Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Jänner 2018

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin/der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin/vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Geraden

Gegeben sind die Parameterdarstellung einer Geraden g sowie die Gleichungen von drei weiteren Geraden g_1, g_2, g_3.

$g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$

$g_1\colon 3 \cdot x + y = 9$

$g_2\colon y = -3 \cdot x + 10$

$g_3\colon x - 3 \cdot y = -7$

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche der Geraden g_1, g_2, g_3 mit der Geraden g einen rechten Winkel einschließen, und begründen Sie Ihre Antwort!

Leitfrage:

Geben Sie an, welche der vier gegebenen Geraden identisch sind, und begründen Sie Ihre Antwort!

Geben Sie an, wie die Werte von a_1 und b_2 (mit $a_1, b_2 \in \mathbb{R}$) der Geraden $h\colon X = \begin{pmatrix} a_1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ zu wählen sind, damit g und h genau einen Schnittpunkt haben!
Begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösung zur Aufgabe 1

Geraden

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Geraden g_1 und g_2 schließen mit g einen rechten Winkel ein.

Mögliche Begründung:
Der Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ von g ist zugleich ein Normalvektor von g_1 und g_2.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn angegeben wird, dass ausschließlich g_1 und g_2 mit g einen rechten Winkel einschließen, und dies auch (sinngemäß) korrekt begründet wird.

Begründungen anhand entsprechender Skalarprodukte bzw. anhand von Skizzen sind ebenfalls zulässig.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Geraden g und g_3 sind identisch.

Mögliche Begründung:
Beide Geraden haben den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Punkt $P = (2|3)$ liegt auf beiden Geraden.

Damit g und h genau einen Schnittpunkt haben, müssen sie unterschiedliche Steigungen haben, d. h., es muss $b_2 \neq \frac{1}{3}$ gelten. Da a_1 nur die Position des Schnittpunkts bestimmt, nicht aber seine Existenz, kann für a_1 jede reelle Zahl gewählt werden.

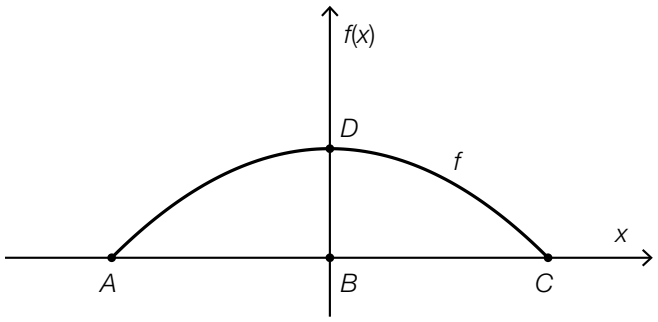
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn angegeben wird, dass g_3 und g identisch sind, und dies korrekt begründet wird.
Weiters sind Bedingungen für die Werte a_1 und b_2 richtig anzugeben und es ist deren Wahl zu begründen.
Falls für a_1 und b_2 konkrete richtige Werte genannt werden, ist der Punkt zu vergeben.

Aufgabe 2

Brückenbogen

In der nachstehenden Abbildung ist ein Brückenbogen dargestellt. Die Strecke *AC* mit dem Mittelpunkt *B* hat eine Länge von 40 Metern, die maximale Höhe *BD* des Brückenbogens beträgt 10 Meter.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Funktion *f* mit $f(x) = a \cdot x^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), mit der der Verlauf des beschriebenen Brückenbogens modelliert werden kann, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Damit auch größere Fahrzeuge unter so einem Brückenbogen durchfahren können, soll die Höhe *BD* vergrößert werden. Erklären Sie, ob man die Parameter *a* und *b* der Modellierungsfunktion *f* mit $f(x) = a \cdot x^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) dabei jeweils größer, kleiner oder gleich wählen muss, wenn der Abstand *AC* unverändert bleiben soll!

Wenn der Punkt *A* als Koordinatenursprung gewählt wird, muss zur Modellierung eine Funktion *g* mit $g(x) = c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ ($c, d, e \in \mathbb{R}$) herangezogen werden.

Setzen Sie „<“, „>“ oder „=“ so ein, dass die Aussagen über *c*, *d* und *e* für die gewählte Funktion *g* zutreffen!

c ___ 0; *d* ___ 0; *e* ___ 0

Lösung zur Aufgabe 2

Brückenbogen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Vorgehensweise:
$D = (0|10) \Rightarrow b = 10$

Die Nullstelle von f liegt bei $x = 20$ (bzw. -20).
$f(20) = 0 \Rightarrow 0 = 400 \cdot a + 10 \Rightarrow a = -\frac{1}{40} = -0{,}025$

$f(x) = -0{,}025 \cdot x^2 + 10$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Funktionsgleichung ermittelt und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Wenn die Höhe BD vergrößert wird, wird der Parameter b größer. Da die Nullstellen unverändert bleiben, muss der Parameter a kleiner werden.

$c < 0$; $d > 0$; $e = 0$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Änderung beider Parameter (sinngemäß) korrekt erklärt wird und die jeweils korrekten Zeichen eingesetzt werden.

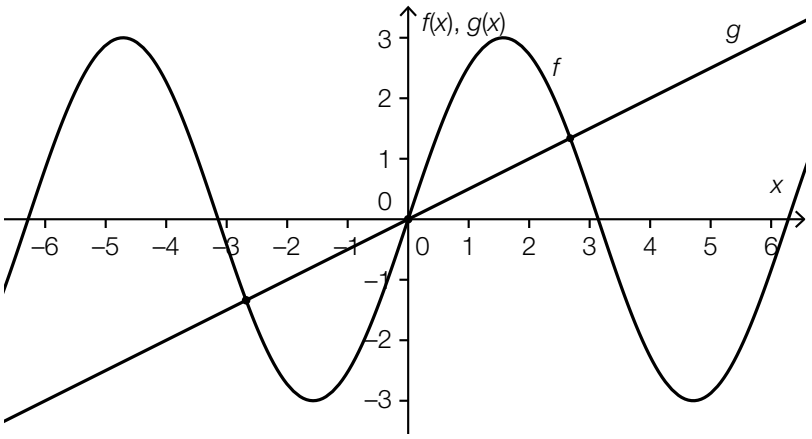
Aufgabe 3

Funktionen

Gegeben sind die Gleichungen und Graphen der Funktionen f und g mit:

$f(x) = 3 \cdot \sin(x)$

$g(x) = \frac{x}{2}$



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie diejenige Stelle x_1 im Intervall $[0; \pi]$, für die $f'(x_1) = g'(x_1)$ gilt, und erklären Sie, wie man diese Stelle grafisch ermitteln kann!

Leitfrage:

Die Gleichung $f(x) = g(x)$ hat für x drei Lösungen a, 0 und c mit $a < 0 < c$.

Stellen Sie den Wert des Terms $\int_0^c (f(x) - g(x))\,dx$ in der oben stehenden Abbildung grafisch dar!

Geben Sie den Wert des Terms $\int_a^c (f(x) - g(x))\,dx$ an!

Lösung zur Aufgabe 3

Funktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

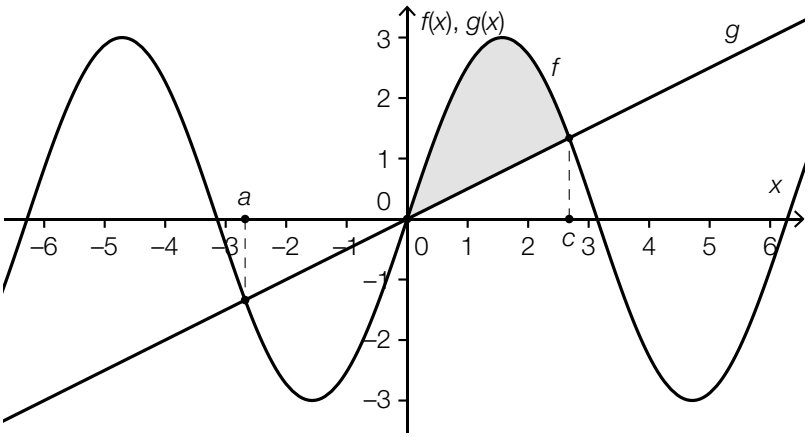
$3 \cdot \cos(x_1) = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 \approx 1{,}4$

Der Wert von x_1 beschreibt diejenige Stelle (im Intervall $[0; \pi]$), an der die Steigung der Geraden mit der Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f übereinstimmt. Verschiebt man die Gerade g so, dass sie den Graphen von f im Intervall $[0; \pi]$ berührt, erhält man diesen Wert als x-Koordinate des Berührpunkts.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn x_1 korrekt berechnet und seine grafische Ermittlung (sinngemäß) korrekt erklärt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:



Der Wert des Terms $\int_a^c (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ ist null.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die gesuchte Fläche dargestellt und der Wert des Integrals $\int_a^c (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ korrekt angegeben wird.

Aufgabe 4

Reaktionszeiten

Eine Testperson ermittelt ihre Reaktionszeit (in s) mithilfe eines Online-Tests, den sie zehnmal ausführt, und erzielt dabei die nachstehenden Werte:

0,38 s; 0,27 s; 0,30 s; 0,34 s; 0,25 s; 0,39 s; 0,28 s; 0,24 s; 0,33 s; 0,32 s

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie das arithmetische Mittel $\bar{t}$ der zehn angegebenen Zeiten sowie die Standardabweichung s!

Geben Sie an, wie viel Prozent der angegebenen Reaktionszeiten sich im Intervall $[\bar{t} - s; \bar{t} + s]$ befinden!

Leitfrage:

Die Testperson führt noch zwei weitere Male diesen Test aus und erreicht dabei die Zeiten t_{11} und t_{12} mit $t_{11} \neq t_{12}$. Das arithmetische Mittel, das nun aus allen zwölf Zeiten gebildet wird, wird mit $\bar{t}_{neu}$, die daraus resultierende Standardabweichung mit s_{neu} bezeichnet.

Geben Sie an, welche Bedingungen die Zeiten t_{11} und t_{12} erfüllen müssen, damit $\bar{t}_{neu} = \bar{t}$ und $s_{neu} < s$ gilt!

Lösung zur Aufgabe 4

Reaktionszeiten

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\bar{t} = 0{,}31$
$s \approx 0{,}05$
$[\bar{t} - s;\ \bar{t} + s] \approx [0{,}26;\ 0{,}36]$

Im angegebenen Intervall befinden sich 6 Reaktionszeiten, das sind 60 %.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn das arithmetische Mittel, die Standardabweichung und der gesuchte Prozentsatz korrekt angegeben werden.

Toleranzintervalle:
für die Standardabweichung: [0,048; 0,052]
für die untere Intervallgrenze: [0,258; 0,262]
für die obere Intervallgrenze: [0,358; 0,362]

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die neuen Werte müssen symmetrisch zum arithmetischen Mittel $\bar{t}$ liegen, also $\frac{t_{11} + t_{12}}{2} = \bar{t}$ betragen.

Wenn die neuen Werte im Intervall $(\bar{t} - s;\ \bar{t} + s)$ liegen, dann gilt $s_{neu} < s$.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die gesuchten Bedingungen für die Zeiten t_{11} und t_{12} (sinngemäß) korrekt angegeben werden. Dabei ist eine Aussage der Form, dass die Werte t_{11} und t_{12} in der Nähe des arithmetischen Mittels liegen müssen, als Begründung für $s_{neu} < s$ zu akzeptieren.

