			
c) $f_k''(x) \overset{TR}{=} \frac{-4(3x^2-k)\cdot k}{(x^2+k)^3}$ $\quad f_k'''(x) \overset{TR}{=} \frac{48(x^2-k)\cdot kx}{(x^2+k)^4}$	3		
$f_k''(x) = 0 \overset{TR}{\Leftrightarrow} x = \frac{-\sqrt{3k}}{3} \vee x = \frac{\sqrt{3k}}{3}$.	2	2	
Da in beiden Fällen die 3. Ableitung ungleich Null $(-/+\frac{27\sqrt{3}}{8\sqrt{k^3}}.)$ ist, liegen Wendestellen vor. Damit sogar ein Sattelpunkt vorliegt, muss auch die 1. Ableitung an diesen Stellen Null werden:	2		
$f_k'(\frac{-\sqrt{3k}}{3}) \overset{TR}{=} \frac{-9\cdot(\frac{16k^2}{9} + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{k^3})}{16k^2} \neq 0$ für alle $k > 0$	2	1	
$f_k'(\frac{\sqrt{3k}}{3}) \overset{TR}{=} \frac{-9\cdot(\frac{16k^2}{9} - 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{k^3})}{16k^2} = 0$ für alle $k > 0$			
$\Rightarrow \frac{16k^2}{9} - 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{k^3} = 0 \overset{TR}{\Rightarrow} k = \frac{27}{16}$.			
Nur für $k = \frac{27}{16}$ ist gleichzeitig auch die 1. Ableitung gleich Null und es liegt somit ein Sattelpunkt vor.	2	3	
d) Berechnung der Schnittstellen: $f_k(x)=g(x)$			
$\frac{x^2-k}{x^2+k} = 0 \Rightarrow x^2 - k = 0 \Rightarrow x = \sqrt{k} \vee x = -\sqrt{k}$	2		
Für die Fläche ergibt sich somit:			
$\left\lvert \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \frac{x^2-k}{x^2+k}\,dx \right\rvert \overset{TR}{=} \left\lvert 2\sqrt{k} - \pi\sqrt{k} \right\rvert = (\pi-2)\sqrt{k} \approx 1{,}14\sqrt{k}$ FE	2	2	

Stizze:



	2		
e) e_1) Nullstelle: $\frac{x^2-0{,}5}{x^2+0{,}5}-x=0 \overset{TR}{\Rightarrow} -2x^3+2x^2-x-1=0$	2		
Mit Hilfe des TR wird näherungsweise die negative Nullstelle bestimmt. Dazu ist – anhand der Zeichnung – ein geeignetes Intervall anzugeben: [-1 ; 0]. $\overset{TR}{\Rightarrow} x \approx -0{,}4406$	1	3	
Gesuchter Flächeninhalt: $A_{0,5}=\left\lvert\int_{-0{,}4406}^{0}\left(\frac{x^2-0{,}5}{x^2+0{,}5}-x\right)dx\right\rvert \overset{TR}{=} \lvert -0{,}2504\rvert = 0{,}2504$ FE	3		
e_2) Die Flächen liegen alle im Dreieck ABC mit A(0/0), B(-1/ 0) und C(0/ -1). Also gilt: $A_k \le \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$.			4
ΣA1	26	19	4
%	53	39	8

Die Veröffentlichung dieser Lösung geschieht ohne inhaltliche Prüfung durch die Bezirksregierung Düsseldorf und den Mathe-Treff.
Die Lösung stammt nicht vom Originalautor der Aufgabe, sondern von einem Leser des Mathe-Treffs. Wir bedanken uns herzlich für die Erstellung der Aufgabenlösung.

Aufgabe 13 mit Lösung

Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{8a^3}(x^4 - 8a^2x^2) + 2,\ x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^{\neq 0}$.

a) Untersuchen Sie für $a > 0$ den Graphen zu f_a auf Symmetrie sowie auf sein Verhalten für $|x| \to \infty$. Bestimmen Sie die Extrem- und Wendepunkte des Graphen in Abhängigkeit von a.

1. $f_a(-x) = \frac{1}{8a^3}\left((-x)^4 - 8a^2(-x)^2\right) + 2 = \frac{1}{8a^3}\left(x^4 - 8a^2x^2\right) + 2 = f_a(x) \Rightarrow$ *Achsensymmetrie*.

2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left[\frac{1}{8a^3}\left(x^4 - 8a^2x^2\right) + 2\right] = \infty \mid -\infty \qquad \mid Fall: c_{+\mid -} \cdot \infty + d \ \ (a > 0!) \mid a < 0$

3. Extrempunkte

3.1 NB: $f_a'(x) = \frac{1}{8a^3}\left(4x^3 - 16a^2 \cdot x\right) = \frac{1}{4a^3}x\left(x^2 - 4a^2\right) = \frac{1}{4a^3}x(x+2a)(x-2a)$

$\Rightarrow MESt(f_a) = \{-2a; 0; 2a\}$

3.2 HB: $f_a'(x) = 0 \wedge VZW(f_a')$ *bei* $x \Rightarrow x$ *Extremstelle von* f_a' $\quad a < 0 \quad$ VZ der EP

Stelle	$\frac{1}{4a^3}$	x	$x+2a$	$x-2a$	*VZW*	*EPArt*	*Wert*	$a<1$	$a=1$	$a>1$
$x=0$	$+\mid -$	$-/+$	$+$	$-$	$+/-\mid -/+$	$HP \mid TP$	2			
$x=-2a$	$+\mid -$	$-$	$-/+$	$-$	$-/+\mid +/-$	$TP \mid HP$	$2-2a$	$+$	0	$-$
$x=2a$	$+\mid -$	$+$	$+$	$-/+$	$-/+\mid +/-$	$TP \mid HP$	$2-2a$	$+$	0	$-$

Die zusätzlichen farbigen Angaben dienen der Unterstützung von Erklärungen in nachfolgenden Aufgabenteilen. Bei einer händischen Lösung dürfen sie ruhig etwas gequetscht – aber bitte deutlich von der eigentlichen Lösung abgesetzt – eingefügt werden, weil man im Vorhinein ja nicht unbedingt die Notwendigkeit des Nachtragens sieht. Wenn man aber grundsätzlich damit rechnet und die Vorteile sieht, sollte man alle Tabellen und anderen Darstellungen im Ansatz großzügig anlegen.

3.3 Wert: $f_a(0) = 2$; $f_a(\pm 2a) = \frac{1}{8a^3}\left(16a^4 - 8a^2 \cdot 4a^2\right) + 2 = 2 - 2a$

Die Berechnung 3.3 kann auf einem NR-Zettel erfolgen. Die Angabe der Werte in der erweiterten Tabelle genügt.

4. Wendepunkte

4.1 NB: $f_a''(x) = \frac{1}{8a^3}\left(12x^2 - 16a^2\right) = \frac{1}{2a^3}\left(3x^2 - 4a^2\right) = \frac{1}{2a^3}\left(\sqrt{3} \cdot x - 2a\right)\left(\sqrt{3} \cdot x + 2a\right)$

$\Rightarrow MWSt = \left\{-\frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot a; \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot a\right\}$

4.2 HB: $f_a''(x) = 0 \wedge VZW(f_a'')$ *bei* $x \Rightarrow x$ *Wendestelle von* f_a'

Stelle	$\frac{1}{2a^3}$	$\sqrt{3} \cdot x + 2a$	$\sqrt{3} \cdot x - 2a$	*VZW*	*PA*	*Wert*
$x = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot a$	$+$	$-/+$	$-$	$+/-$	*WP*	$2 - \frac{10}{9}a$
$x = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot a$	$+$	$+$	$-/+$	$-/+$	*WP*	$2 - \frac{10}{9}a$

Beim (+/-)-VZW steigt die Ableitung vor der Nullstelle – dahinter fällt sie. Die Krümmung geht also von einer Linkskrümmung in eine Rechtkrümmung über – beim (-/+)-VZW ist es umgekehrt.

b) 1. Bestimmen Sie denjenigen Wert von a hat, für den der zu f_a gehörende Graph einen Extrempunkt auf der x-Achse hat.

5.1 Es muss gelten: $f_a'(x)=0 \wedge f_a(x)=0$ (NB).

Da beide Gleichungen erfüllt sein müssen, kommen höchstens die Lösungen der ersten Gleichung als Lösung des Systems in Frage; die setze ich in die zweite Gleichung ein.

i) $f_a(0)=2\neq 0 \ (\textit{passt nicht!})$

ii) $f_a(\pm 2a)=2-2a=0 \Leftrightarrow a=1$

Höchstens $a=1$ kann der gesuchte Wert sein; ich überprüfe, ob dafür auch tatsächlich ein Extrempunkt der verlangten Art vorliegt.

5.2 $f_1''(\pm 2)=\frac{1}{8}\left(12x^2-16\right)_{|x=\pm 2}=\frac{1}{8}(12\cdot 4-16)=4\neq 0 \wedge f_1'(\pm 2)=0 \Rightarrow$ Extrempunkte bei -2 und 2.

5.3 ~~Es gibt keinen Wert für *a* mit einem Extrempunkt auf der *x*-Achse!~~ Ups!
a muss den Wert 1 haben.

2. Beschreiben Sie den Verlauf der Graphen für negative Werte a und begründen Sie Ihre Aussage.

Mit $f_a(x)=g_a(x)+2$ gilt:

$$f_{-a}(x)=\frac{1}{8(-a)^3}\left(x^4-8(-a)^2x^2\right)+2=-\frac{1}{8a^3}\left(x^4-8a^2x^2\right)+2=-g_a(x)+2.$$

Der Graph von f_{-a} ergibt sich aus dem Graphen von f_a durch Spiegelung an der Geraden $y=2$. Er hat entsprechend gespiegelte Grenz-, Extrem- und Wendewerte – die Stellen bleiben dieselben; auch die Achsensymmetrie bleibt erhalten.

3. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f in Abhängigkeit von a.

