

1 Finanzmathematik

(20 Punkte)

Ein Vater möchte seinen Kindern Max und Petra ein Startkapital für ihre Berufsausbildung ansparen und schließt deshalb für beide eine Ausbildungsversicherung ab. Max soll am 01.01.2015 über 5.000 € und Petra am 01.01.2019 über 5.500 € verfügen können.

Über den gesamten Zeitraum wird mit einem Zinssatz von 4 % pro Jahr gerechnet.

- 1.1 Berechnen Sie die Rate für Max, wenn der Vater am 01.01.2007 mit der Einzahlung beginnt!

Für Petra möchte der Vater ab dem Ende des Jahres 2007 jährlich 250 € einzahlen, aber bereits am 01.01.2007 eine einmalige Vorauszahlung leisten.

- 1.2 Berechnen Sie die Höhe dieser Vorauszahlung.
(Ergebnis: 1.089,02 €)

Max rechnet ab dem Jahr 2015 mit jährlichen Studiengebühren von 1.000 €.

- 1.3 Berechnen Sie, wie viele volle Jahre Max die Studiengebühren vorschüssig von seiner Ausbildungsversicherung finanzieren könnte, wenn er eine Verzinsung von 2 % annimmt!

- 1.4 Berechnen Sie die für Petra angesparte Summe zum 1.1.2015!

Eine Bank bietet ihren Sparern das so genannte Zuwachssparen an. Im ersten Jahr wird die Geldanlage mit 2 % verzinst, im zweiten mit 2,2 %, im dritten mit 2,4 %, im vierten mit 2,75 %, im fünften mit 3 % und im letzten Jahr mit 4 %.

- 1.5 Berechnen Sie das Guthaben am Ende des 6. Jahres, wenn 10.000 € angelegt wurden, wenn weitere Einzahlungen nicht möglich und Abhebungen nicht geplant sind!

- 1.6 Berechnen Sie die durchschnittliche Verzinsung für die Gesamtlaufzeit!

2 Folgen und Reihen

(20 Punkte)

Der Erdölverbrauch wird in Milliarden Barrel angegeben. Man verwendet dafür die Bezeichnung Gigabarrel oder kurz Gb. (Für die folgende Rechnung unwichtig: 1 Barrel entspricht ungefähr 159 l.)

Zu Beginn des Jahres 1950 betragen die Erdölreserven weltweit 650 Gb. Der Verbrauch wurde 1950 auf 5 Gb bei einer jährlich durchschnittlichen Steigerungsrate von 3 % geschätzt.

2.1 Berechnen Sie, in welchem Jahr sich der Verbrauch verdoppelt!

2.2 Berechnen Sie die Höhe des Verbrauchs 1997!

2.3 Berechnen Sie, in welchem Jahr die Reserven aufgebraucht sind!

Tatsächlich wurden aber immer neue Erdölvorräte entdeckt. Schon 1950 hat man 28 Gb und in den folgenden Jahren jeweils 1,9 Gb mehr als im Vorjahr gefunden.

2.4 Berechnen Sie, wie viel Gb Erdöl im Jahr 1965 neu entdeckt werden konnten!

2.5 Berechnen Sie, bis zu welchem Jahr insgesamt 500 Gb neu entdeckt werden konnten!

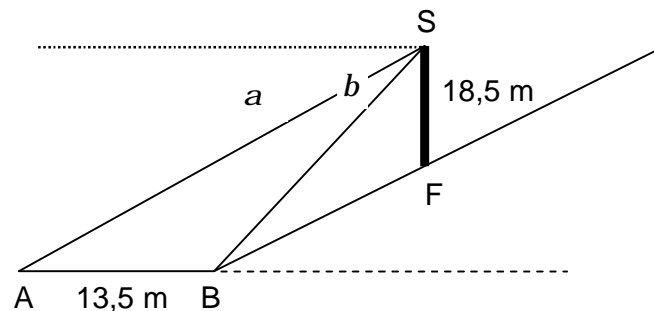
Mitte der 60er Jahre nahm die Entdeckung neuer Erdölvorräte spürbar ab. 1975 wurden nur noch 35 Gb und 1995 gar nur noch 11 Gb entdeckt.