Aufgabe 5

Lotterie

Bei 100 Losen gibt es 30 Gewinnlose („Treffer“), darunter sind 25 Lose zu je € 10 Gewinn und fünf Lose zu je € 100 Gewinn.

Aufgabenstellung:

Aus diesen 100 Losen werden drei Lose zufällig ausgewählt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mit diesen drei Losen kein Treffer erzielt wird, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Jemand bekommt aus diesen 100 Losen ein zufällig ausgewähltes Los geschenkt.
Geben Sie den Erwartungswert für den Gewinn an!

Eine andere Person bekommt aus diesen 100 Losen zwei zufällig ausgewählte Lose geschenkt.
Geben Sie einen Ausdruck zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass diese Person € 110 Gewinn erzielt, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 5

Lotterie

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Keinen Treffer zu erzielen bedeutet, dass man aus den restlichen 70 Losen drei Lose ohne Zurücklegen zieht.

$\frac{70}{100} \cdot \frac{69}{99} \cdot \frac{68}{98} \approx 0{,}3385 = 33{,}85\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit korrekt angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.
Toleranzintervall für die Wahrscheinlichkeit: [33 %; 34 %]

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\frac{25}{100} \cdot 10 + \frac{5}{100} \cdot 100 = 7{,}5$

Der Erwartungswert für den Gewinn beträgt € 7,50.

€ 110 Gewinn bedeutet, dass man bei zwei Losen einen Treffer zu € 10 und einen Treffer zu € 100 erzielt.

möglicher Ausdruck zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit: $2 \cdot \frac{25 \cdot 5}{100 \cdot 99}$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Gewinnerwartung und der gesuchte Ausdruck korrekt angegeben werden und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.
Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Jänner 2018

Mathematik

Kompensationsprüfung 2
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin/der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin/vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

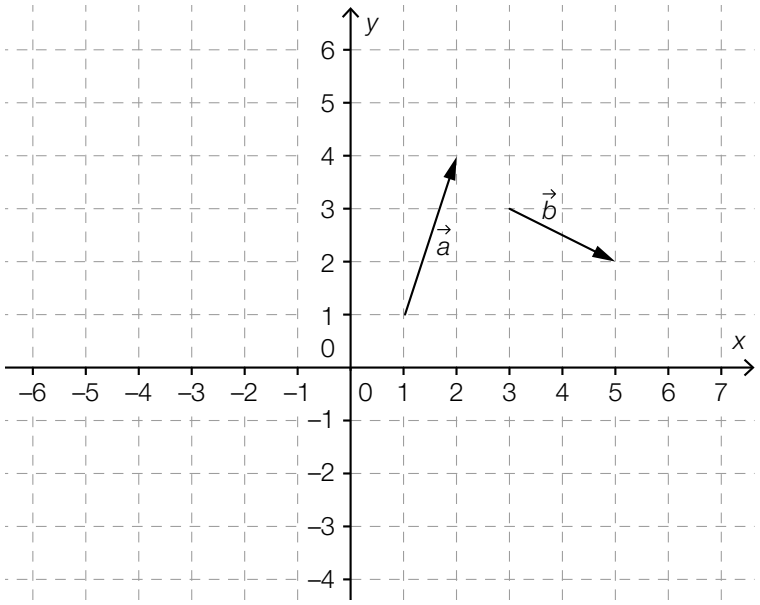
Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Vektoren in der Ebene

Im nachstehenden Koordinatensystem sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingezeichnet.



Aufgabenstellung:

Geben Sie an, wie man den Vektor $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$ grafisch ermitteln kann, zeichnen Sie diesen Vektor in das Koordinatensystem ein und lesen Sie aus der Grafik die Koordinaten (die Komponenten) dieses Vektors ab!

Leitfrage:

Geben Sie eine Parameterdarstellung derjenigen Geraden *g* an, die durch den Ursprung (0|0) verläuft und den Vektor $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$ als Richtungsvektor hat!

Erläutern Sie die möglichen Lagebeziehungen zweier Geraden in der Ebene und geben Sie für jede dieser Möglichkeiten eine Parameterdarstellung einer Geraden an, die zur Geraden *g* diese Lagebeziehung aufweist!

Lösung zur Aufgabe 1

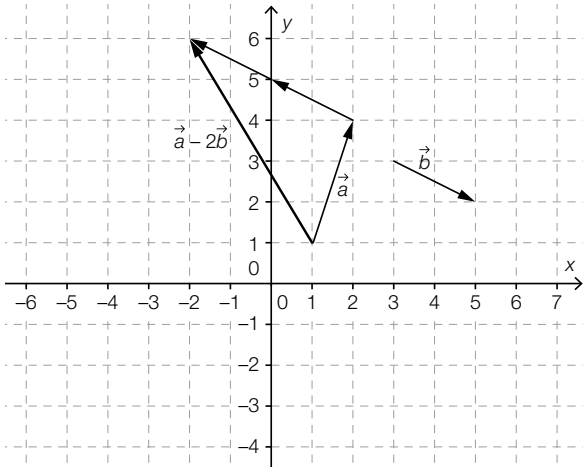
Vektoren in der Ebene

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Vorgehensweise:

An den Vektor $\vec{a}$ wird ein Vektor angehängt, der doppelt so lang wie der Vektor $\vec{b}$ und entgegengesetzt orientiert ist.

$\vec{a} - 2 \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn (sinngemäß) korrekt angegeben wird, wie der Vektor grafisch ermittelt werden kann, und der Vektor sowohl korrekt eingezeichnet wird als auch seine Koordinaten richtig angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Parameterdarstellung:

$g: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ (mit $s \in \mathbb{R}$)

Lagebeziehungen zweier Geraden in der Ebene: identisch, parallel und schneidend

Mögliche Beispiele:

identisch mit g: $h: X = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ (mit $t \in \mathbb{R}$)

parallel zu g: $k: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ (mit $t \in \mathbb{R}$)

schneidend mit g: $j: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (mit $t \in \mathbb{R}$)

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Parameterdarstellung für g angegeben wird, alle möglichen Lagebeziehungen richtig genannt werden und für jede dieser Lagebeziehungen jeweils eine korrekte Parameterdarstellung einer Geraden angeführt wird. Andere korrekte Parameterdarstellungen sind als richtig zu werten, wobei der Richtungsvektor der Geraden j kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ sein darf.

Aufgabe 2

Schwimmbad

Ein Schwimmbecken fasst 36 000 Liter Wasser. Zum Füllen des leeren Beckens wird Wasser über einen Schlauch zugeleitet. Die zum vollständigen Befüllen notwendige Zeit t (in Sekunden) hängt von der Durchflussrate x (in Litern/Sekunde) ab.

Aufgabenstellung:

Die Funktion t beschreibt die Abhängigkeit der Füllzeit von der Durchflussrate x.
Geben Sie eine Funktionsgleichung dieser Funktion an und beschreiben Sie den Verlauf des Graphen!

$t(x) =$ _____

Leitfrage:

Geben Sie jeweils an, welche Bedingung der Parameter a bzw. der Parameter λ einer Exponentialfunktion $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ erfüllen muss, damit f für alle $x \in \mathbb{R}^+$ das gleiche Monotonie- und Krümmungsverhalten wie die Funktion t zeigt!

Geben Sie weiters an, wodurch sich die Verläufe der Graphen der Funktionen t und f wesentlich unterscheiden!

Lösung zur Aufgabe 2

Schwimmbad

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$t(x) = \frac{36\,000}{x}$

Der Graph von t verläuft asymptotisch zu beiden Achsen, ist streng monoton fallend und linksgekrümmt (positiv gekrümmt).

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Funktionsgleichung richtig angegeben wird und der Verlauf des Graphen korrekt beschrieben wird. Eine passende Skizze ist ebenfalls als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Für den Parameter λ der Exponentialfunktion muss gelten: $\lambda < 0$.
Für den Parameter a der Exponentialfunktion muss gelten: $a > 0$.

Der Graph von f hat einen Schnittpunkt mit der senkrechten Achse.

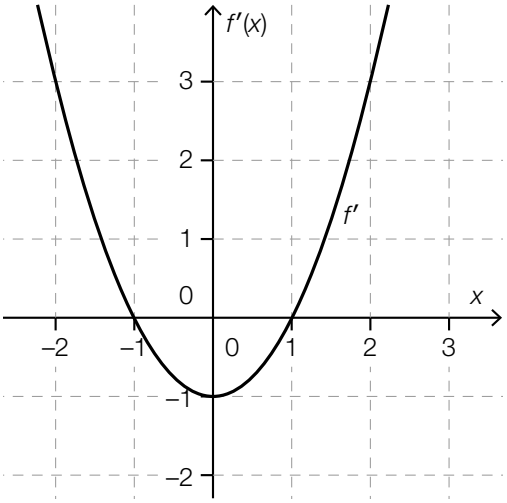
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die jeweilige Bedingung für beide Parameter richtig angegeben und ein wesentlicher Unterschied im Verlauf der beiden Graphen genannt wird.

Aufgabe 3

Ableitungsfunktion

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f' zweiten Grades.
Die Funktion f' ist die Ableitungsfunktion einer Funktion f.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Wendestelle der Funktion f und erläutern Sie das Krümmungsverhalten von f!

Leitfrage:

Die erste Ableitungsfunktion f' einer Polynomfunktion f ist durch die Gleichung $f'(x) = x^2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gegeben.

Beschreiben Sie die Abhängigkeit der Anzahl der (lokalen) Extremstellen der Polynomfunktion f vom Wert des Parameters c und begründen Sie Ihre Aussagen!

Lösung zur Aufgabe 3

Ableitungsfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Wendestelle von f liegt bei $x = 0$.

Im Intervall $(-\infty; 0)$ ist f rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt), da f' in diesem Intervall streng monoton fallend ist und somit die Funktionswerte der zweiten Ableitungsfunktion in diesem Bereich negativ sind.

Im Intervall $(0; \infty)$ ist f linksgekrümmt (positiv gekrümmt), da f' in diesem Intervall streng monoton steigend ist und somit die Funktionswerte der zweiten Ableitungsfunktion in diesem Bereich positiv sind.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wendestelle der Funktion f richtig bestimmt wird und das Krümmungsverhalten (sinngemäß) korrekt erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$c > 0$:
Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat keine reelle Lösung. Die Polynomfunktion f hat somit keine (lokalen) Extremstellen.

$c < 0$:
Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat zwei reelle Lösungen. Die Polynomfunktion f hat somit zwei (lokale) Extremstellen.

$c = 0$:
Aus $f'(x) = 0$ folgt in diesem Fall $x = 0$. Da zusätzlich $f''(0) = 0$ gilt, hat die Polynomfunktion f bei $x = 0$ eine Wendestelle (mit waagrechter Tangente) und somit keine (lokalen) Extremstellen.