NSt: $f_a(x)=\frac{x^4-8a^2x^2+16a^3}{8a^3}=0 \Leftrightarrow x^4-8a^2x^2+16a^3=0$

Substitution:

$$z=4a^2\pm\sqrt{16a^4-16a^3}=4a^2\pm 4a\sqrt{a^2-a}=4a^2\pm 4a\sqrt{a(a-1)}$$

Anzahl der Nullstellen:

VZ	$a<$	0	$<a<$	1	$<a$
a	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$a-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$gesamt$	$+$	0	$-$	0	$+$

Anzahl der Lösungen für z: $\begin{cases} 0 & \textit{für} \quad 0<a<1 & (1) \\ 1 & \textit{für} \quad [a=0\vee]a=1 & (2) \\ 2 & \textit{für} \quad a<0\vee a>1 & (3) \end{cases}$

Rücksubstitution:

(1) $\underline{0<a<1}$: $\underline{\underline{0 \textit{ Nullstellen}}}$ *für x*

(2) $\underline{a=1}$: $\underline{\underline{2 \textit{ Nullstellen}}}$, *nämlich* -2 *und* 2 *für x*

(3) $\underline{a<0\vee a>1}$:

Hier muss nachgewiesen werden, ob die z-Terme kleiner, gleich oder größer als null sind; dann liegen 0, 1 bzw. 2 Nullstellen für z und somit 0, 1 (wenn der z-Wert null ist), 2 (wenn der z-Wert positiv ist), 3 (wenn ein z-Wert null und der andere größer als null ist) oder 4 Nullstellen (wenn die z-Werte positiv sind) für x vor.

(3.1) Fall: $4a^2 \pm 4a\sqrt{a(a-1)} = 0$ *die Folge wäre: eine Nullstelle für x, nämlich 0!*

① $4a^2 + 4a\sqrt{a(a-1)} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4a^2 = -4a\sqrt{a(a-1)} \qquad |\,Quadrieren\ \ für\ a < 0\,*)$

$\Leftrightarrow \quad 16a^4 = 16a^2 \cdot a(a-1) \qquad |:16a^3\ (\neq 0!)$

$\Leftrightarrow \quad a = a - 1 \qquad |-a$

$\Leftrightarrow \quad 0 = -1 \qquad [\,falsch!]$

② $4a^2 - 4a\sqrt{a(a-1)} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4a^2 = 4a\sqrt{a(a-1)} \qquad |\,Quadrieren\ \ für\ a > 0\,*)$

$\Leftrightarrow \quad 16a^4 = 16a^2 \cdot a(a-1) \qquad |:16a^3\ (\neq 0!)$

$\Leftrightarrow \quad a = a - 1 \qquad |-a$

$\Leftrightarrow \quad 0 = -1 \qquad [\,falsch!]$

Die beiden nebenstehenden Gleichungen haben die Lösung $a = 0$; dieser Wert kommt hier nicht in Frage.

Die Einschränkungen für a kommen zustande, weil nur bei gleichem Vorzeichen beider Seiten das Quadrieren eine Äquivalenzumformung ist.

*) Für $a > 0$ *bei* ① *bzw.* $a < 0$ *bei* ② gibt es auch keine Lösung für *a*, weil die Seiten verschiedenes Vorzeichen haben.

(3.2) Fall: $4a^2 \pm 4a\sqrt{a(a-1)} < 0$ *die Folge wäre: keine Nullstelle für x!*

③ $4a^2 + 4a\sqrt{a(a-1)} < 0$

$\Leftrightarrow \quad 4a^2 < -4a\sqrt{a(a-1)} \qquad |\,Quadrieren\ \ für\ a < 0\,**)$

$\Leftrightarrow \quad 16a^4 < 16a^2 \cdot a(a-1) \qquad |:16a^3\,(< 0!)$

$\Leftrightarrow \quad a > a - 1 \qquad |-a$

$\Leftrightarrow \quad 0 > -1 \qquad [wahr!]$

**) Für $a > 0$ gibt es keine Lösung für *a*, weil die rechte Seite dann negativ ist und nicht größer als die linke, positive Seite sein kann.

$x^2 = z = 4a^2 + 4a\sqrt{a(a-1)}$ liefert also für $a < 0$ für *x* keine Lösung.

④ $4a^2 - 4a\sqrt{a(a-1)} < 0$

$\Leftrightarrow \quad 4a^2 < 4a\sqrt{a(a-1)} \qquad |\,Quadrieren\ \ für\ a > 0\,***)$

$\Leftrightarrow \quad 16a^4 < 16a^2 \cdot a(a-1) \qquad |:16a^3$

$\Leftrightarrow \quad a < a - 1 \qquad |-a$

$\Leftrightarrow \quad 0 < -1 \qquad [\,falsch!]$

***) Für $a < 0$ gibt es auch keine Lösung für *a*, weil dann die rechte Seite negativ ist und nicht größer als die linke, positive Seite sein kann.

(3.3) Fall: $4a^2 \pm 4a\sqrt{a(a-1)} > 0$ *die Folge wäre: zwei oder vier Nullstellen für x!*

⑤ $4a^2 + 4a\sqrt{a(a-1)} > 0$

$\Leftrightarrow \quad 4a^2 > -4a\sqrt{a(a-1)} \qquad | \, Quadrieren \;\; für \; a < 0 \; ****)$

$\Leftrightarrow \quad 16a^4 > 16a^2 \cdot a(a-1) \qquad |:16a^3 \; (<0!)$

$\Leftrightarrow \quad a < a-1 \qquad | -a$

$\Leftrightarrow \quad 0 < -1 \qquad [\, falsch!]$

****) Für $a > 1$ gibt es aber eine Lösung für *a*, weil die rechte Seite negativ und damit kleiner als die linke, positive Seite ist.

$x^2 = z = 4a^2 + 4a\sqrt{a(a-1)}$ liefert also für $a > 1$ für *x* zwei Lösungen.

⑥ $4a^2 - 4a\sqrt{a(a-1)} > 0$

$\Leftrightarrow \quad 4a^2 > 4a\sqrt{a(a-1)} \qquad | \, Quadrieren \;\; für \; a > 1 \; *****)$

$\Leftrightarrow \quad 16a^4 > 16a^2 \cdot a(a-1) \qquad |:16a^3$

$\Leftrightarrow \quad a > a-1 \qquad | -a$

$\Leftrightarrow \quad 0 > -1 \qquad [wahr!]$

*****) Für $a < 0$ gibt es auch eine Lösung für *a*, weil die rechte Seite negativ ist und damit kleiner als die linke, positive Seite ist.

$x^2 = z = 4a^2 - 4a\sqrt{a(a-1)}$ liefert also für $a < 0$ *und für* $a > 1$ für *x* zwei Lösungen.

Für $\underline{a > 1}$ gibt es also immer $\underline{\underline{4 \text{ Nullstellen}}}$ und für $\underline{a < 0}$ immer $\underline{\underline{2 \text{ Nullstellen}}}$.

Wenn man mit 3.3 begonnen hätte, hätten sich die anderen beiden Fälle selbst erledigt. Aufgrund der Zeichnungen und der Grenzwerte hätte dieser Verdacht aufkommen können.

Alternative Lösung

3. Wegen der Lage der Extrempunkte (siehe 3.2 bei a)) und der Grenzwerte (siehe 2. bei a)) ergeben sich folgende Fälle:

$\underline{a < 0}$: $\underline{\underline{2 \text{ Nullstellen}}}$; $\underline{0 < a < 1}$: $\underline{\underline{\text{keine Nullstellen}}}$; $\underline{a = 1}$: $\underline{\underline{2 \text{ Nullstellen}}}$; $\underline{a > 1}$: $\underline{\underline{4 \text{ Nullstellen}}}$.

4. Ermitteln Sie alle Werte für a, so dass der Graph zu f_a durch den Punkt P(2 | 0) verläuft.

$f_a(2) = \frac{1}{8a^3}\left(2^4 - 8a^2 \cdot 2^2\right) + 2 = 0 \qquad | \cdot 8a^3$

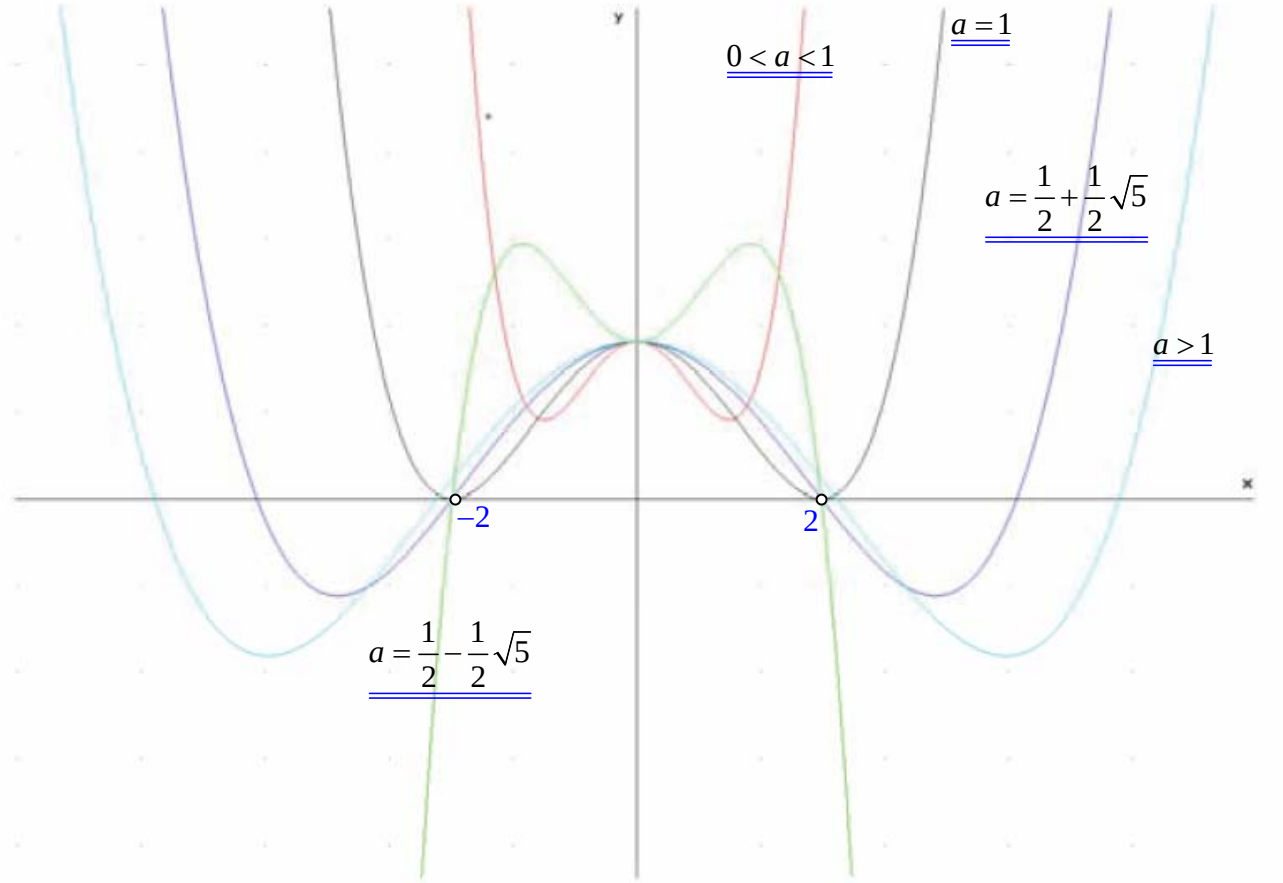
$\Leftrightarrow \quad 2^4 - 32a^2 + 16a^3 = 0 \qquad |:16$

