

1 Finanzmathematik

(20 Punkte)

Der Luftsportclub Aufwind e. V. möchte eines seiner Segelflugzeuge verkaufen und lässt deshalb eine entsprechende Anzeige in einer einschlägigen Fachzeitschrift abdrucken. Drei verschiedene Kaufinteressenten melden sich daraufhin und unterbreiten folgende Angebote:

- A: 51.000,00 € sofort und 10 Jahre lang nachschüssig je 7.200,00 €.
- B: 23.000,00 € sofort, 45.000,00 € nach 4 Jahren und 60.000,00 € nach 6 Jahren.
- C: Beginnend in 3 Jahren sechsmal jährlich vorschüssig je 6.196,00 € und eine Abschlusszahlung in Höhe von 115.000,00 € in 10 Jahren.

- 1.1 Berechnen Sie, welches Angebot für den Luftsportclub am günstigsten ist, wenn mit dem marktüblichen jährlichen Zinssatz von 3,75 % gerechnet werden kann.

Der Luftsportclub erteilt dem Kaufinteressenten A den Zuschlag. Die sofort fälligen 51.000,00 € werden vom Vorstand auf ein Vereinskonto überwiesen, auf das zusätzlich jährlich nachschüssig je 45.000,00 € aus den Mitgliedsbeiträgen eingezahlt werden sollen.

- 1.2 Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren bei einem Zinssatz von 3,75 % das Guthaben auf dem Vereinskonto erstmals über 500.000 € betragen wird.

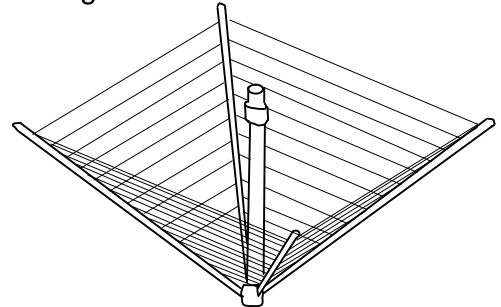
Für den Bau des neuen Vereinsheimes nimmt der Luftsportclub ein Hypothekendarlehen über 200.000,00 € auf, das bei einer Laufzeit von 15 Jahren mit 5 % verzinst und in gleich bleibenden Annuitäten getilgt werden soll.

- 1.3 Stellen Sie den Tilgungsplan für die ersten beiden Jahre auf.
- 1.4 Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren das Restdarlehen erstmals weniger als 60.000,00 € betragen würde, wenn der Club jährlich 24.000 € für Zinsen und Tilgung aufbringen könnte.

2 Folgen und Reihen

(20 Punkte)

Die Seilzüge einer Wäschespinne haben die Form von Quadraten (siehe Skizze). Die Länge einer Seite des obersten Quadrates beträgt 2,1 m. Jede folgende tiefere Seite eines Quadrates hat eine jeweils 16 cm kürzere Seitenlänge. Insgesamt sind es 11 kleiner werdende Quadrate.



- 2.1 Berechnen Sie, wie viel Meter Leine zum Bespannen einer Wäschespinne notwendig sind, wenn für das Verknüpfen und das jeweilige Weiterführen zum nächsten Quadrat insgesamt 1,8 m Leine erforderlich sind.

Im Januar 2007 stellte ein Betrieb 4.800 Wäschespinnen her. Durch schrittweise Rationalisierung kann der Betrieb die monatliche Produktion um 2 % steigern.

- 2.2 Berechnen Sie, ob die Firma im Jahr 2007 insgesamt 64.530 Wäschespinnen herstellen kann.
- 2.3 Berechnen Sie, wie hoch die Produktion von Wäschespinnen unter den genannten Bedingungen im Monat Juli 2007 ist.
- 2.4 Berechnen Sie, wie hoch eine monatlich gleich bleibende Steigerung sein müsste, um im Jahr 2007 insgesamt 64.530 Wäschespinnen produzieren zu können.

Eine arithmetische und eine geometrische Folge haben dasselbe Anfangsglied $a_1 = g_1 = 8$ und stimmen auch im zweiten Glied überein. Das dritte Glied der arithmetischen Folge verhält sich zum dritten Glied der geometrischen Folge wie 3 : 4.

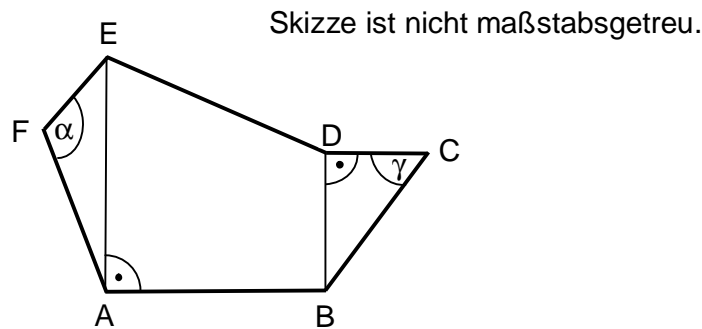
- 2.5 Berechnen Sie die ersten drei Glieder jeder möglichen Folge.