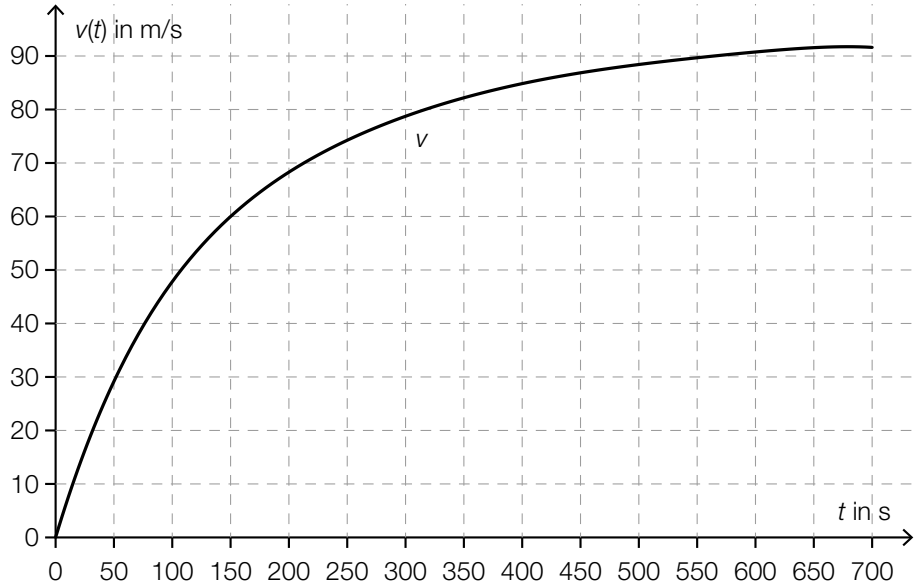
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Einfluss des Parameters c auf die Anzahl der Extremstellen der Polynomfunktion f korrekt beschrieben und begründet wird.

Aufgabe 4

ICE

In der nachstehenden Abbildung ist der Beschleunigungsvorgang eines Hochgeschwindigkeitszuges ICE (Intercity-Express) dargestellt. Dabei ist die Geschwindigkeit v in Metern pro Sekunde (m/s) in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden (s) dargestellt. Der Beschleunigungsvorgang dauert 700 s, die erreichte Endgeschwindigkeit beträgt 92 m/s.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit während des Beschleunigungsvorgangs und interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Geben Sie mithilfe eines bestimmten Integrals einen Ausdruck an, um die während der ersten 500 Sekunden des Beschleunigungsvorgangs zurückgelegte Weglänge (in Metern) berechnen zu können!

Veranschaulichen Sie diese Weglänge in der obigen Abbildung und geben Sie einen Näherungswert für diese Weglänge an! Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 4

ICE

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\frac{v(700) - v(0)}{700} = \frac{92}{700} \approx 0{,}13$$

Mögliche Interpretationen:

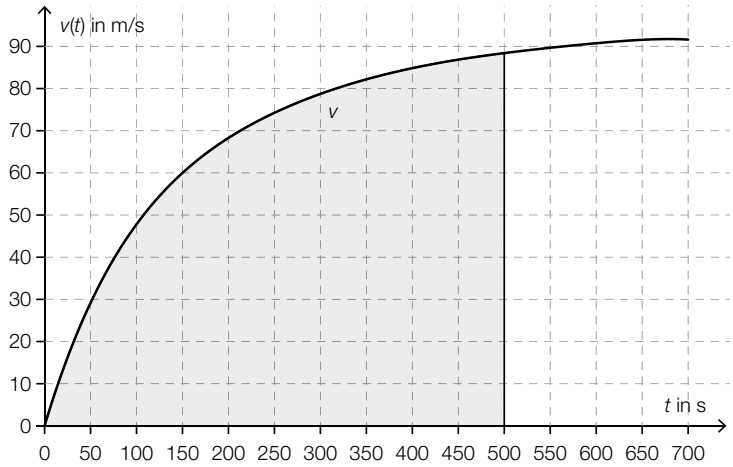
- Während des Beschleunigungsvorgangs beträgt die mittlere Beschleunigung ca. 0,13 m/s^2.
- Die Geschwindigkeit nimmt während des Beschleunigungsvorgangs in jeder Sekunde um durchschnittlich ca. 0,13 m/s zu.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit richtig ermittelt und korrekt interpretiert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Weglänge: $\int_0^{500} v(t)\,\mathrm{d}t$



Die Weglänge beträgt ca. 33 000 m.

Die Weglänge entspricht der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion v und der t-Achse im Zeitintervall [0 s; 500 s]. Die näherungsweise Ermittlung kann beispielsweise mithilfe der Unter- oder Obersumme bzw. durch Abzählen der Rechtecke (wobei ein Rechteck einem Wert von 500 m entspricht) erfolgen.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für die Berechnung der Weglänge ein korrekter Ausdruck angegeben, die Weglänge in der Abbildung korrekt veranschaulicht, ein passender Näherungswert angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.
Toleranzintervall für die Weglänge: [28 000 m; 37 000 m]

Aufgabe 5

Zielscheibe

Bei einem Wettkampf schießen drei Schützen *A*, *B* und *C* von einer Mannschaft auf eine Zielscheibe.

Der Schütze *A* trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %, der Schütze *B* mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % und der Schütze *C* mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % in das Zentrum der Zielscheibe.

Aufgabenstellung:

Jeder der drei Schützen schießt genau einmal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Schütze in das Zentrum der Zielscheibe trifft, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Aufgrund der geringen Treffsicherheit des Schützen *C* beschließt der Trainer der Mannschaft, den Schützen *C* durch den Schützen *D* zu ersetzen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer der drei Schützen *A*, *B* und *D* (bei einmaligem Schießen jedes Schützen) in das Zentrum der Zielscheibe trifft, liegt bei 20,4 %.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Schütze *D* in das Zentrum der Zielscheibe trifft!

Lösung zur Aufgabe 5

Zielscheibe

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}958 = 95{,}8\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Schütze in das Zentrum der Zielscheibe trifft, kann mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses (keiner der Schützen trifft in das Zentrum der Zielscheibe) berechnet werden.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet und eine korrekte Vorgehensweise erklärt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Trefferwahrscheinlichkeit des Schützen *D* wird mit x bezeichnet:

$0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot (1 - x) + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot (1 - x) + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot x = 0{,}204$

$x = 0{,}55 = 55\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet wird.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Oktober 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin/der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin/vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Geraden in $\mathbb{R}^3$

Gegeben ist eine Parameterdarstellung der Geraden g:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Aufgabenstellung:

Weiters ist ein Punkt $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ -4 \\ p_3 \end{pmatrix}$ mit $p_1, p_3 \in \mathbb{R}$ gegeben.

Geben Sie p_1 und p_3 so an, dass der Punkt P auf der Geraden g liegt!

Leitfrage:

Geben Sie an, wie die Gerade g in Bezug zur x-, y- und z-Achse jeweils liegt (parallel, identisch, schneidend bzw. windschief), und begründen Sie Ihre Aussagen!

Weiters ist die Parameterdarstellung der Geraden h in Abhängigkeit von a_1, a_2, a_3 (mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$) gegeben:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

Geben Sie an, welche Bedingungen a_1, a_2 und a_3 erfüllen müssen, damit die Geraden g und h aufeinander normal stehen!

Lösung zur Aufgabe 1

Geraden in $\mathbb{R}^3$

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$p_1 = 1$
$p_3 = -5$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Werte korrekt angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Begründungen:

Die Gerade g ist parallel zur y-Achse, weil der Richtungsvektor von g ein Vielfaches vom Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist und der Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ nicht auf der y-Achse liegt.
Da die Gerade g zur y-Achse parallel ist und der Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ weder in der xy-Ebene noch in der yz-Ebene liegt, ist g windschief zur x-Achse und zur z-Achse.
Aus $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$ folgt, dass a_1 und a_3 frei wählbar sind und $a_2 = 0$ ist.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Lagebeziehungen zwischen der Geraden g und den Koordinatenachsen korrekt angegeben und der Lösungserwartung (sinngemäß) entsprechend begründet werden (wobei eine korrekte Argumentation mithilfe von Schrägrissskizzen zulässig ist) sowie korrekte Bedingungen für a_1, a_2 und a_3 angegeben werden.

Aufgabe 2

Temperaturabnahme

Die Temperaturabnahme in einer Wand mit der Dicke D (in cm), an deren Innen- bzw. Außenseite die Temperaturen T_i bzw. T_a (in °C) herrschen, kann mithilfe einer linearen Funktion T mit $T(e) = k \cdot e + d$ modelliert werden. Dabei ist $T(e)$ die Temperatur in °C im Abstand e ($0 \leq e \leq D$, e in cm) von der Wandinnenseite.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Parameter k und d der Gleichung der linearen Funktion T für eine Wand mit $D = 40$, $T_i = 25$ und $T_a = 5$.

$k =$ _____

$d =$ _____

Leitfrage:

Erläutern Sie die Bedeutung der von Ihnen ermittelten Parameter k und d unter Angabe der korrekten Maßeinheiten im gegebenen Kontext!

Geben Sie sowohl für den Parameter k als auch für die Temperatur T_a jeweils einen möglichen Wert an, wenn $D = 40$ cm, $T_i < T_a$ und $d = 20$ gilt! Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 2

Temperaturabnahme

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$T(e) = k \cdot e + d$

$T(0) = 25 \Rightarrow d = 25$
$5 = k \cdot 40 + 25 \Rightarrow k = -0{,}5$

$T(e) = -0{,}5 \cdot e + 25$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Parameter k und d korrekt ermittelt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$d = 25 \Rightarrow$ Die Temperatur an der Wandinnenseite beträgt 25 °C.
$k = -0{,}5 \Rightarrow$ Die Temperatur nimmt pro cm (Wand) um 0,5 °C ab.

Mögliche Vorgehensweise:
$d = 20 = T_i \Rightarrow$ z. B. $T_a = 30$; Temperaturunterschied zwischen Wandinnenseite und Wandaußenseite beträgt 10 $\Rightarrow$ $k = 0{,}25$, somit ändert sich die Temperatur um 0,25 °C pro cm.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Bedeutung der Parameter k und d unter Angabe der Maßeinheiten korrekt erläutert wird und mögliche Werte für k und T_a angegeben werden. Die Vorgehensweise muss nachvollziehbar erläutert werden, wobei jedenfalls für T_a ein Wert größer 20 gewählt werden muss.

Aufgabe 3

Wachstum einer Pflanze

In einem Gewächshaus wird das Wachstum einer Pflanze unter kontrollierten Bedingungen über einen Zeitraum von 20 Wochen beobachtet. Zu Beginn der Beobachtung weist die Pflanze eine Höhe von 10 cm auf. Innerhalb der ersten 5 Wochen wird festgestellt, dass die Höhe der Pflanze pro Woche um 15 % zunimmt. Nach Ablauf der ersten 5 Wochen ändern sich die Bedingungen im Gewächshaus.

Aufgabenstellung:

Die Pflanzenhöhe innerhalb der ersten 5 Wochen kann durch die Funktion f modelliert werden. Dabei gibt $f(t)$ die Höhe der Pflanze in cm t Wochen nach Beobachtungsbeginn an.

Geben Sie eine Gleichung der Funktion f an und berechnen Sie die Höhe der Pflanze 5 Wochen nach Beobachtungsbeginn!

Leitfrage:

In der nachstehenden Tabelle ist die Höhe der Pflanze zu einigen weiteren Zeitpunkten angegeben.

Anzahl der vergangenen Wochen (seit Beobachtungsbeginn)	Höhe der Pflanze (in cm, gerundet auf mm)
7	22,7
11	25,2
20	29,8

Gerhard behauptet, dass gemäß den vorliegenden Daten das Wachstum der Pflanze nach Ablauf der ersten 5 Wochen nicht mehr exponentiell erfolgt.