$\Leftrightarrow \quad a^3 - 2a^2 + 1 = 0 \qquad | \, Polynomdivision(s.\, NR)$

$\Leftrightarrow \quad (a-1)\left(a^2 - a - 1\right) = 0 \qquad | \, Nullprodukt, \; pq - Formel$

$\Leftrightarrow \quad a = \underline{\underline{1}} \vee a = \underline{\underline{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}}}$

5. Alle Graphen in der Zeichnung unten gehören zur Schar f_a. Geben Sie jeweils das passende a an bzw. den Bereich, aus dem der zugehörige Wert von a stammt, und begründen Sie Ihre Zuordnung.

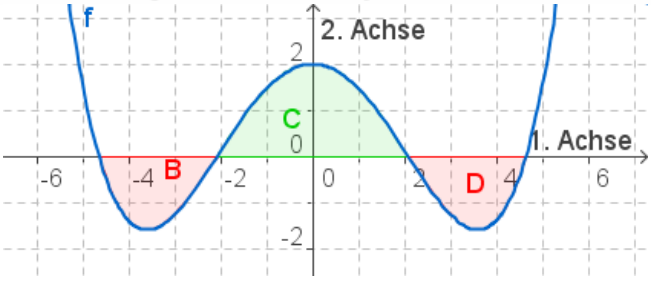


Es werden die drei Graphen zu Werten aus 4. (Nullstelle 2), ein Graph ohne Nullstelle (0<a<1) und ein weiterer mit vier Nullstellen (a>1) dargestellt.

c) Es soll die folgende Problemstellung bearbeitet werden: „Bestimmen Sie den Wert von a ($a > 1$), für den der Inhalt der vom Graphen zu f_a und der x-Achse oberhalb der x-Achse eingeschlossenen Fläche gleich dem Inhalt der Flächen ist, die die x-Achse und der Graph unterhalb der x-Achse umschließen."
Zur Lösung werden die Vorschläge V 1 und V 2 gemacht:

V 1: Ich bestimme die Nullstellen x_1, x_2, x_3, x_4 mit $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ und löse die Gleichung

$$\int_{x_2}^{x_3} f_a(x)dx = 2\left|\int_{x_3}^{x_4} f_a(x)dx\right| .$$



Wegen $a > 1$ liegen die beiden Minima unterhalb $(2 - 2a < 0)$ und das Maximum $(2 > 0)$ oberhalb der 1. Achse. Wegen der Symmetrie $(B = D)$ muss dann die oberhalb der 1. Achse liegende Fläche $(linke\ Seite = C)$ doppelt so groß, wie der rechts unterhalb der 1. Achse liegende halbe Teil (D) der unterhalb der 1. Achse liegenden Fläche sein. Die Betragsstriche dienen dazu, aus dem negativen Integralwert den positiven Flächeninhalt zu machen. Der Ansatz ist also richtig.

V 2: Ich bestimme die Nullstellen x_1, x_2, x_3, x_4 mit $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ und löse die Gleichung

$$\int_{0}^{x_4} f_a(x)dx = 0$$

Wegen der Symmetrie muss die rechte Hälfte von *C*, der oberhalb der 1. Achse liegenden Fläche, genauso groß wie die Hälfte der unterhalb der 1. Achse liegenden Fläche – und das ist *D* – sein. Der orientierte Flächeninhalt muss dann wegen der verschiedenen Vorzeichen natürlich null sein; diesen Sachverhalt drückt der Ansatz aus und ist deshalb auch richtig.

Die sich aus den beiden Ansätzen ergebende Rechnung ist bei V2 jedoch wesentlich elementarer.

Die Veröffentlichung dieser Lösung geschieht ohne inhaltliche Prüfung durch die Bezirksregierung Düsseldorf und den Mathe-Treff.
Die Lösung stammt nicht vom Originalautor der Aufgabe, sondern von einem Leser des Mathe-Treffs. Wir bedanken uns herzlich für die Erstellung der Aufgabenlösung.

Lösung Aufgabe Nr. 14: Fischbestand

Hinweis: Die Einteilung der y-Achse in der mitgelieferten Graphik ist meiner Meinung nach nicht korrekt. Statt 0,2 und 0,4 müsste es 0,1 und 0,2 heißen.

a) Nullstellen: f(t) = 0

Da $e^t = 0$ für alle t nicht erfüllbar ist, gibt es **keine Nullstellen**.

Extrema: f'(t) = 0 (notwendige Bedingung)

$$f'(t) = \frac{e^t \bullet (1+e^t)^2 - e^t \bullet 2 \bullet (1+e^t) \bullet e^t}{(1+e^t)^4} = \frac{e^t \bullet (1-e^t)}{(1+e^t)^3}$$

f'(t) = 0 für $1 - e^t = 0$, also t = 0

Überprüfung der hinreichenden Bedingung:

f''(0) < 0 liefert für t = 0 einen Hochpunkt.

f(0) = 0,25 bedeutet, die Funktion hat in **H(0 | 0,25)** einen Hochpunkt.

Wendepunkte: notwendige Bedingung f''(t) = 0

Also: $1 - 4e^t + e^{2t} = 0$

Sei $z = e^t$

$z^2 - 4z + 1 = 0$ für z ~ 0,3 bzw. z ~ 3,7

d. h.: t ~ ln 0,3 bzw. t ~ ln3,7 ~ 1,3

Die erste Lösung entfällt, da t > 0 vorausgesetzt wurde.

Als y-Koordinate ergibt sich f(1,3) = 0,17 und damit hat f in **W (1,3 | 0,17)** einen Wendepunkt.

b) $$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{e^t} = 0$$

c) (i) zu zeigen: f'(t) = für alle t > 0.

Wie man leicht sieht gilt: $e^t > 0$ und $(1 + e^t) > 0$ und $1 - e^t < 0$ (t > 0), sodass der Bruch für alle t > 0 einen negativen Wert annimmt.

Damit f monoton fallend für t > 0, w. z. z. w.

(ii) Nein, da f den Zuwachs und nicht den Bestand anzeigt. Der Zuwachs ist sinkend, was bedeutet, dass weiterhin die Population wächst.

d) $\int_a^b \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt = \int_a^b (e^t+1)^{-2} \bullet e^t\,dt$

Sei $z = e^t$

$$\int_{e^a}^{e^b} (z+1)^{-2}\,dz = \left[-\frac{1}{z+1}\right]_{e^a}^{e^b} = \left[-\frac{1}{e^t+1}\right]_a^b$$

also $F(t) = \frac{-1}{e^t+1}$

e) (i) B(0) ist der Anfangsbestand (4 Mio.)!

Das Integral als Wirkung interpretiert zeigt den Zuwachs in den ersten t Jahren an. Also wird durch B(t) der Fischbestand zum Zeitpunkt t beschrieben.

(ii) $B(2) = B(0) + \int_0^2 f(x)dx = 4 + \left[\frac{-1}{e^t+1}\right]_0^2 \sim 4{,}38$

Nach 2 Jahren ist der Bestand auf 4,38 Mio. angewachsen.

(iii) $B(t) = 4 - \frac{1}{e^t+1} + \frac{1}{2} = 4{,}5 - \frac{1}{e^t+1}$

Für t ? 8 nähert sich der Wert 4,5.

Langfristig sind also 4,5 Mio. Fische zu erwarten.

Die Veröffentlichung dieser Lösung geschieht ohne inhaltliche Prüfung durch die Bezirksregierung Düsseldorf und den Mathe-Treff.
Die Lösung stammt nicht vom Originalautor der Aufgabe, sondern von einem Leser des Mathe-Treffs. Wir bedanken uns herzlich für die Erstellung der Aufgabenlösung.

Lösung zu Aufgabe Nr. 15 – Olympiaschanze Garmisch

a) Lege das Koordinatensystem so, dass A im Ursprung liegt.

Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingungen

$$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$
$$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$
$$f(156) = a \cdot 156^3 + b \cdot 156^2 = -81$$
$$f'(156) = 3 \cdot a \cdot 156^2 + 2 \cdot b \cdot 156 = 0$$

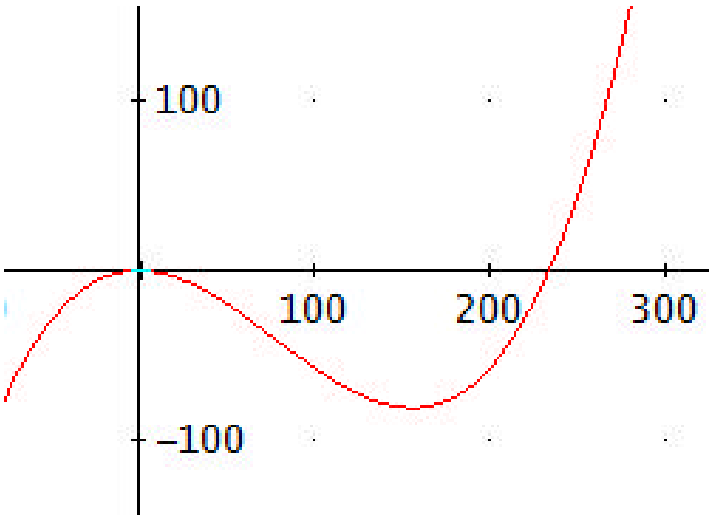
$$3 \cdot III - 156 \cdot IV \quad b \cdot 156^2 = -243 \Leftrightarrow b = -\frac{243}{156^2}$$

in IV $3 \cdot a \cdot 156^2 + 2 \cdot \left(-\frac{243}{156^2}\right) \cdot 156 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2 \cdot 243}{156 \cdot 3 \cdot 156^2} = \frac{162}{156^3}$

Daraus folgt die Funktionsgleichung $\boxed{f(x) = \frac{162}{156^3} \cdot x^3 - \frac{243}{156^2} \cdot x^2}$

(vergleiche Ergebnis mit der Kontrolle in c))

Die Abbildung zeigt den weiteren Verlauf des Graphen.