3 Trigonometrie/Geometrie

(20 Punkte)

Aus einem rechteckigen Holzstück soll die Figur ABCDEF herausgeschnitten werden. Folgende Maße sind gegeben:

$\overline{BD} = 3,3\text{cm}$; $\overline{CD} = 2,2\text{ cm}$; $\overline{DE} = 5,1\text{ cm}$; $\overline{AE} = 5,9\text{ cm}$; $\overline{EF} = 2,9\text{ cm}$; $\overline{AF} = 4,2\text{ cm}$



- 3.1 Berechnen Sie den Winkel γ . (Ergebnis: $\gamma = 56,31^\circ$)
- 3.2 Berechnen Sie \overline{AB} . (Ergebnis: $\overline{AB} = 4,39\text{ cm}$)
- 3.3 Berechnen Sie den Winkel α . (Ergebnis: $\alpha = 111,08^\circ$)
- 3.4 Berechnen Sie die Gesamtfläche A_{ges} der Figur. (Ergebnis: $A_{\text{ges}} = 29,51\text{ cm}^2$)
- 3.5 Berechnen Sie die Länge l und die Breite b der Holzfläche, wenn folgende Bedingungen gelten sollen:
 - Die Figur ist aus einem rechteckigen Stück zu fertigen. Sie darf also nicht aus Einzelstücken zusammengesetzt werden.
 - Es soll möglichst wenig Abfall entstehen.
 - Die Kante \overline{AB} liegt auf dem Rand der rechteckigen Holzfläche.
- 3.6 Berechnen Sie, wie viel Prozent der Abfall beträgt.

4 Gleichungen

(20 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Gleichungen jeweils die Definitions- und die Lösungsmenge in der Grundmenge der reellen Zahlen.

4.1 $\log_6(x+4) + \log_6(x-4) = 1 + \log_6 x$

4.2 $2 \cdot 4^{x+1} + 31 \cdot 2^x = 4$

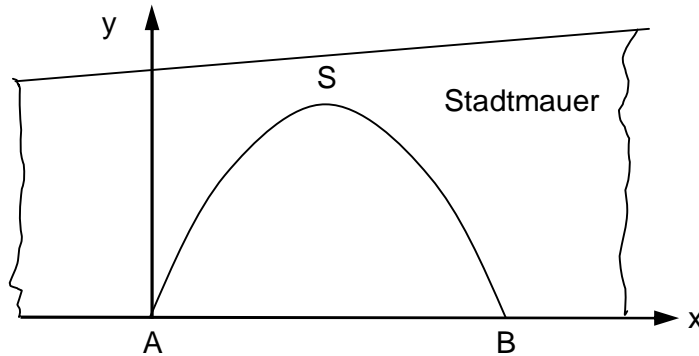
4.3 $\sqrt{x+37} - \sqrt{69-x} = 14$

5 Funktionen

(20 Punkte)

Ein Torbogen durch eine alte Stadtmauer hat die Form einer nach unten geöffneten Parabel p , wobei der Scheitel $S(2/3)$ ist und die Parabel p durch $A(0/0)$ geht (siehe Skizze.).

Skizze ist **nicht** maßstabsgetreu.



- 5.1 Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Parabel p .
(Ergebnis: $p: y = -0,75x^2 + 3x$)

- 5.2 Auf der Stadtmauer befindet sich ein steil ansteigender Weg, der durch die Punkte $C(-2|3)$ und $D(8|6)$ verläuft. Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g , die durch die Punkte C und D festgelegt ist.
(Ergebnis: $g: y = 0,3x + 3,6$)

- 5.3 Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden t , welche parallel zur Geraden g liegt und die Parabel p berührt.
(Ergebnis: $g: y = 0,3x + 2,43$)

- 5.4 Berechnen Sie den Berührungspunkt T .

- 5.5 Berechnen Sie die Breite b der Straße unter dem Torbogen, wenn die Koordinaten von A und S Metern entsprechen.

- 5.6 Zeichnen Sie die Parabel p , die Geraden g und t sowie die Punkte C , D und T in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.

6. Körperberechnung

(20 Punkte)

Ein gerader Pyramidenstumpf mit quadratischer Grund- und Deckfläche ist $h_{PS} = 15$ cm hoch und hat ein Volumen von $V_{PS} = 4160$ cm³.

Die Kante a_1 der Grundfläche ist um 16 cm länger als die Kante a_2 der Deckfläche.

- 6.1 Berechnen Sie die Kantenlängen der Grund - und Deckfläche.
(Ergebnis: $a_2 = 8$ cm; $a_1 = 24$ cm)

- 6.2 Berechnen Sie die Mantelfläche M_{PS} des Pyramidenstumpfes.

- 6.3 Der Pyramidenstumpf wird zu einer geraden Pyramide mit der Spitze S ergänzt. Berechnen Sie die Höhe h' der Ergänzungspyramide.
(Ergebnis: $h' = 7,5$ cm)

- 6.4 Berechnen Sie die Länge der Seitenkante s der ganzen Pyramide, die aus der Ergänzungspyramide und dem Pyramidenstumpf besteht. Berechnen Sie außerdem den Neigungswinkel α der Seitenkante s zur Grundfläche.

- 6.5 Berechnen Sie das Volumenverhältnis zwischen der Ergänzungspyramide V' und der ganzen Pyramide V_P .