Geben Sie an, ob diese Aussage richtig oder falsch ist, und begründen Sie mithilfe einer passenden Berechnung Ihre Entscheidung!

Lösung zur Aufgabe 3

Wachstum einer Pflanze

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$f(t) = 10 \cdot 1{,}15^t$

$f(5) = 10 \cdot 1{,}15^5 \approx 20{,}1$

Nach 5 Wochen beträgt die Höhe der Pflanze ca. 20,1 cm.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung für f angegeben und die Höhe der Pflanze nach 5 Wochen korrekt berechnet wird.
Toleranzintervall: [20,0 cm; 20,2 cm]
Äquivalente Gleichungen für f (z. B. in der Form $f(t) = 10 \cdot e^{0{,}13976... \cdot t}$) sind ebenfalls als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Gerhards Aussage ist richtig, da nach Ablauf der ersten 5 Wochen keine konstanten wöchentlichen Wachstumsraten (insbesondere keine 15%ige Wachstumsrate) vorliegen.

Mögliche Berechnung:

Der prozentuelle Zuwachs (relative Änderung) pro Woche beträgt ...

- im Zeitintervall [5; 7]: $\sqrt{\frac{22{,}7}{20{,}1}} = 1{,}0627...$ ⇒ wöchentliche Wachstumsrate: ca. 6,3 %
- im Zeitintervall [7; 11]: $\sqrt[4]{\frac{25{,}2}{22{,}7}} = 1{,}0264...$ ⇒ wöchentliche Wachstumsrate: ca. 2,6 %
- im Zeitintervall [11; 20]: $\sqrt[9]{\frac{29{,}8}{25{,}2}} = 1{,}0188...$ ⇒ wöchentliche Wachstumsrate: ca. 1,9 %

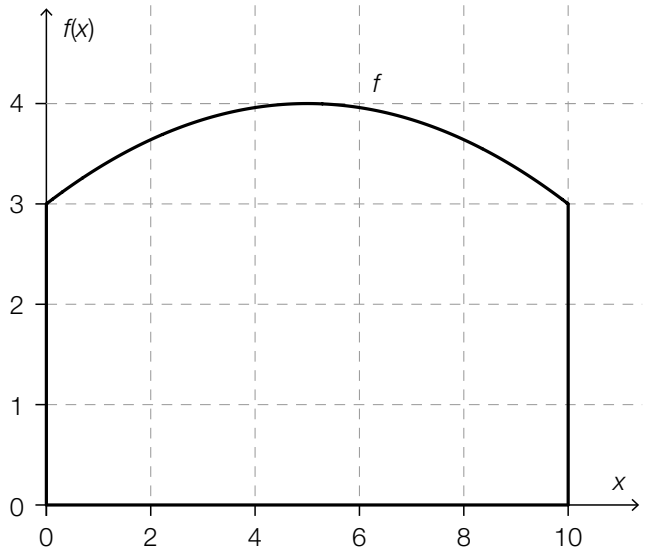
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Richtigkeit der Aussage angegeben und durch eine Berechnung korrekt begründet wird.
Andere korrekte Begründungen (die sich auf eine passende Berechnung stützen) sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 4

Wandfläche

Eine Wandfläche hat drei geradlinige Berandungen, die durch die x-Achse, die senkrechte Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 10$ modelliert werden können. Die vierte Grenze kann durch eine Polynomfunktion f zweiten Grades mit der Gleichung $f(x) = -0{,}04 \cdot x^2 + 0{,}4 \cdot x + 3$ modelliert werden. Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft den Verlauf der Grenzen dieser Wand (Maße in Metern).



Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Stammfunktion F von f an und bestimmen Sie den Inhalt der Wandfläche mithilfe dieser Stammfunktion!

Leitfrage:

Die Wandfläche soll in Teilbereichen mit unterschiedlichen Farben bemalt werden.

Variante 1:

Die Wandfläche soll durch zwei zur senkrechten Achse parallele Geraden in drei flächengleiche Teile geteilt werden.

Zeigen Sie, dass die erste Gerade die Gleichung $x = 3{,}46$ hat, und geben Sie die Gleichung der zweiten Geraden an!

Variante 2:

Die Wandfläche soll durch eine zur x-Achse parallele Gerade in der Höhe h in zwei flächengleiche Teile geteilt werden.

Berechnen Sie h!

Lösung zur Aufgabe 4

Wandfläche

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mögliche Stammfunktion: $F(x) = -\frac{0{,}04 \cdot x^3}{3} + 0{,}2 \cdot x^2 + 3 \cdot x$

$F(10) - F(0) = \frac{110}{3} \approx 36{,}67 \Rightarrow$ Der Inhalt der Wandfläche beträgt ca. 36,67 m^2.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine Stammfunktion F von f korrekt angegeben und der Inhalt der Wandfläche mithilfe dieser Stammfunktion korrekt bestimmt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Variante 1:
$\int_0^{3{,}46} f(x)\,dx = \frac{110}{9}$ und dies entspricht einem Drittel der oben berechneten Wandfläche.
Gleichung der zweiten Geraden: $x = 10 - 3{,}46$ bzw. $x = 6{,}54$

Variante 2:
$10 \cdot h = \frac{110}{6} \Rightarrow h = \frac{11}{6} \approx 1{,}83$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für Variante 1 ein korrekter Nachweis und eine richtige Gleichung der zweiten Geraden angegeben werden sowie für Variante 2 die Höhe h richtig berechnet wird.
Toleranzintervall für die zweite senkrechte Gerade: [6,5; 6,6]
Toleranzintervall für die Höhe h: [1,8; 1,9]

Aufgabe 5

Multiple-Choice-Test

Bei einem Multiple-Choice-Test mit zehn Aufgaben gibt es jeweils fünf Antwortmöglichkeiten, von denen immer genau eine Antwort richtig ist.

Patrick muss raten und kreuzt bei jeder Aufgabe willkürlich eine der Antwortmöglichkeiten an.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie jeden Summanden des Ausdrucks $1 - (0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 \cdot 45 + 0{,}8^9 \cdot 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}8^{10})$ im gegebenen Kontext und geben Sie dasjenige Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit diesem Ausdruck berechnet wird!

Leitfrage:

Zum Bestehen des Tests muss mehr als die Hälfte der Aufgaben richtig gelöst werden.

Yvonne löst vier Aufgaben richtig, bei den restlichen Aufgaben muss sie raten und kreuzt jeweils willkürlich eine Antwortmöglichkeit an.

Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass Yvonne den Test besteht, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 5

Multiple-Choice-Test

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Wahrscheinlichkeit, eine Aufgabe richtig zu lösen, beträgt 0,2.
Der Summand $0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 \cdot 45$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, genau zwei Fragen richtig zu beantworten, der mittlere Summand gibt die Wahrscheinlichkeit an, genau eine Frage richtig zu beantworten und der Summand $0{,}8^{10}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, keine Frage richtig zu beantworten.

Das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit diesem Ausdruck berechnet wird, lautet:
Patrick löst mindestens drei Aufgaben richtig.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn jeder Summand (sinngemäß) korrekt interpretiert und das Ereignis (sinngemäß) korrekt angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$1 - (0{,}8^5 \cdot 0{,}2 \cdot 6 + 0{,}8^6)$

Yvonne besteht den Test, wenn sie bei mindestens zwei der sechs restlichen Aufgaben die richtige Antwort ankreuzt.
Die Berechnung kann mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit erfolgen:
$1 - (P(\text{„eine richtige Antwort“}) + P(\text{„keine richtige Antwort“}))$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Term angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erklärt wird. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Oktober 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 2
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin/der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin/vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

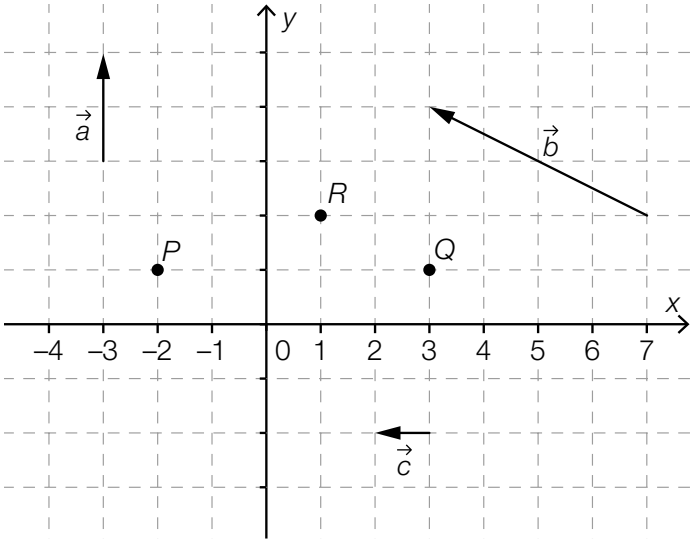
Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Punkte und Vektoren

Im nachstehenden Koordinatensystem sind drei Punkte mit jeweils ganzzahligen Koordinaten und drei Vektoren mit jeweils ganzzahligen Komponenten eingezeichnet.



Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche der nachstehenden Aussagen wahr ist/sind!

- Es gibt ein $t \in \mathbb{R}$, sodass gilt: $Q = P + t \cdot \vec{c}$.
- Es gibt ein $t \in \mathbb{R}$, sodass gilt: $P = R + t \cdot \vec{a}$.
- Es gibt ein $t \in \mathbb{R}$, sodass gilt: $R = Q + t \cdot \vec{b}$.

Begründen Sie Ihre Entscheidungen und berechnen Sie gegebenenfalls den entsprechenden Parameterwert!

Leitfrage:

Erläutern Sie allgemein, warum nicht jede Gerade als Graph einer linearen Funktion f mit $f: x \mapsto y$ aufgefasst werden kann!

Geben Sie sowohl eine Parameterdarstellung als auch eine parameterfreie Gleichung derjenigen Geraden g an, die durch den Punkt P verläuft, einen der drei eingezeichneten Vektoren als Richtungsvektor hat und nicht als Graph einer linearen Funktion g mit $g: x \mapsto y$ aufgefasst werden kann!

Lösung zur Aufgabe 1

Punkte und Vektoren

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Vorgehensweise:

$Q = P + t \cdot \vec{c}$ Der Parameter t kann so gewählt werden, dass der Ausdruck eine wahre Aussage liefert. Addiert man zu P den 5-fachen Gegenvektor von $\vec{c}$, so erhält man Q.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow t = -5$$

$P = R + t \cdot \vec{a}$ Es gibt kein t, sodass der Ausdruck eine wahre Aussage liefert.
Addiert man zu R Vielfache von $\vec{a}$, so kann man dadurch alle Punkte auf der Geraden $x = 1$ erzeugen. Diese enthält nicht den Punkt P.
Der Ansatz $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ führt zur unlösbaren Gleichung $-2 = 1 + 0 \cdot t$.

$R = Q + t \cdot \vec{b}$ Der Parameter t kann so gewählt werden, dass der Ausdruck eine wahre Aussage liefert. Addiert man zu Q den Vektor von $\frac{1}{2} \cdot \vec{b}$, so erhält man R.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn für jeden der drei Ausdrücke korrekt angegeben und begründet wird, ob ein passender Parameterwert existiert oder nicht existiert, und dieser gegebenenfalls richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Geraden, die parallel zur y-Achse verlaufen, können nicht als Graph einer linearen Funktion f mit $f: x \mapsto y$ aufgefasst werden, da Geraden dieser Art Zuordnungen beschreiben, bei denen einem x-Wert mehrere (unendlich viele) y-Werte zugeordnet werden. Funktionen beschreiben hingegen eindeutige Zuordnungen, bei denen jedem x-Wert aus dem Definitionsbereich genau ein y-Wert aus dem Wertebereich zugeordnet wird.