Volle Taschenrechner Anzeige bedeutet:

$a = 0{,}000042671$ und $b = -009985207$

Gesucht ist das maximale Gefälle des Graphen im relevanten Bereich, also das **Maximum der ersten Ableitung**!! von f .

$$f'(x) = \frac{9}{70304}x^2 - \frac{27}{1352}x$$

$$f''(x) = \frac{9}{35152}x - \frac{27}{1352}$$

<u>notwendige Bedingung:</u> $f''(x) = 0$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{35152}x - \frac{27}{1352} = 0 \Leftrightarrow x = 78$$

<u>hinreichende Bedingung:</u> $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$f'''(x) < 0 \Rightarrow$ Die erste Ableitung hat an der Stelle x = 78 ein Maximum.

$$f'(78) = -\frac{81}{104}$$

Steigungswinkel zum Vergleich mit der Zeichnung: $\tan a = \frac{81}{104} \Rightarrow a \approx 37{,}91°$

In der Zeichnung ist sind die Winkel 37,96° und 35,5° aufgeführt. Auf halber Strecke zwischen A und B, also genau bei x = 78 in dem vorgegebenen Koordinatensystem erhält man also einen plausiblen Wert. Die Funktion modelliert den Hügel im relevanten Bereich gut.

b) $f(x) = ax^3 + bx^2$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f'''(x) = 6a$$

Die Extremstellen ergeben sich aus $f'(x) = 0$

$3ax^2 + 2bx = 0$

$\Leftrightarrow x \cdot (3ax + 2b) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und $x = -\frac{2b}{3a}$

Die Wendestelle ergibt sich aus $f''(x) = 0$

$6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$

Die Wendestelle liegt also genau in der Mitte der beiden Extremstellen.

c) <u>Ansatz</u> $f_k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f_k'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

<u>Bedingungen</u>

$f_k(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

$f_k'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$f_k(k) = a \cdot k^3 + b \cdot k^2 = -81$

$f_k'(k) = 3 \cdot a \cdot k^2 + 2 \cdot b \cdot k = 0$

$3 \cdot III - k \cdot IV \quad b \cdot k^2 = -243 \Leftrightarrow b = -\frac{243}{k^2}$

in IV $\quad 3 \cdot a \cdot k^2 + 2 \cdot \left(-\frac{243}{k^2}\right) \cdot k = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2 \cdot 243}{k \cdot 3 \cdot k^2} = \frac{162}{k^3}$

$$\boxed{f_k(x) = \frac{162}{k^3} \cdot x^3 - \frac{243}{k^2} \cdot x^2}$$

Im Prinzip kehrt man das Verfahren aus a) um.

$f_k'(x) = \frac{486}{k^3}x^2 - \frac{486}{k^2}x \quad ; \quad f_k''(x) = \frac{972}{k^3}x - \frac{97}{k^2}$

$f_k''(x) = \frac{972}{k^3}x - \frac{486}{k^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}k$

$f'(0{,}5k) = -\frac{121{,}5}{k} = -\tan 39° \Rightarrow k \approx 150{,}04$

Die Entfernung zwischen A und B muss also ungefähr 150m betragen, um ein maximales Gefälle von 39° zu haben.

d) Verschiebe den Funktionsgraphen um die Höhe h und berechne $\int_0^{156} h \cdot dx = 156 \cdot h$

Weiter gilt $156 \cdot h = \frac{1000m^2}{40m} = 25m \Rightarrow h = \frac{25}{156} m \approx 0{,}16m = 16cm$

Die Schneehöhe beträgt also 16 cm

e) Für die exakte Berechnung der Bogenlänge einer gekrümmten Linie gilt die Formel

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$

Da nur eine näherungsweise Berechnung verlangt wird, reicht hier eine Beschreibung dessen, was unten sehr formal hergeleitet wird.

Die gekrümmte Linie wird angenähert durch einen Polygonzug, bestehend aus einzelnen Geradenstücken. Dieser Polygonzug wird immer weiter verfeinert, bis man annähernd die Länge der Kurve berechnen kann. Formal sieht das so aus:

Zerlege das Intervall $a \le x \le b$ durch die Punkte $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ in n, nicht notwendig gleiche Teile. Die zu diesen x-Koordinaten gehörigen, auf dem Kurvenbogen liegenden Punkte seien P_1, P_2 ,…,P_{n-1}. Verbindet man diese geradlinig, so erhält man einen Sehnen- oder Polygonzug.

Setzt man $x_v - x_{v-1} = \Delta x_v$ und $y_v - y_{v-1} = \Delta y_v$, so erhält man für die einzelnen Sehnenlängen nach Pythagoras:

$$\Delta s_v = \sqrt{(\Delta x_v)^2 + (\Delta y_v)^2} = \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_v)^2}{(\Delta x_v)^2} \cdot (\Delta x_v)^2}$$

Die Länge des gesamten Sehnenzuges ergibt sich durch Summation der einzelnen Teilstücke, also

$s_n = \sum_{v=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_v)^2}{(\Delta x_v)^2} \cdot (\Delta x_v)}$, $x_0 = a$ und $x_n = b$ (das Zeichen $\sum$ steht für Summe)

Für die im Intervall $a \le x \le b$ stetig differenzierbare Funktion f gibt es (Mittelwertsatz) für jedes Intervall $x_{\nu-1} \le x \le x_\nu$ eine Stelle z_ν mit

$$f'(z_\nu) = \frac{\Delta y_\nu}{\Delta x_\nu} \quad \text{mit} \quad x_{\nu-1} \le z_\nu \le x_\nu$$

Strebt n nun gegen Unendlich, dann ist, unabhängig wie die Teilung gewählt wurde:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{1+(f'(z_\nu))^2} \cdot (\Delta x_\nu) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Das Verfahren ist ähnlich zur Berechnung von Ober – und Untersumme bei Integralen.

Die Veröffentlichung dieser Lösung geschieht ohne inhaltliche Prüfung durch die Bezirksregierung Düsseldorf und den Mathe-Treff.
Die Lösung stammt nicht vom Originalautor der Aufgabe, sondern von einem Leser des Mathe-Treffs. Wir bedanken uns herzlich für die Erstellung der Aufgabenlösung.

Lösung zu Aufgabe Nr. 16 – Tennis

a) Die Länge und Breite des Tennisplatzes ergibt sich aus den Koordinaten von Q oder E oder F bzw. G oder H

Länge 24 m; Breite 9 m

b) Definition der Geschwindigkeit $v = \frac{Weg}{Zeit} = \frac{s}{t}$

s ist die Länge der Strecke $\overline{PH}$, also $d = \sqrt{(4{,}5-4)^2 + (6-24)^2 + (0-3)^2} \approx 18{,}26$

$$\Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{0{,}01826km}{180\frac{km}{h}} \approx 0{,}37 \text{ Sekunden}$$

c) Gesucht ist der Winkel zwischen der Geraden durch P und H und der x_1x_2-Ebene.

Es gilt $\sin a = \frac{\left|\vec{n} * \vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{u}\right|}$, wobei $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \vec{PH}$

$$\sin a = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4-4{,}5 \\ 24-6 \\ 3-0 \end{pmatrix}\right|}{1 \cdot \sqrt{333{,}25}} = \frac{3}{\sqrt{333{,}25}} \Rightarrow a \approx 9{,}5^\circ$$

d) Der Spiegelpunkt von H an der x_1x_2-Ebene ist $H'(4|24|-3)$.

Geradengleichung durch H' und P: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 24 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -18 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der x_1x_3-Ebene mit der Gleichung $x_2 = 0$ ergibt:

$$24 - 18t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow S\left(4\frac{2}{3} \,|\, 0 \,|\, 1\right)$$

e) Es soll der Teil des Aufschlagfeldes bestimmt werden, der vom Ball bei einem gültigen Aufschlag getroffen werden kann.

<u>Strategie:</u>

1. Die möglichen Flugbahnen des Tennisballs liegen in den Ebenen E_1 durch H, D und B bzw. E_2 durch H, D und F. Bestimme die Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ dieser Ebenen.

2. Bestimme die Schnittgerade g der Ebenen E_1 und E_2. Diese ist identisch mit der Geraden durch H und D.

3. Bestimme den Schnittpunkt S der Schnittgeraden g mit der x_1x_2-Ebene.

4. Bestimme die Schnittgeraden von E_1 und E_2 mit der x_1x_2-Ebene. Als Ortsvektor nimmt man $\vec{s}$ und als Richtungsvektoren jeweils das Vektorprodukt von $\vec{n}_1$ bzw. $\vec{n}_2$ mit dem Normalenvektor $\vec{e}_3$ der x_1x_2-Ebene.