2.6 Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Funde neuer Erdölvorkommen von 1975 bis 1995 durchschnittlich pro Jahr abnahmen!

3 Trigonometrie/Geometrie

(20 Punkte)

Ein Aussichtsturm mit der Höhe 18,5 m steht an einem gleichmäßig geneigten Hang BF, an dessen Fuß ein 13,5 m breiter Fluss vorbei fließt. Von der Aussichtsplattform S des Turms blickt man unter einem Tiefenwinkel (Senkungswinkel) $\alpha = 38,5^\circ$ auf das jenseits gelegene Ufer A des Flusses. Der Tiefenwinkel (Senkungswinkel) von der Aussichtsplattform S auf das diesseitige Ufer B beträgt $\beta = 42,0^\circ$.



- 3.1 Berechnen Sie die Entfernung von S nach B!
(Ergebnis: $\overline{SB} = 137,66$ m)

- 3.2 Berechnen Sie die Entfernung von B nach F!
(Ergebnis: $\overline{BF} = 126,03$ m)

- 3.3 Berechnen Sie die Höhe h_S der Aussichtsplattform S über dem Flussufer!
(Ergebnis: $h_S = 92,11$ m)

- 3.4 Berechnen Sie den Steigungswinkel γ des Hanges BF sowie die Steigung in Prozent!

- 3.5 Berechnen Sie die waagerechte Entfernung e des Turmes vom jenseitigen Flussufer!

4 Gleichungen

(20 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Definitions- und Lösungsmenge folgender Gleichungen in der Grundmenge $G = \mathbb{R}$!

4.1 $21^{4x-3} = 3^{2x-2} \cdot 7^{6x-4}$

4.2 $\lg(4+x) - \lg(1,3x-5,2) = 1 - \lg(x-4)$

4.3 $3^{2x+3} - 9^{x+2} + (\sqrt{3})^{4x+10} = 63$

5 Funktionen

(20 Punkte)

Ein Schlagball wird von einer 40 m hohen Turmspitze A schräg so nach oben geworfen, dass die Flugbahn einer nach unten geöffneten Normalparabel gleicht. Nach Überschreiten der maximalen Höhe ist der Ball im Punkt B 15 m vom Turm entfernt und hat wieder eine Höhe von 40 m über der Erdoberfläche.

- 5.1 Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Flugbahn, wenn der Fußpunkt des Turmes im Koordinatenursprung liegen soll!
(Ergebnis: $p : y = -x^2 + 15x + 40$)
- 5.2 Berechnen Sie auf zwei Nachkommastellen, in welcher Entfernung vom Turm der Ball auf den Boden aufschlägt!
- 5.3 Berechnen Sie die maximale Höhe der Flugbahn über der Erdoberfläche!
- 5.4 Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an die Flugbahn im Abwurfpunkt A!

6. Vektorrechnung

(20 Punkte)

Gegeben sind die Geradengleichungen:

$$g_1: y = \frac{1}{4}x + 1$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- 6.1 Bestimmen Sie für die Funktionsgleichung von g_1 eine vektorielle Parameterform mit dem Parameter $\sigma \in \mathbb{R}$!
- 6.2 Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g_2 mit der Geraden g_3 !
- 6.3 Berechnen Sie für die Gerade g_3 die Funktionsgleichung!
- 6.4 Ein Vektor \overline{AB} mit $A(-19/11)$ und $B(-7/y_B)$ hat die Länge 13 LE. Berechnen Sie die Werte von y_B !
- 6.5 Der Vektor $\overline{CD} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ wird durch die Punkte $C(1/y_C)$ und $D(x_D/-1)$ bestimmt. Berechnen Sie die Koordinaten x_D und y_C !