$g: X = P + t \cdot \vec{a}$ mit $t \in \mathbb{R}$
$g: X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$
$g: x = -2$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn (sinngemäß) korrekt erläutert wird, warum Geraden, die parallel zur y-Achse verlaufen, nicht als Graph einer linearen Funktion aufgefasst werden können, und beide Formen der Geraden g korrekt angegeben werden.
Äquivalente Darstellungen sind als richtig zu werten.

Aufgabe 2

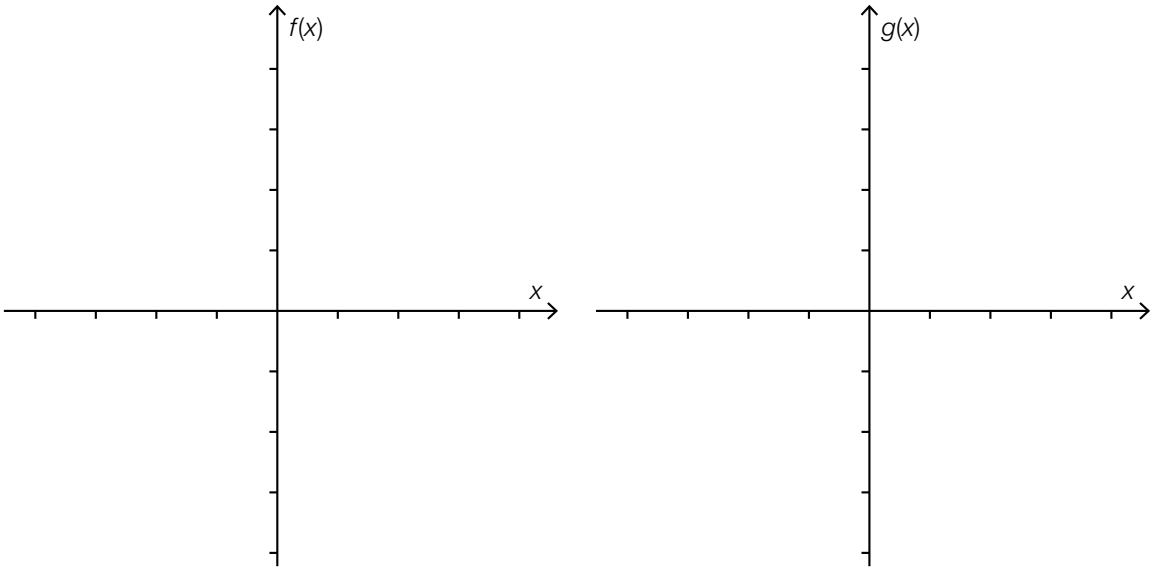
Polynomfunktionen

Für die Polynomfunktionen *f* und *g* gilt:

- *f* hat genau zwei Nullstellen, genau drei lokale Extremstellen und genau zwei Wendestellen.
- *g* hat genau eine Nullstelle, keine lokale Extremstelle und genau eine Wendestelle.

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in den nachstehenden Koordinatensystemen jeweils einen möglichen Graphen der Funktionen *f* und *g* so, dass die genannten Eigenschaften ersichtlich sind, und markieren Sie alle Wendepunkte!



Leitfrage:

Geben Sie jeweils den kleinstmöglichen Grad n_f bzw. n_g der Polynomfunktionen *f* und *g* an, sodass die oben genannten Eigenschaften erfüllt sind, und begründen Sie Ihre Aussage!

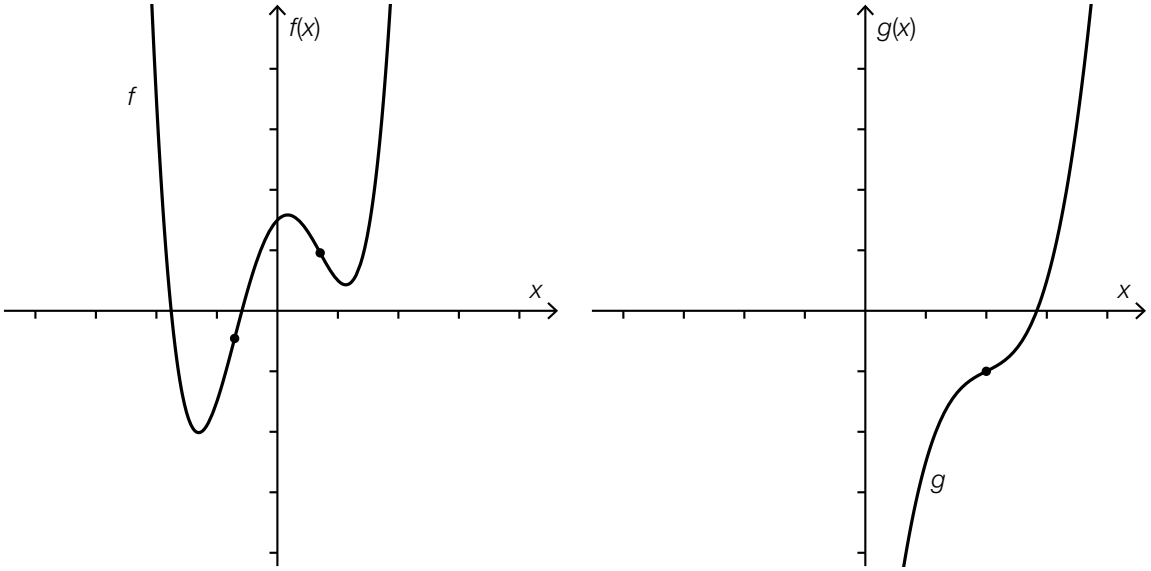
Geben Sie an, ob die Funktion *g* auch vom Grad $n_g + 1$ sein kann, und begründen Sie Ihre Aussage!

Lösung zur Aufgabe 2

Polynomfunktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Graphen für *f* und *g*:



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden skizzierten Graphen die angegebenen Eigenschaften aufweisen und die Wendepunkte korrekt markiert werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Eine Polynomfunktion vom Grad *n* kann höchstens *n* Nullstellen, höchstens *n* – 1 lokale Extremstellen und höchstens *n* – 2 Wendestellen haben.

Da *f* zwei Wendestellen hat, muss *f* mindestens den Grad vier haben.
Da *g* eine Wendestelle hat, muss *g* mindestens den Grad drei haben.

Der Grad vier kommt für *g* nicht in Frage, da eine Polynomfunktion vom Grad vier mindestens eine lokale Extremstelle hat.

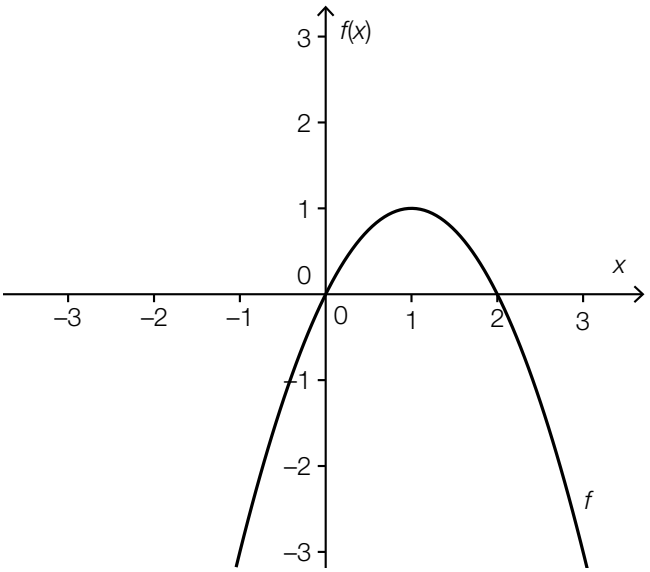
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der minimale Grad beider Funktionen korrekt angegeben und begründet wird sowie eine (sinngemäß) korrekte Begründung angegeben wird, warum der Grad vier für *g* nicht in Frage kommt.

Aufgabe 3

Bestimmtes Integral

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f mit $f(x) = -x^2 + 2 \cdot x$.



Aufgabenstellung:

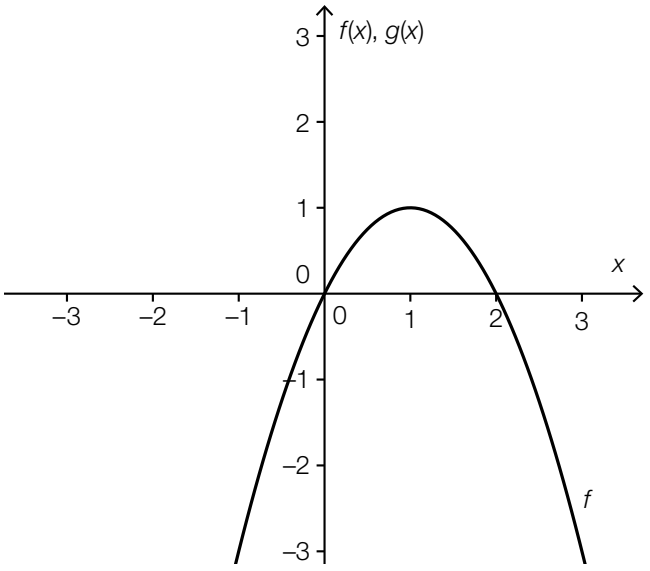
Geben Sie einen Term zur Berechnung des Inhalts derjenigen Fläche an, die vom Graphen der Funktion f und der x-Achse begrenzt wird, und berechnen Sie diesen!

Leitfrage:

Ergänzen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot x - 1$!

Für $a = \sqrt{3}$ gilt: $\int_0^a [f(x) - g(x)]\,dx = 0$.

Erläutern Sie den durch diese Gleichung beschriebenen Sachverhalt mithilfe der nachstehenden Abbildung!



Erläutern Sie, wie sich eine Vergrößerung von a auf den Wert des angegebenen bestimmten Integrals auswirkt!