5. Die x_1 - Koordinate muss wegen der Größe des Aufschlagfeldes die Bedingung $4{,}5 \le x_1 \le 9$ erfüllen.

<u>Lösung:</u>

1. $$\vec{n}_1 = \overrightarrow{HD} \times \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -12 \\ -2{,}1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ -9{,}35 \\ 54 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_2 = \vec{HD} \times \vec{FD} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -12 \\ -2{,}1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 0 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 9{,}55 \\ -54 \end{pmatrix}$$

2. $$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 24 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -12 \\ -2{,}1 \end{pmatrix}$$

3. $$x_3 = 0 \Leftrightarrow 3 - 2{,}1t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{7} \Rightarrow S\left(\frac{33}{7} \,|\, \frac{48}{7} \,|\, 0\right); \quad S(4{,}7 \,|\, 6{,}9 \,|\, 0)$$

4. $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ -9{,}35 \\ 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}35 \\ 2{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 9{,}55 \\ -54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9{,}55 \\ 2{,}4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{33}{7} \\ \frac{48}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 9{,}35 \\ 2{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad s_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{33}{7} \\ \frac{48}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -9{,}55 \\ 2{,}4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Die Gerade s_1 schneidet die Aufschlagmittellinie, also gilt:

$$\frac{33}{7} + k \cdot \frac{935}{100} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{60}{2618}$$

$$\Rightarrow SP_1(4{,}5 \mid 6{,}8 \mid 0)$$

Die Gerade s_2 schneidet die Aufschlagaußenlinie, also gilt:

$$\frac{33}{7} - l \cdot \frac{955}{100} = 9 \Leftrightarrow l = -\frac{600}{1337}$$

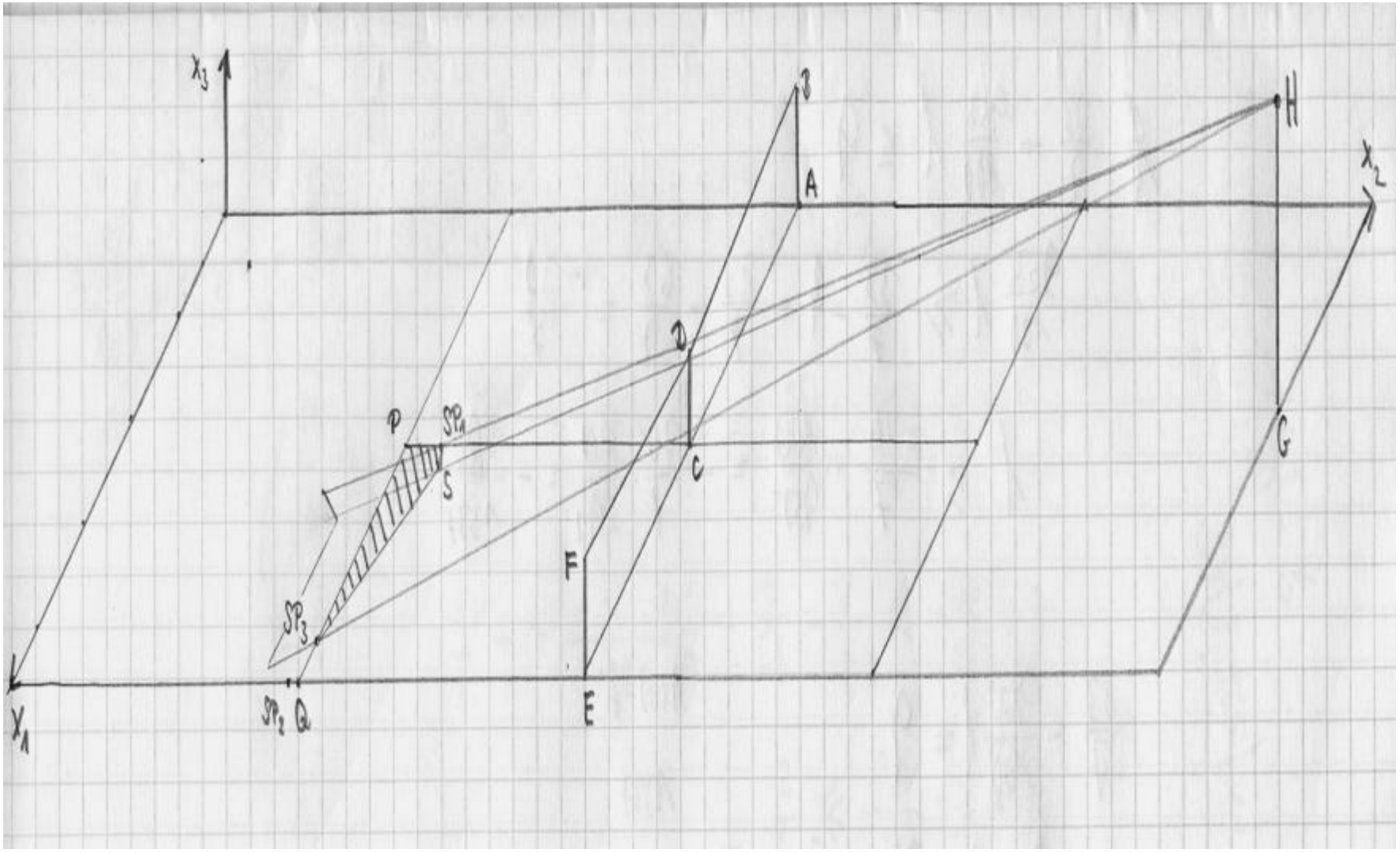
$\Rightarrow SP_2(9 \mid 5{,}8 \mid 0)$; Dieser Punkt liegt allerdings außerhalb des T-Feldes.

Berechne den Schnittpunkt von s_2 mit der T-Linie:

$$\frac{48}{7} + l \cdot \frac{24}{10} = 6 \Leftrightarrow l = -\frac{5}{14}$$

Die Gerade s_2 schneidet die T-Linie im Punkt $SP_3(8{,}125 \mid 6 \mid 0)$

SP_3 bildet zusammen mit SP_1, S und P, die vier Ecken der Landefläche.


x_3
B
H
A
x_2
D
P
SP_1
C
G
S
F
SP_3
x_1
SP_2
Q
E

Die Veröffentlichung dieser Lösung geschieht ohne inhaltliche Prüfung durch die Bezirksregierung Düsseldorf und den Mathe-Treff.
Die Lösung stammt nicht vom Originalautor der Aufgabe, sondern von einem Leser des Mathe-Treffs. Wir bedanken uns herzlich für die Erstellung der Aufgabenlösung.

Lösung zu Aufgabe Nr. 18 – vektorielle Geometrie

ohne Zeichnungen

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix}$$

I. $-7 + l + m = 0$

II. $-11 + 2l - m \cdot t = 0$

III. $1 + 2l - 3m = 0$

Aus I. folgt $l = 7 - m$; in III. folgt $1 + 14 - 2m - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 3 \Rightarrow l = 4$

In II. folgt $-11 + 8 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = -1$; Schnittpunkt S(6|9|7)

a) Ein Punkt auf der Geraden g hat die Koordinaten $G(2 + l \mid 1 + 2l \mid -1 + 2l)$

$$\vec{QG} = \begin{pmatrix} -7 + l \\ -11 + 2l \\ 1 + 2l \end{pmatrix}$$

$$d^2 = (-7 + l)^2 + (-11 + 2l)^2 + (1 + 2l)^2 = 9l^2 - 54l + 171 = (3\sqrt{11})^2 = 99$$
$$\Leftrightarrow l^2 - 6l + 8 = 0 \Rightarrow l_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8} = 3 \pm 1$$

$l_1 = 4$ und $l_2 = 2$ Einsetzen in G ergibt die gesuchten Punkte A(6|9|7) = S und B(4|5|3)

c) Die zur Geraden g senkrechte Ebene E, die den Punkt Q enthält hat den Richtungsvektor der Geraden g als Normalenvektor, also $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, daraus folgt die Ebenengleichung E: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow E: x + 2y + 2z - 29 = 0$

Setze die Gerade g dort ein:

$2 + t + 2 \cdot (1 + 2t) + 2 \cdot (-1 + 2t) - 29 = 0 \Leftrightarrow 9t - 27 = 0 \Leftrightarrow t = 3$

Der Schnittpunkt von E und g ist also F(5|7|5).

Für den Spiegelpunkt Q' folgt

$\vec{OQ'} = \vec{OQ} + 2 \cdot \vec{QF} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$; also Q'(1|2|12)

d) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Normalenvektor: $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

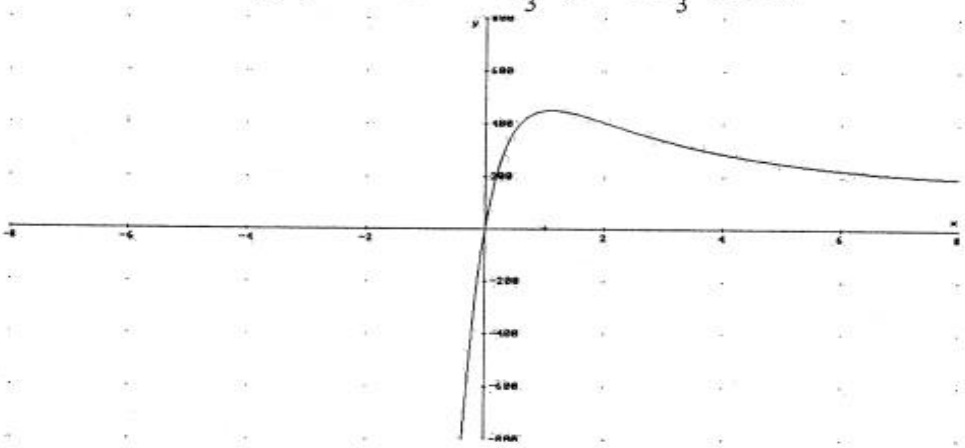
Normalenform: $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \right] = 0$

Koordinatenform: $8x - 5y + z = 10$

Der Normalenvektor der Ebene F ist $\vec{n_F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Skalarprodukt mit $\vec{n}_E$ ergibt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, also sind die Ebenen senkrecht zueinander.