Lösung zur Aufgabe 3

Bestimmtes Integral

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

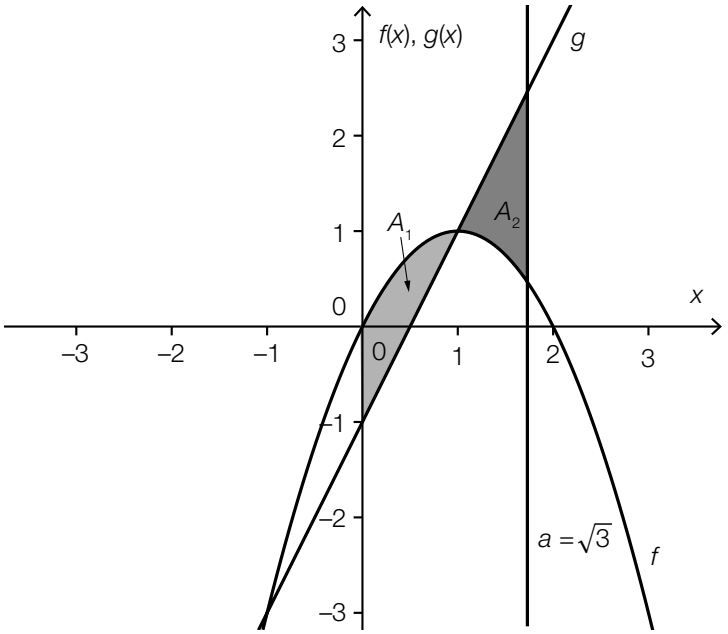
$\int_0^2 (-x^2 + 2 \cdot x)\,dx = (-\frac{x^3}{3} + x^2)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$

Der Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f und der x-Achse begrenzt wird, beträgt $\frac{4}{3}$ Flächeneinheiten.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Term angegeben und der gesuchte Flächeninhalt richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:



Die beiden Funktionsgraphen begrenzen im Intervall $[0; \sqrt{3}]$ zwei gleich große Flächen A_1 und A_2, die sich „gegenseitig aufheben“, weil der Graph von g einmal unterhalb, dann oberhalb des Graphen von f verläuft.

Eine weitere Vergrößerung von a bewirkt eine Vergrößerung von A_2, sodass das bestimmte Integral kleiner und damit negativ wird.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Graph von g korrekt eingezeichnet und der Sachverhalt erläutert sowie die Auswirkung einer Vergrößerung von a (sinngemäß) korrekt erläutert wird.

Aufgabe 4

Außentemperatur

Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ wird die Außentemperatur T gemessen.
Dabei gibt $T(t)$ die Außentemperatur in °C nach t Stunden an.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche beiden der nachstehenden Interpretationen sich aus der Gleichung $\frac{T(5) - T(0)}{5} = -2$ korrekt schlussfolgern lassen, und begründen Sie Ihre Antwort!

1	Zum Zeitpunkt $t = 5$ ist es um 10 °C kälter als zum Zeitpunkt $t = 0$.
2	Die momentane Änderungsrate der Temperatur beträgt zu jedem Zeitpunkt –2 °C pro Stunde.
3	Die Temperatur nimmt im Zeitintervall [0; 5] um durchschnittlich 2 °C pro Stunde ab.
4	Die Temperatur nimmt im Zeitintervall [0; 5] pro Stunde um exakt 2 °C ab.
5	Die Durchschnittstemperatur in den ersten fünf Stunden beträgt –2 °C.

Leitfrage:

Geben Sie an, welcher Funktionstyp für die Modellierung des Temperaturverlaufs gewählt werden müsste, damit alle fünf oben angeführten Aussagen auf jeden Fall richtig sind!
Begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösung zur Aufgabe 4

Außentemperatur

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Nur die Interpretationen 1 und 3 lassen sich aus der gegebenen Gleichung korrekt schlussfolgern.

Die gegebene Gleichung bedeutet, dass die mittlere Änderungsrate der Temperatur im Intervall [0; 5] –2 °C pro Stunde beträgt. Somit nimmt die Temperatur im Mittel um 2 °C pro Stunde ab und fällt insgesamt um $5 \cdot 2 = 10$ °C.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn erkannt wird, dass sich ausschließlich die Interpretationen 1 und 3 eindeutig schlussfolgern lassen, und dies korrekt begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Damit alle fünf Aussagen auf jeden Fall richtig sind, ist eine lineare Funktion (mit $k = -2$ und $d = 3$) zu wählen.

Da bei einer linearen Funktion die momentane Änderungsrate konstant ist (und somit der mittleren Änderungsrate in einem beliebigen Intervall entspricht), sind im Falle einer linearen Abnahme Aussage 2 und Aussage 4 richtig.
Wenn die Temperatur im Zeitintervall [0; 5] linear von +3 °C auf –7 °C abnimmt, ist auch Aussage 5 richtig.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Funktionstyp angegeben und diese Entscheidung korrekt begründet wird.

Aufgabe 5

Qualitätskontrolle

Ein Produkt wird einer Qualitätskontrolle unterzogen, die aus zwei Prüfverfahren besteht. Das Produkt wird zuerst einem Prüfverfahren unterzogen, bei dem ein Mangel erfahrungsgemäß in n_1 von 100 Fällen ($n_1 \in \mathbb{N}$) erkannt wird. Produkte, die das erste Prüfverfahren bestanden haben, werden einem zweiten Prüfverfahren unterzogen, bei dem ein Mangel erfahrungsgemäß in n_2 von 100 Fällen ($n_2 \in \mathbb{N}$) erkannt wird. Die beiden Prüfverfahren sind voneinander unabhängig.

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit an, dass ein mangelhaftes Produkt bei dieser Qualitätskontrolle als solches erkannt wird, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Beim ersten Prüfverfahren werden erfahrungsgemäß 95 % der mangelhaften Produkte erkannt. Berechnen Sie, wie groß n_2 sein muss, damit ein mangelhaftes Produkt bei der Qualitätskontrolle mit 99,9%iger Wahrscheinlichkeit als solches erkannt wird!

Lösung zur Aufgabe 5

Qualitätskontrolle

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Möglicher Term:

$$\frac{n_1}{100} + \left(1 - \frac{n_1}{100}\right) \cdot \frac{n_2}{100}$$

Der Mangel wird beim ersten Prüfverfahren mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{n_1}{100}$ erkannt.
Der zweite Summand gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Mangel nicht beim ersten Prüfverfahren, sondern beim zweiten Prüfverfahren erkannt wird.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Term zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit angegeben und eine (sinngemäß) korrekte Vorgehensweise erklärt wird. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten (beispielsweise die Berechnung mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit: $1 - \left(1 - \frac{100 - n_1}{100} \cdot \frac{100 - n_2}{100}\right)$ und eine entsprechende Erklärung der Vorgehensweise).

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$0{,}95 + 0{,}05 \cdot \frac{n_2}{100} = 0{,}999$$

$$\Rightarrow \quad n_2 = 98$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert von n_2 richtig berechnet wird.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Oktober 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 3
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin/der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin/vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Zahlen und Gleichungen

Gegeben sind die vier Zahlen –17, $\sqrt{16}$, $\sqrt{30}$ und $\frac{\sqrt{18}}{3}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie für jede dieser vier Zahlen an, ob es sich um eine rationale Zahl handelt oder nicht, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Leitfrage:

Im Folgenden sei eine Funktion f vom Typ $f(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b, z \in \mathbb{Z}$ gegeben.

Geben Sie eine (möglichst einfache) nichtlineare Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten in der Form $f(x) = 0$ an, bei der eine Lösung $\sqrt{30}$ ist!

Geben Sie an, wie viele reelle Lösungen diese Gleichung insgesamt hat, beschreiben Sie die Form des Graphen von f und deuten Sie die Lösungen von $f(x) = 0$ geometrisch!

Lösung zur Aufgabe 1

Zahlen und Gleichungen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Zahlen -17 und $\sqrt{16}$ sind rational, die Zahlen $\sqrt{30}$ und $\frac{\sqrt{18}}{3}$ sind nicht rational.

Mögliche Begründungen:

-17 ist rational, weil diese Zahl eine ganze Zahl ist und somit auch in der Menge der rationalen Zahlen enthalten ist.

$\sqrt{16}$ ist rational, weil $\sqrt{16} = 4$ gilt. Diese Zahl ist eine natürliche Zahl, somit ist sie auch in der Menge der rationalen Zahlen enthalten.

Die Quadratwurzel von natürlichen Zahlen, die keine Quadratzahlen sind (wie z. B. 18 und 30), ergibt irrationale Zahlen, daher sind die beiden Zahlen $\sqrt{30}$ und $\frac{\sqrt{18}}{3}$ keine rationalen Zahlen.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der vier Zahlen richtig erkannt wird, dass es sich um eine rationale Zahl handelt bzw. nicht handelt, und dies jeweils auch korrekt begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Gleichung: $f(x) = x^2 - 30 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 30 = 0$

Diese Gleichung hat zwei reelle Lösungen.

Mögliche Beschreibung der Form des Graphen dieser Funktion:

Der Graph von f ist eine zur senkrechten Achse symmetrische, nach oben offene Parabel.

Mithilfe der Gleichung $f(x) = 0$ werden die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit der x-Achse berechnet. Somit geben die Lösungen der Gleichung die Nullstellen von f an.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung angegeben wird, die Anzahl der Lösungen sowie die Form des Graphen richtig angegeben werden und eine korrekte Deutung formuliert wird.

Aufgabe 2

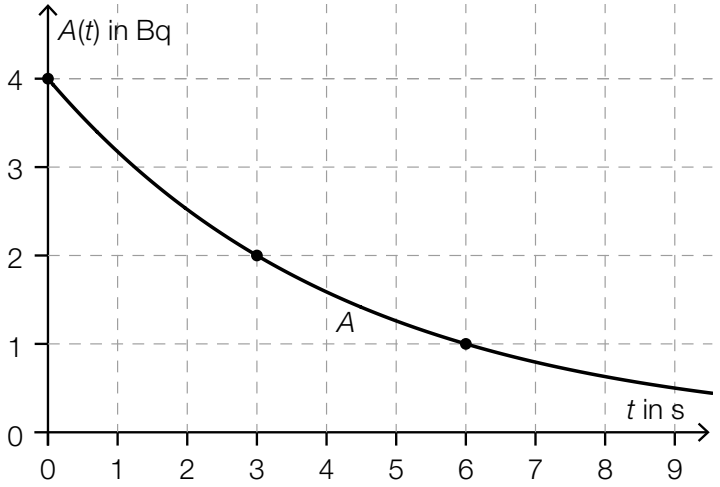
Aktivität eines radioaktiven Stoffes

Unter der Aktivität eines radioaktiven Stoffes versteht man die Anzahl der Kernzerfälle pro Sekunde. Sie wird in Becquerel (Bq) angegeben.

Aufgabenstellung:

Die Aktivität A kann in der Form $A(t) = A_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{c}}$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ angegeben werden. A_0 gibt den Wert zum Zeitpunkt $t = 0$ an.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion A für das radioaktive Isotop Scandium-53 dargestellt. Die Koordinaten der eingezeichneten Punkte sind ganzzahlig.



Ermitteln Sie den Wert des Parameters c für das radioaktive Isotop Scandium-53 und deuten Sie diesen Wert im Hinblick auf die Abnahme der Aktivität von Scandium-53!

Leitfrage:

Die Aktivität A kann auch in der Form $A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ angegeben werden.

Ermitteln Sie den Wert der Zerfallskonstanten λ für das radioaktive Isotop Scandium-53 und geben Sie eine Gleichung an, die den Zusammenhang zwischen c und λ beschreibt!

Lösung zur Aufgabe 2

Aktivität eines radioaktiven Stoffes

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$A(3) = \frac{A_0}{2} \quad \Rightarrow \quad 0{,}5 = 0{,}5^{\frac{3}{c}} \quad \Rightarrow \quad c = 3$

Der Parameter c gibt diejenige Zeit (in Sekunden) an, nach der die Aktivität des radioaktiven Isotops Scandium-53 auf die Hälfte gesunken ist.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert des Parameters c korrekt ermittelt und eine (sinngemäß) korrekte Deutung angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$2 = 4 \cdot e^{-3 \cdot \lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln(2)}{3} \approx 0{,}23105$

mögliche Gleichung: $\frac{\ln(2)}{\lambda} = c$

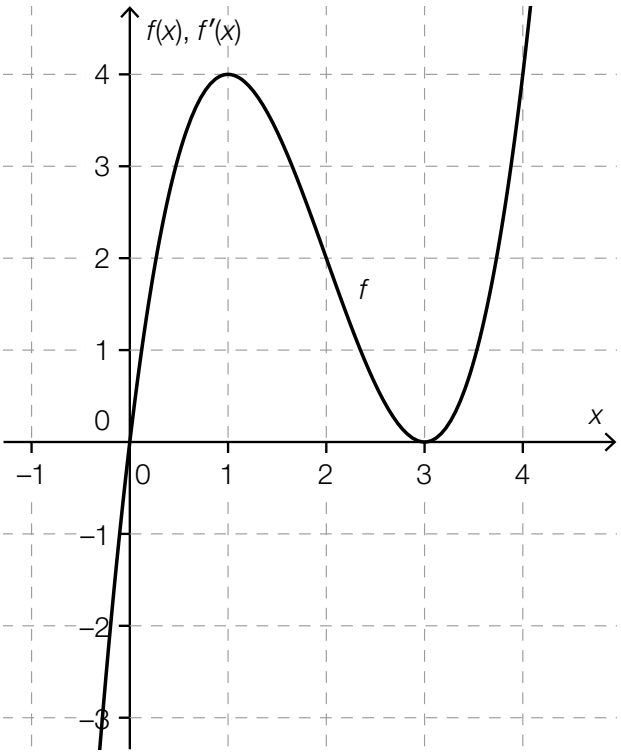
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert von λ korrekt ermittelt und ein korrekter Zusammenhang zwischen c und λ angegeben wird.

Aufgabe 3

Ableitungsfunktion

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades dargestellt.



Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' im gegebenen Koordinatensystem und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Die abgebildete Polynomfunktion f ist die Ableitungsfunktion einer Polynomfunktion F.

Nachstehend sind fünf Aussagen über die Polynomfunktion F angeführt.

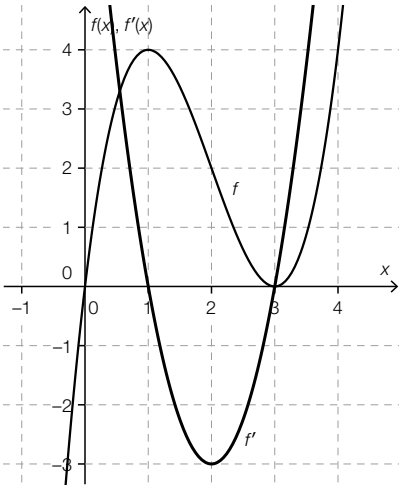
- Aussage 1: Die Funktion F ist eine Polynomfunktion vom Grad 3.
- Aussage 2: Die Funktion F ist für positive x-Werte (streng) monoton steigend.
- Aussage 3: Die Funktion F hat an der Stelle $x = 0$ eine Minimumstelle.
- Aussage 4: Die Funktion F hat an der Stelle $x = 3$ eine Wendestelle.
- Aussage 5: Die Funktion F ist für alle $x > 3$ rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt).

Geben Sie für jede der angeführten Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Lösung zur Aufgabe 3

Ableitungsfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Die Extremstellen von f sind die Nullstellen von f'. In Intervallen, in denen f streng monoton steigend ist, ist f' positiv bzw. in Intervallen, in denen f streng monoton fallend ist, ist f' negativ.
Die Wendestelle von f ist die Extremstelle von f'.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Graph der Ableitungsfunktion f' korrekt skizziert und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Dabei muss der Graph von f' klar als nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x_1 \approx 1$ und $x_2 \approx 3$ erkennbar sein.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Aussage 1 ist falsch, da f eine Polynomfunktion dritten Grades ist und somit F vom Grad 4 sein muss.
Aussage 2 ist wahr, da f für positive x-Werte positive Funktionswerte hat ($F'(x) = f(x) \geq 0$ für alle $x > 0$).
Aussage 3 ist wahr, da die erste Ableitung von F an der Stelle $x = 0$ gleich null ist und die zweite Ableitung von F an der Stelle $x = 0$ positiv ist ($F'(0) = f(0) = 0$ und $F''(0) = f'(0) > 0$).
Aussage 4 ist wahr, da die zweite Ableitung von F an der Stelle $x = 3$ gleich null ist und $F'''(3) \neq 0$ gilt ($F''(3) = f'(3) = 0$).
Aussage 5 ist falsch, da $F''(x) = f'(x)$ im angeführten Bereich positiv ist und somit F linksgekrümmt (positiv gekrümmt) ist.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der fünf Aussagen die Entscheidung über ihre Richtigkeit korrekt getroffen und (sinngemäß) korrekt begründet wird.

Aufgabe 4

Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Von einem Produkt *A* werden *x* Stück und von einem Produkt *B* werden *y* Stück gekauft.

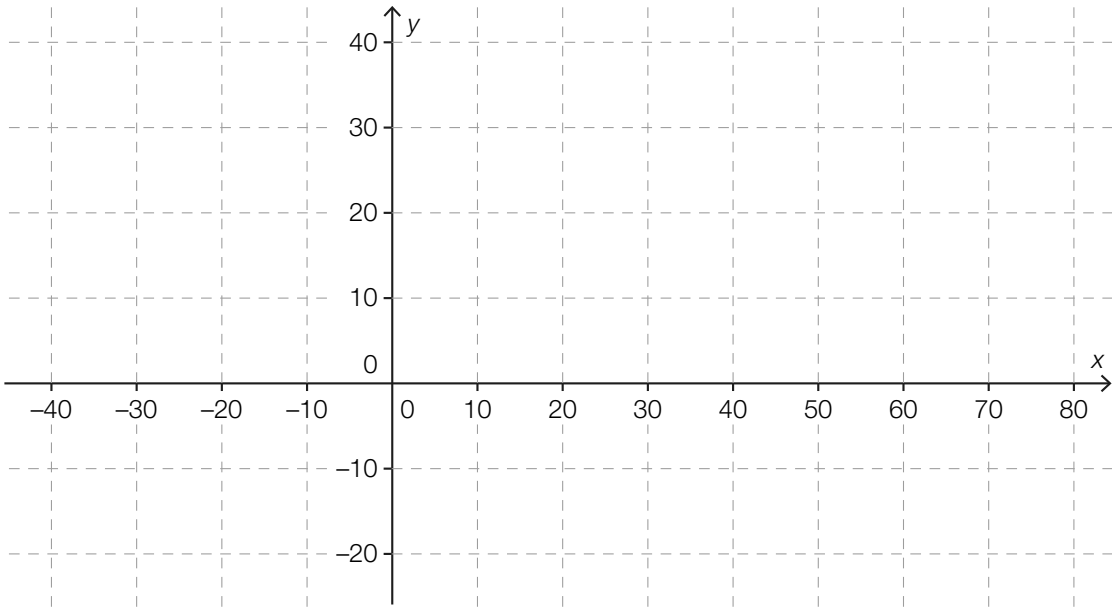
Aufgabenstellung:

Gegeben sind zwei Ungleichungen: $x \leq 2 \cdot y$ und $y \leq 18$.
Deuten Sie beide Ungleichungen im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Ein Produkt *A* kostet € 2 pro Stück, ein Produkt *B* kostet € 3 pro Stück.

Ein Kunde hat von Produkt *A* *x* Stück und von Produkt *B* *y* Stück gekauft und dabei genau € 60 gezahlt.
Geben Sie eine Gleichung in den Variablen *x* und *y* an, die diesen Zusammenhang beschreibt!
Stellen Sie diese Gleichung im gegebenen Koordinatensystem dar!



Geben Sie weiters ein konkretes ganzzahliges Zahlenbeispiel an, das zusätzlich auch die beiden Ungleichungen $x \leq 2 \cdot y$ und $y \leq 18$ erfüllt!

Lösung zur Aufgabe 4

Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Deutungen:
Es werden höchstens doppelt so viele Stück von Produkt *A* wie von Produkt *B* gekauft.
Es werden höchstens 18 Stück von Produkt *B* gekauft.

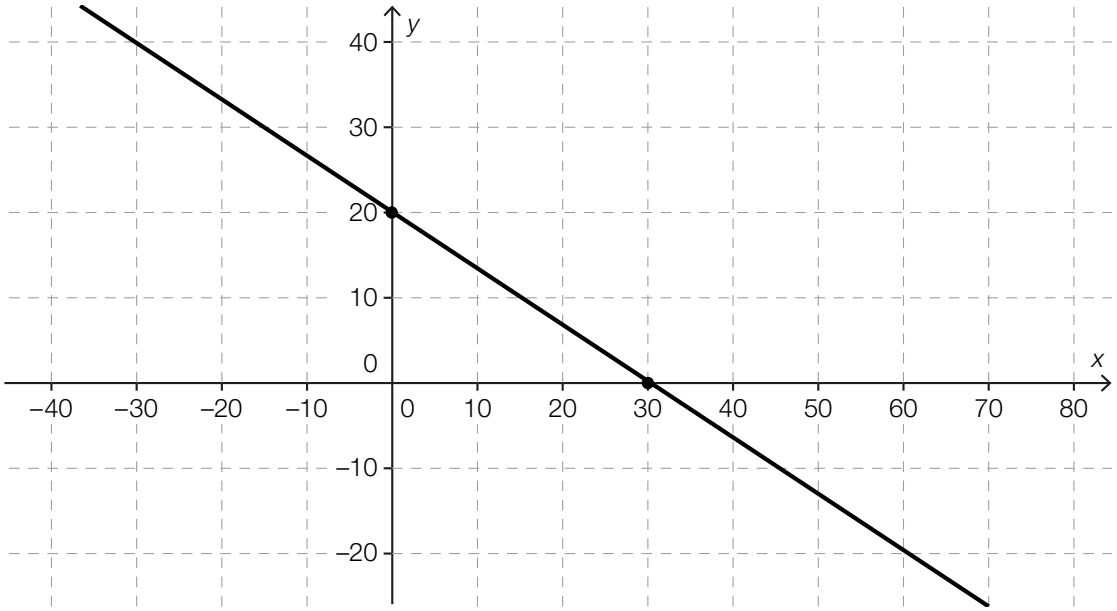
Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Ungleichungen (sinngemäß) korrekt gedeutet werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$2 \cdot x + 3 \cdot y = 60$

$y = -\frac{2}{3} \cdot x + 20$



mögliches Zahlenpaar für (x; y): (3; 18)

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung angegeben und dargestellt sowie ein richtiges Zahlenbeispiel angegeben wird.
mögliche Zahlenpaare: (3; 18), (6; 16), (9; 14), (12; 12), (15; 10)

Aufgabe 5

Kugelschreiber

In einer Schachtel befinden sich acht verschiedene Kugelschreiber.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie den Wert des Binomialkoeffizienten $\binom{8}{3}$ und deuten Sie diesen Wert im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Eine Maschine produziert Kugelschreiber. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig der Produktion entnommener Kugelschreiber defekt ist, liegt bei 1 %.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass in einer Stichprobe von 100 Kugelschreibern mindestens zwei defekte Kugelschreiber vorhanden sind!

Bei einer Qualitätskontrolle werden fünf Stichproben mit jeweils 100 neu produzierten Kugelschreibern gezogen. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass in mindestens einer dieser fünf Stichproben mindestens zwei defekte Kugelschreiber vorhanden sind!