	I	II	III
a) von K G WG V; nach K, G, WG, V: $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0{,}72 & 0 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}08 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$	3		
c) b_1) Die Übergangsmatrix für einen Fünf-Wochen-Zeitraum lautet: $A^5 \overset{TR}{=} \begin{pmatrix} 0{,}0987 & 0{,}1603 & 0{,}1084 & 0 \\ 0 & 0{,}1681 & 0 & 0 \\ 0{,}7803 & 0{,}5933 & 0{,}8573 & 0 \\ 0{,}1211 & 0{,}0783 & 0{,}0344 & 1 \end{pmatrix}$	3		
Die Werte werden der Matrix A^5 entnommen: b_2) 16,81% b_3) 7,83%		2	
c) Startvektor $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1500 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $A^3 \cdot \vec{v_0} = \begin{pmatrix} 333{,}9 \\ 514{,}5 \\ 583{,}2 \\ 68{,}4 \end{pmatrix}$	2	1	
c_1) Situation nach drei Wochen: Kranke: ca. 334 Personen Gesunde: ca. 515 Personen wieder gesund: ca. 583 Personen verstorben: ca. 68 Personen	1		
c_2) langfristige Entwicklung (durch TR-Überprüfung): Auf Dauer gesehen wird die Population aussterben.			2
d) d_1) verkürzte Übergangsmatrix: $B = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$;	2		
d_2) Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren: $B - k \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0{,}2-k & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}7-k & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}9-k \end{pmatrix}$		2	
Damit ergibt sich folgende charakteristisch Gleichung: $0 = \lvert B - k \cdot E_3 \rvert = (0{,}2-k)(0{,}7-k)(0{,}9-k) - 0{,}1 \cdot (0{,}7-k) \cdot 0{,}8 = -k^3 + 1{,}8k^2 - 0{,}87k + 0{,}07$ $= (0{,}7-k) \cdot (k^2 - 1{,}1k + 0{,}1) = (0{,}7-k)(k-1)(k-0{,}1)$	3	3	
Als Eigenwerte ergeben sich somit: $k_1 = 0{,}7$; $k_2 = 1$; $k_3 = 0{,}1$. Für die zugehörigen Eigenvektoren ergibt die Rechnung: Zu k_1: $\left\lvert \begin{matrix} 0{,}2x + 0{,}3y + 0{,}1z = 0{,}7x \\ 0{,}7y = 0{,}7y \\ 0{,}8x + 0{,}9z = 0{,}7z \end{matrix} \right\rvert \Rightarrow \begin{matrix} x = -\frac{1}{4}z \\ y = -\frac{3}{4}z \end{matrix} \Rightarrow \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$	2	1	

Zu k_2: Das entsprechende GLS führt zu $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$	2	1	
Zu k_3: Das entsprechende GLS führt zu $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	2	1	
d3) Darstellung des Startvektors $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1500 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Eigenvektoren: $r \cdot \vec{w}_1 + s \cdot \vec{w}_2 + t \cdot \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1500 \\ 0 \end{pmatrix}$			
Mit dem TR ergibt sich: $r = 500 \quad s = 166\frac{2}{3} \quad t = 666\frac{2}{3}$		2	
Damit erhält man: $\vec{v}_n = A^n \cdot \vec{v}_0 = 500 \cdot k_1^n \cdot \vec{w}_1 + 166\frac{2}{3} k_2^n \cdot \vec{w}_2 + 666\frac{2}{3} \cdot k_3^n \cdot \vec{w}_3$	2	1	
Die erste Komponente von $\vec{v}_n$ liefert den Krankenbestand nach n Wochen: $500 \cdot 0{,}7^n + 166\frac{2}{3} - 666\frac{2}{3} \cdot 0{,}1^n$		2	
Die auf $\mathbb{R}_0^+$ erweiterte Funktion lautet somit: $f(x) = 500 \cdot 0{,}7^x - 666\frac{2}{3} \cdot 0{,}1^x + 166\frac{2}{3} \quad ; x \geq 0.$	1		
	2		
Zu bestimmen ist die Wendestelle von f:			2
$f''(x) = 500 \cdot (\ln(0{,}7)^2) 0{,}7^x - 666\frac{2}{3} \cdot (\ln(0{,}1)^2) 0{,}1^x \quad ; \quad f'(x) = 0 \overset{TR}{\Rightarrow} x \approx 2{,}065$	1	2	
$f''(2{,}065) \overset{TR}{>} 0$. Der Krankenstand nimmt nach zwei Wochen am stärksten ab.		2	
d4) Da $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 166\frac{2}{3}$ ist, nähert sich der Krankenstand diesem Wert.		2	
ΣA4	26	22	4
%	50	42	8

Die Veröffentlichung dieser Lösung geschieht ohne inhaltliche Prüfung durch die Bezirksregierung Düsseldorf und den Mathe-Treff.
Die Lösung stammt nicht vom Originalautor der Aufgabe, sondern von einem Leser des Mathe-Treffs. Wir bedanken uns herzlich für die Erstellung der Aufgabenlösung.

Lösung Aufgabe Nr. 21 - Flugbahnen

a) Bestimmen der Seitenvektoren

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 800 \\ 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 800 \\ 4 \end{pmatrix}$$

zeigt, dass es ein Parallelogramm ist.

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$ liefert den Nachweis für die Existenz eines rechten Winkels.
Also handelt es sich um ein Rechteck.

b) Für den Lotfußpunkt L des Punktes P zur Geraden gilt:
L = (100 – 0,1t | -2550 + 22t | 228,75 – 1,5t)

$$\overrightarrow{FL} \bullet \vec{r} = (100 - 0{,}1t)((-0{,}1) + (-2550 + 2t) \bullet 22 + (220{,}75 - 1{,}5t) - 1{,}5) = 0 \ ,$$

da die Vektoren senkrecht aufeinander stehen.
Als Lösung ergibt sich $t \tilde{} 116{,}072$.
Damit hat der Vektor $\overrightarrow{FL}$ die Länge 100.
Der Abstand beträgt also 100 Meter.

c) Mithilfe des Kreuzprodukts erhält man $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 200 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor der Ebene E (Landebahn) und y – 200z = 0 als Koordinatenform für die Ebene E.
Der Schnittpunkt von E und der Geraden x(t) ergibt sich nach Lösen der Gleichung
-2550 + 22t – 200 (228,75 – 1,5t) = 0 (Einsetzen von x(t) in E)
Die Lösung t = 150 liefert als Schnittpunkt (Aufsetzpunkt des Flugzeugs) den Punkt

S (85 | 750 | 3,75),

der, wie man leicht sieht auf der Landebahn liegt.

$$\sin a = \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 200 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 22 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 200 \end{pmatrix} \bullet \left\| \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 22 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} \right\| \right\|} \right|$$ liefert als Winkel: a = 4,2 °.

Dieses Mal müsste die Landung also klappen, da die beiden Bedingungen erfüllt sind.

d) Bestimmen des Schnittpunktes durch Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen:

$$x(t) = y(k)$$

liefert als LGS mit zwei Variablen

$$\begin{aligned} 100 - 0{,}1t &= 53 + 2k \\ -2550 + 22t &= -410 - 30k \\ 228{,}75 - 1{,}5t &= 43{,}75 + 4k \end{aligned}$$

das die Lösungen t = 70 und k = 20 hat,
mit dem gemeinsamen Punkt Q(93 | -1010 | 123,75).
Aus den Parametern lässt sich ablesen, dass die beiden Flugzeuge zu verschiedenen Zeitpunkten sich an diesem Ort befinden.

e) $x(50) = \begin{pmatrix} 95 \\ -1450 \\ 153{,}75 \end{pmatrix}$ und $y(50) = \begin{pmatrix} 153 \\ -1910 \\ 243{,}75 \end{pmatrix}$ liefert die Koordinaten der beiden Punkte, an denen sich die beiden Flieger zum Zeitpunkt t = 50 befinden.
Als Länge d des Vektors zwischen diesen beiden Punkten erhält man d = 472,30 m.

f) Für ein beliebiges t ergibt sich der folgende Vektor zwischen den beiden Punkten:

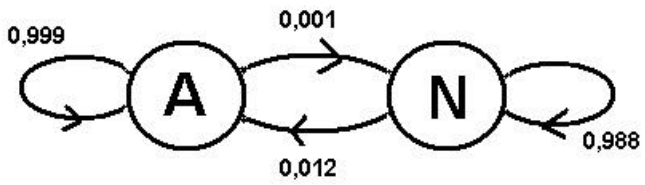
$$\begin{pmatrix} 2{,}1t - 47 \\ -52t + 2140 \\ 5{,}5t - 185 \end{pmatrix}.$$

Das Quadrat seiner Länge liefert folgende Funktionsgleichung:
$d(t) = 2738{,}66t^2 - 2035t + 34225$.
Mit den Mitteln der Analysis ergibt sich nach Gleichsetzen der 1. Ableitung mit Null für t der Wert t ˜ 41.
Nach 41 Sekunden ist also der Abstand zwischen den beiden Flugzeugen minimal.

Die Veröffentlichung dieser Lösung geschieht ohne inhaltliche Prüfung durch die Bezirksregierung Düsseldorf und den Mathe-Treff.
Die Lösung stammt nicht vom Originalautor der Aufgabe, sondern von einem Leser des Mathe-Treffs. Wir bedanken uns herzlich für die Erstellung der Aufgabenlösung.

Lösung zu Aufgabe Nr. 22 – Ödnis im Osten

a) Aus den Angaben ergibt sich der folgende Graph:



Die Matrix lautet: $M = \begin{pmatrix} 0{,}999 & 0{,}012 \\ 0{,}001 & 0{,}988 \end{pmatrix}$

b) Schwachpunkte:

- Das Wanderungsverhalten kann sich ändern (politische Entscheidungen).
- Das natürliche Wachstum bleibt unberücksichtigt.

Annahme:

- Die Bedingungen bleiben in den nächsten Jahren so wie im Text beschrieben.

c) $2005: \quad M \bullet \begin{pmatrix} 69{,}5 \\ 13{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69{,}5925 \\ 13{,}4075 \end{pmatrix}$

$2006: \quad M \bullet \begin{pmatrix} 69{,}5925 \\ 13{,}4075 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69{,}6838 \\ 13{,}3162 \end{pmatrix}$

d) $M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}998 & 0{,}024 \\ 0{,}002 & 0{,}976 \end{pmatrix}$ $\qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0{,}997 & 0{,}036 \\ 0{,}003 & 0{,}964 \end{pmatrix}$

$M^2 \bullet \begin{pmatrix} 69{,}5 \\ 13{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69{,}685 \\ 13{,}315 \end{pmatrix}$ Abweichungen wegen Rundungen!

Interpretation:

2,4 % aus den neuen Bundesländern sind in die alten abgewandert, während nur 0,2 % in die entgegen gesetzte Richtung wanderten.

e) $\begin{pmatrix} 0{,}999 & 0{,}012 \\ 0{,}001 & 0{,}988 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ als Ansatz liefert das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} x \quad &+ \quad y &= 83 \\ 0{,}999\,x \quad &+ \quad 0{,}012\,y &= x \\ 0{,}001\,x \quad &+ \quad 0{,}988\,y &= y \end{aligned}$$

das die Lösungen x = 6,38 und y = 76,62 hat.
6,38 Mio. Einwohner werden langfristig in den neuen Bundesländern sich befinden, währen es in den alten Bundesländern 76,62 Mio. sind. Die Zahlen sind also noch dramatischer als in dem Artikel vermeldet.

f) Als Ansatz ergibt sich

$\begin{pmatrix} 0{,}999 & a \\ 0{,}001 & 1-a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 73 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ 10 \end{pmatrix}$, da die Einwohnerzahl in den neuen Bundesländern nicht unter 10 Mio. sinken soll und das Wanderungsverhalten in den alten Ländern gleich bleibt.

Daraus ergibt sich die folgende Gleichung:

$0{,}999 \bullet 73 + 10a = 73$
mit der Lösung $a \tilde{} 0{,}0073$.

Das heißt, dass die Abwanderungsrate in den alten Bundesländern bei 0,73 % liegen müsste.

1.) Es gilt $A\cdot\begin{pmatrix}80000\\20000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}76000\\24000\end{pmatrix}$ und $A\cdot\begin{pmatrix}76000\\24000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}73200\\26800\end{pmatrix}$.

Mit $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ ergeben sich die Gleichungen

I $\quad 80000a+20000b=76000 \Rightarrow b=3{,}8-4a$

II $\quad 80000c+20000d=24000 \Rightarrow d=1{,}2-4c$

III $\quad 76000a+24000b=73200$

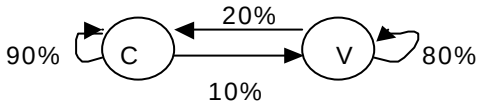
IV $\quad 76000c+24000d=26800$

b eingesetzt in III ergibt $a=0{,}9$; d eingesetzt in IV ergibt $c=0{,}1$

$\Rightarrow b=0{,}2 \quad d=0{,}8$

Also $A=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}8\end{pmatrix}$.

Diagramm:



Verteilung für 2005: $A\cdot\begin{pmatrix}73200\\26800\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}71240\\28760\end{pmatrix}$, d.h. 71240 leben in der City, 28760 in den Vororten.

Verteilung für 2010: $A\cdot\begin{pmatrix}71240\\28760\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}69868\\30132\end{pmatrix}$, d.h. 69868 leben in der City, 30132 in den Vororten.

Für den Verteilungsvektor $\vec{x}$ von 1985 gilt $A\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}80000\\20000\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}80000\\20000\end{pmatrix}$.

Bestimme A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}0{,}9 & 0{,}2 & 1 & 0\\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0 & 1\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc}0{,}9 & 0{,}2 & 1 & 0\\ 0 & 0{,}7 & -0{,}1 & 0{,}9\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc}-0{,}63 & 0 & -0{,}72 & 0{,}18\\ 0 & 0{,}7 & -0{,}1 & 0{,}9\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{2}{7}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{9}{7}\end{array}\right)$$

Damit ist $A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}80000\\20000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}85714\frac{2}{7}\\14285\frac{5}{7}\end{pmatrix}$. 1985 lebten ca. 85714 Leute in der City, 14286 in den Vororten.

2.) Für die stationäre Verteilung gilt: $A\cdot\vec{x}=\vec{x}$, also $\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}8\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\vec{x}$.

$-0{,}1x+0{,}2y=0$

$\quad 0{,}1x-0{,}2y=0$

Damit x=2y und $\vec{x}=r\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Da außerdem x+y=1, folgt $2r + r = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}$ und damit ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ die stationäre Verteilung.
Bezogen auf 100000 Einwohner heißt das: ca. 66667 Bewohner in der City und 33333 in den Vororten.
Für die stochastische Grenzmatrix G gilt:

$G = \lim_{n \to \infty} \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ denn diese stimmt in den Spalten überein, jede Spalte stellt die stationäre Verteilung dar, G multipliziert mit einem Verteilungsvektor verändert diesen nicht.

Langfristig ist mit $\frac{2}{3}$ City- und $\frac{1}{3}$ Vorortbewohner zu rechnen.

3.) $k \in IR$ ist Eigenwert der Matrix A, wenn gilt $A \cdot \vec{x} = k \cdot \vec{x}$.

$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = k \cdot \vec{x} \Leftrightarrow (0{,}9 - k)x + 0{,}2y = 0 \wedge 0{,}1x + (0{,}8 - k)y = 0$

$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}9-k & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}8-k & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}9-k & 0{,}2 & 0 \\ 0 & k^2 - 1{,}7k + 0{,}7 & 0 \end{array}\right)$

Das homogene LGS hat außer der trivialen Lösung eine Lösung, wenn gilt
$k^2 - 1{,}7k + 0{,}7 = 0 \Leftrightarrow k = 0{,}85 \pm \sqrt{0{,}0225} \Leftrightarrow k = 1 \vee k = 0{,}7$
k=1 bzw. k=0,7 sind die Eigenwerte der Matrix A.

Eigenvektor zum Eigenwert k_1=1: $(0{,}9 - 1) \cdot x + 0{,}2y = 0 \Leftrightarrow x = 2y \Rightarrow \vec{x} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eigenvektor zum Eigenwert k_2=0,7: $0{,}2x + 0{,}2y = 0 \Leftrightarrow x = -y \Rightarrow \vec{x} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.) Z.Z. ist: Die stationäre Verteilung der Matrix A ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} \\ \frac{p}{p+q} \end{pmatrix}$.

$A \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$\begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$(1-p)x + qy = x \wedge px + (1-q)y = y$

$-px + qy = 0 \wedge px - qy = 0 \Rightarrow x = \frac{q}{p}y$, da x+y=1 gilt

$\frac{q}{p}y + y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{p}{q+p}$. Damit: $x = \frac{q}{q+p}$.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{q}{q+p} \\ \frac{p}{q+p} \end{pmatrix}$ Da die stationäre Verteilung die Spalten der Grenzmatrix angibt, hat G die gegebene Form.

5.) Z.Z. ist für alle $p, q \in IR$ gilt (a) $A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1-p-q)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und (b) $A \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$.

(a) $\begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+p+q \\ -p+1-q \end{pmatrix} = (1-p-q)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q-pq+pq \\ pq+p-pq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$.

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Die Veröffentlichung dieser Lösung geschieht ohne inhaltliche Prüfung durch die Bezirksregierung Düsseldorf und den Mathe-Treff.
Die Lösung stammt nicht vom Originalautor der Aufgabe, sondern von einem Leser des Mathe-Treffs. Wir bedanken uns herzlich für die Erstellung der Aufgabenlösung.

Lösung zu Aufgabe Nr. 24 – Dreieckspyramiden

Alternativlösung

a)

Die Gerade g mit g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ verläuft senkrecht zu E durch den Punkt D. Für den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ebene gilt:

$$2 \cdot (9 + 2t) + (-4 + t) - 2 \cdot (-2 - 2t) = -18 \Leftrightarrow 18 + 9t = -18 \Leftrightarrow t = -4,$$

den Spiegelpunkt von D zur Ebene E erhält man für t = -8, also $D_{Spiegel}(-7|-12|14)$

b)

Flächeninhalt des Dreiecks mittels $A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -36 \\ -18 \\ 36 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot 54 = 27$ (FE)

Volumen der Pyramide

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) * \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix} -36 \\ -18 \\ 36 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|-648\right| = 108 \text{ (VE)}$$

c) Einsetzen der Geraden in die Ebene E ergibt:

$$2 \cdot (-6 + t \cdot (1 + 2k)) + (8 + t \cdot (2 - 2k)) - 2 \cdot (7 + t \cdot (2 + k)) = -18$$
$$\Leftrightarrow -12 + 2t + 4kt + 8 + 2t - 2kt - 14 - 4t - 2kt = -18$$
$$\Leftrightarrow -18 = -18$$

Die Geradenschar h_k liegt also in der Ebene E.

d) Der Richtungsvektor der Geraden AC und der Richtungsvektor der Schar sind linear abhängig für $k = -\frac{5}{3}$, außerdem liegt der Punkt A auf jeder Geraden der Schar, d.h. die Gerade AC gehört zu der Schar.

<u>Beweis der linearen Abhängigkeit:</u>

$$t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2k \\ 2-2k \\ 2+k \end{pmatrix}$$ führt auf die drei Gleichungen:

$I.\quad 7t = (1+2k)$
$II.\ \text{-}16t = (2\text{-}2k)$
$III. -1t = (2+k)$

Einsetzen von III. in I. und II. führt zu:

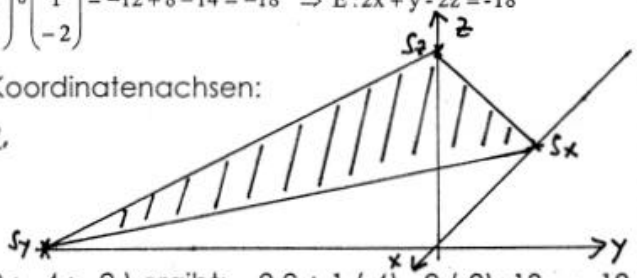
$\mathrm{I}^*\ -14-7k = 1+2k \Leftrightarrow k = -\frac{5}{3}$ und II* $32+16k = 2-2k \Leftrightarrow k = -\frac{5}{3}$

Aus III. folgt dann noch $t = -\frac{1}{3}$

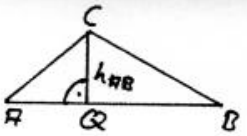
e)

$$h_5 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\cos a = \frac{\begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{234} \cdot \sqrt{306}} = \frac{198}{\sqrt{234} \cdot \sqrt{306}} \approx 0{,}74 \Rightarrow a \approx 42{,}3°$$

	I	II	III
a) Gegeben sind die Punkte A(- 6 ; 8 ; 7) , B(- 3 ; - 4 ; 4) , C(1 ; - 8 ; 6). Für die Parametergleichung ergibt sich: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix}$	3		
Bestimmung eines Normalenvektors mithilfe des Vektorproduktes: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ -18 \\ 36 \end{pmatrix}$. Jedes Vielfache ist auch ein Normalenvektor.	3	2	
$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \vec{a} \circ \vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -12 + 8 - 14 = -18 \quad \Rightarrow E: 2x + y - 2z = -18$			
b) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen: S_x (x/0/0) $\Rightarrow$ 2x=-18 $\Rightarrow$ <u>x=-9</u>, S_y (0/y/0) $\Rightarrow$ <u>y=-18</u>, S_z (0/0/z) $\Rightarrow$ <u>z=9</u> 	2	2	
c) Die Punktprobe mit D(9 ; - 4 ; - 2) ergibt: $2\cdot 9 + 1\cdot(-4) - 2\cdot(-2) = 18 \neq -18$.	2		
D ist kein Punkt der Ebene E. Mit der Hesseschen-Normalform ergibt sich für den Abstand d des Punktes D von der Ebene E: $d = \left\lvert \frac{2\cdot 9 + (-4) - 2\cdot(-2) + 18}{3} \right\rvert = \frac{36}{3} = 12.$		2	
Die Gerade g mit g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ verläuft senkrecht zu E durch den Punkt D.		3	
Für den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ebene gilt: $2(9+2t)+(-4+t)-2(-2-2t) = -18 \Rightarrow 18 + 4t - 4 + t + 4 + 4t = -18 \Rightarrow t = -4.$	2	2	2
Der Punkt D' dieser Geraden zu t = -8 ist der gesuchte Punkt, den man durch Spiegelung des Punktes D an der Ebene E erhält. Man erhält: $\vec{d} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow D'(-7/-12/14)$			
d) Gerade AB: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{162}$.	1		
Für die Höhe h zur Seite AB des Dreiecks ABC berechnet man: <u>1. Möglichkeit:</u> (Projektionsverfahren) (bevorzugtes Verfahren!)			

$$\vec{h}_{AB} = \overrightarrow{CQ} = \vec{q} - \vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}.$$



2

$$\overrightarrow{CQ} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} -7 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} -21-192-3+r(9+144+9)=0 \Rightarrow r = 1\frac{1}{3} \\ -216-162r=0 \end{array}$$

2 | 2

$$\vec{h}_{AB} = \overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} -7 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow |CQ| = \sqrt{18} \approx 4{,}24 \text{ LE.}$$

3

2. <u>Möglichkeit:</u> (Trigonometrie)

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{162}$ und $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{306}$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{162}\sqrt{306}} = \frac{21+192+1}{\sqrt{162}\sqrt{306}} = \frac{216}{\sqrt{162}\sqrt{306}} \approx 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 14{,}04°$$

$$\sin\alpha = \frac{h_{AB}}{|\overrightarrow{AC}|} \Rightarrow h_{AB} = |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin\alpha \approx 4{,}24 \text{ LE.}$$

Insgesamt erhält man für das Volumen der Dreieckspyramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot h_{AB} \cdot h_d = \frac{1}{6}\sqrt{162} \cdot 4{,}24 \cdot 12 \approx 108 \quad \text{(V.E.)}$$

3

e) Geradenschar: $h_k: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1+2k \\ 2-2k \\ 2+k \end{pmatrix} \quad (t, k \in R)$

Einsetzen in die Koordinatengleichung der Ebenen E:

2(-6+t(1+2k)+(8+t(2-2k))-2(7+t(2+k)= -18

⇒ -12+2t+4kt+8+2t-2kt-14-4t-2kt=-18 ⇒ - 18 = - 18

⇒ Jede Gerade hat unendlich viele Schnittpunkte mit der Ebene

⇒ Jede Gerade der Geradenschar liegt in der Ebene E.

4 | 2

f) Ist die Gerade AC eine Gerade der Geradenschar?

Gerade AC:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1+2k \\ 2-2k \\ 2+k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} 7 = 1+2k & k = 3 \\ -16 = 2-2k & \Rightarrow k = 9 \text{ (Widerspruch!)} \\ -1 = 2+k & k = -3 \end{array}$$

2 | 2

Die Gerade AC ist keine Gerade der Geradenschar.

$$h_5: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1+10 \\ 2-10 \\ 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{234}\sqrt{306}} = \frac{77+128-7}{\sqrt{234}\sqrt{306}} = \frac{198}{\sqrt{234}\sqrt{306}} \approx 0{,}74 \Rightarrow \alpha = 42{,}3°$$

2 | 2

ΣA3	26	23	4
%	49	43	8

a) Übergangsmatrix Von den in Deutschland umlaufenden Münzen bleiben 88 % in

3 / 3

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}88 & 0{,}06 & 0{,}15 \\ 0{,}06 & 0{,}9 & 0{,}05 \\ 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Deutschland (D), 6 % gehen nach Frankreich (F), 6 % gehen in sonstige Länder (S). Von den in Frankreich umlaufenden Münzen gehen 6 % nach D, bleiben 90 % in F und gehen 4 % nach S.

Von den in sonstigen Ländern umlaufenden Münzen gehen 15 % nach D, 5 % nach F und bleiben 80 % in S.

b)

$$D_{03} = A \cdot D_{02} = \begin{pmatrix} 0{,}88 & 0{,}06 & 0{,}15 \\ 0{,}06 & 0{,}9 & 0{,}05 \\ 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 88 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Man erhält wie erwartet, dass nach einem Jahr 88 % der deutschen Münzen in D, 6 % in F und 6 % in S befinden.

$$D_{04} = A \cdot D_{03} = \begin{pmatrix} 0{,}88 & 0{,}06 & 0{,}15 \\ 0{,}06 & 0{,}9 & 0{,}05 \\ 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 88 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78{,}7 \\ 10{,}98 \\ 10{,}32 \end{pmatrix}$$

Nach zwei Jahren befinden sich 78,7 % der deutschen Münzen in D, 10,98 % in F und 10,32 % in S

6 / 6

Die **2 -** jährige Übergangsmatrix ist $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0{,}787 & 0{,}1128 & 0{,}255 \\ 0{,}1098 & 0{,}8156 & 0{,}094 \\ 0{,}1032 & 0{,}0716 & 0{,}651 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$D_{06} = A^2 \cdot D_{04} \approx \begin{pmatrix} 65{,}807 \\ 18{,}567 \\ 15{,}626 \end{pmatrix}$$

Zum 1.1.06 sind 65,8 % der deutschen Münzen in D, 18,6 % in F und 15,6 % in S

c)D stationäre Verteilung $\Rightarrow$ $A \cdot D = D$, dies führt zu dem homogenen LGS:

6 / 6

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}12 & 0{,}06 & 0{,}15 & 0 \\ 0{,}06 & -0{,}1 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}06 & 0{,}04 & -0{,}2 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 3 & 7{,}5 & 0 \\ 6 & -10 & 5 & 0 \\ 6 & 4 & -20 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 3 & 7{,}5 & 0 \\ 0 & -7 & 12{,}5 & 0 \\ 0 & 7 & -12{,}5 & 0 \end{array}\right)$$

$-14d_2 + 25d_3 = 0 \Rightarrow d_3 = \frac{14}{25} \cdot d_2$ **Sei** $d_2 = 25t \Rightarrow$

$d_3 = 14t \Rightarrow 6d_1 = 3 \cdot 25t + 7{,}5 \cdot 14t = 180t \Rightarrow$

$d_1 = 30t \Rightarrow L = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ 14 \end{pmatrix}, t \in R \right\} \Rightarrow$ Mit $d_2 + d_2 + d_3 = 100$

ist $t = \frac{100}{69}$ und $D = 100 \cdot \begin{pmatrix} 10/23 \\ 25/69 \\ 14/69 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 43{,}48 \\ 36{,}23 \\ 20{,}29 \end{pmatrix}$ eine stationäre Verteilung, wobei

43,48 % der deutschen Münzen in D, 36,23 % in F
und 20,29 % in S-Ländern sind.

4 / 4

d) Die Anzahl der Münzen in Deutschland errechnet sich entweder aus $0{,}88 \cdot 800 + 0{,}06 \cdot 600 + 0{,}15 \cdot 150 = 762{,}50\ [\text{Mio}]$ und analog folgt, dass 595,5 Mio Münzen in Frankreich und 192 Mio. in den sonstigen Ländern am 1.1.2004 sind oder

mit Hilfe der Übergangsmatrix A zu $\begin{pmatrix} 762{,}5 \\ 595{,}5 \\ 192 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \\ 150 \end{pmatrix}$.

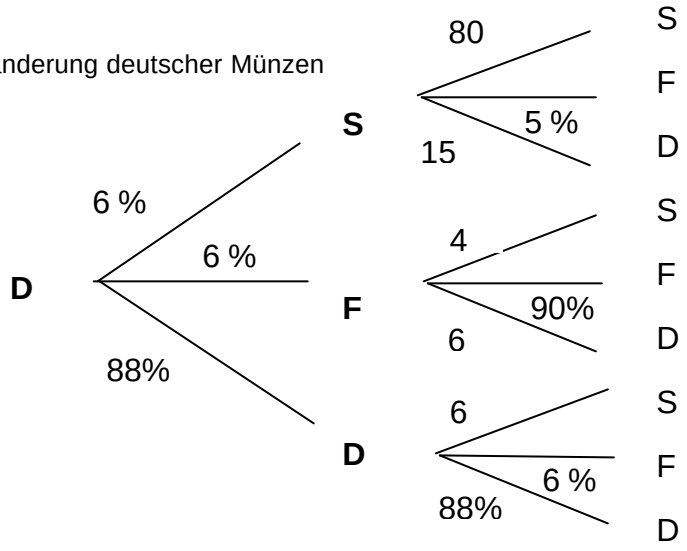
6 / 6

e) I $p(DD) = 0{,}7744 = 77{,}44\ \%$

II $p(FD;SD) = 0{,}0126 = 1{,}26\ \%$

III Satz von Bayes;

$p_D(F) = p(FD) / p(DD;FD;SD)$

$= 0{,}00457.. \approx 0{,}46\ \%$

Wanderung deutscher Münzen