Lösung zur Aufgabe 5

Kugelschreiber

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\binom{8}{3} = 56$

Mögliche Deutung:
Es gibt 56 Möglichkeiten, von diesen 8 Kugelschreibern 3 Stück (unabhängig von der Reihenfolge) auszuwählen (ohne Zurücklegen).

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert des Binomialkoeffizienten richtig bestimmt und korrekt gedeutet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Anzahl X der defekten Kugelschreiber in einer Stichprobe von 100 Kugelschreibern ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0{,}01$.

$P(X \geq 2) \approx 0{,}2642 = 26{,}42\ \%$

Die Anzahl Y der Stichproben mit mindestens zwei defekten Kugelschreibern ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 5$ und $p = 0{,}2642$.

$P(Y \geq 1) \approx 0{,}7843 = 78{,}43\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Wahrscheinlichkeiten richtig angegeben werden.
Toleranzintervalle für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten:
[0,26; 0,27] bzw. [26 %; 27 %] und [0,77; 0,80] bzw. [77 %; 80 %]

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Zahlenmengen

Gegeben sind vier Zahlen und fünf Zahlenmengen.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie in der nachstehenden Tabelle für jede Zahl all jene Mengen an, in denen diese Zahl liegt! Begründen Sie für die Zahl π Ihre Entscheidung!

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
-5					
2					
π					
$\sqrt{-9}$					

Leitfrage:

Jede ungerade natürliche Zahl n lässt sich durch den Ausdruck $n = 2 \cdot k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$ beschreiben.
Es gilt: „Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl ist wieder eine ungerade Zahl."

Begründen Sie die Gültigkeit dieser Aussage!

Lösung zur Aufgabe 1

Zahlenmengen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
-5		x	x	x	x
2	x	x	x	x	x
π				x	x
$\sqrt{-9}$					x

Die Zahl π ist irrational.
Irrationale Zahlen sind reelle Zahlen, die nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen dargestellt werden können.
Daher sind diese Zahlen nicht in der Menge der natürlichen, ganzen oder rationalen Zahlen enthalten.

Weiters gilt: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Die Zahl π ist somit Element von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die jeweils laut Lösungserwartung richtigen Mengen angekreuzt sind und die Entscheidung für die Zahl π (sinngemäß) korrekt begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Begründung:

$n^2 = (2 \cdot k + 1)^2 = 4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1$

Der Term $4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1$ gibt eine ungerade Zahl an, da sowohl $4 \cdot k^2$ als auch $4 \cdot k$ gerade Zahlen beschreiben, somit deren Summe gerade ist und die Addition von 1 damit eine ungerade Zahl ergibt.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Begründung angegeben wird, wobei aus der angeführten Begründung hervorgehen muss, dass die Aussage für alle ungeraden natürlichen Zahlen gültig ist.

Aufgabe 2

Chemisches Experiment

Bei einem chemischen Experiment wird ein Stoff erwärmt. Der Temperaturverlauf kann mithilfe einer linearen Funktion T_1 modelliert werden. Dabei ist $T_1(t)$ diejenige Temperatur in °C, die t Sekunden nach Beginn des Experiments gemessen wird.

Nachstehend sind drei Messwerte gegeben.

t	1	3	10
$T_1(t)$	2	6	20

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung der linearen Funktion T_1 an!

Leitfrage:

Ist die Höchsttemperatur von 100 °C erreicht, so beginnt die Abkühlungsphase. Die Temperaturabnahme kann mithilfe einer linearen Funktion T_2 modelliert werden. Dabei ist $T_2(t)$ diejenige Temperatur in °C, die t Sekunden nach Beginn der Abkühlungsphase gemessen wird.

Geben Sie eine Gleichung der linearen Funktion T_2 an, wenn die Abkühlung doppelt so schnell wie die Erwärmung erfolgt!

Lösung zur Aufgabe 2

Chemisches Experiment

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$T_1(t) = 2 \cdot t$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung der Funktion T_1 angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$T_2(t) = 100 - 4 \cdot t$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung der Funktion T_2 angegeben wird. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

Aufgabe 3

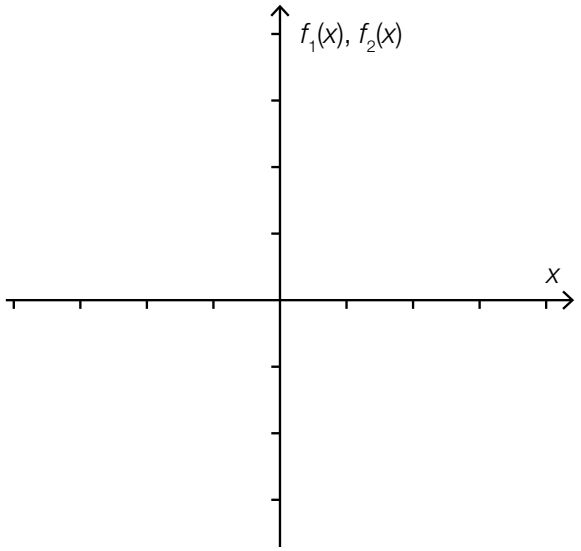
Funktionsgraphen

Für die Funktionen f_1 und f_2 mit den Gleichungen $f_1(x) = a \cdot c^x$ und $f_2(x) = b \cdot d^x$ gilt:

Die Parameter a, b, c, d sind positive reelle Zahlen mit: $a < b$ und $c > 1$ und $0 < d < 1$.

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem jeweils einen möglichen Graphen von f_1 und f_2 und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!



Leitfrage:

Die Funktion f_1 beschreibt die Entwicklung einer Größe in Abhängigkeit von der Zeit.

Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Verdoppelungszeit x_τ der Funktion f_1 her!

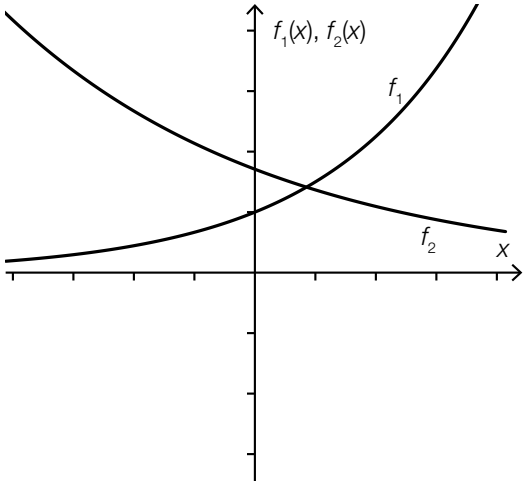
Geben Sie zu jeder der nachstehenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist!

a) Eine Halbierung des Parameters a bewirkt immer eine Halbierung der Verdoppelungszeit.
b) Eine Verdoppelung des Parameters c bewirkt immer eine Halbierung der Verdoppelungszeit.

Lösung zur Aufgabe 3

Funktionsgraphen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Die Funktion f_1 ist eine (streng) monoton steigende Exponentialfunktion, da $c > 1$ ist.
Die Funktion f_2 ist eine (streng) monoton fallende Exponentialfunktion, da $0 < d < 1$ gilt.

Die Parameter a und b bestimmen die jeweiligen Schnittpunkte der beiden Graphen mit der senkrechten Achse.
Da $a < b$ gilt, schneidet der Graph von f_1 die senkrechte Achse näher beim Koordinatenursprung als der Graph von f_2.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn für beide Funktionen mögliche Graphen korrekt skizziert werden und eine korrekte Vorgehensweise erklärt wird.
Die Graphen müssen die in der Lösungserwartung genannten Eigenschaften aufweisen und dürfen weder Nullstellen noch lokale Extrema haben.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$2 \cdot a = a \cdot c^{x_\tau}$

$2 = c^{x_\tau}$

$x_\tau = \frac{\ln(2)}{\ln(c)} = \log_c(2)$

Beide Aussagen sind falsch.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Formel für die Verdoppelungszeit hergeleitet wird und beide Aussagen als falsch erkannt werden.

Aufgabe 4

Integral

Gegeben ist die lineare Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 1$.

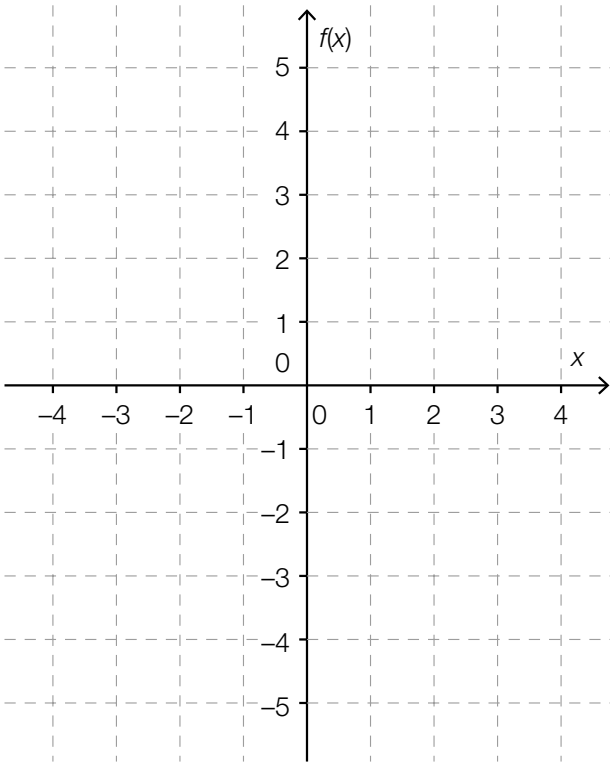
Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion F der Funktion f an, für die $F(2) = 2$ gilt!

Leitfrage:

Ermitteln Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$!

Stellen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Funktion f dar und erklären Sie anhand des Graphen, warum in diesem Fall $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx$ gilt!



Lösung zur Aufgabe 4

Integral

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Für alle Stammfunktionen gilt: $F(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + x + c$

$F(2) = 2 \Rightarrow c = 1$

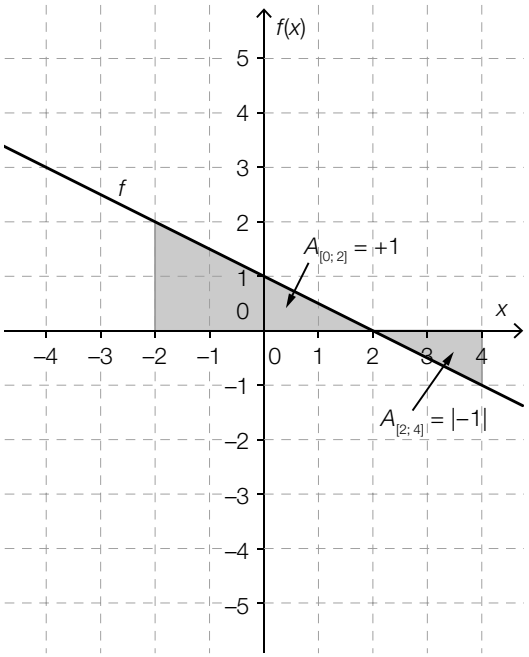
$F(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + x + 1$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung von F angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = 3$



Mögliche Erklärung:

Die Flächenstücke, die vom Graphen von f mit der x-Achse eingeschlossen werden, sind im Intervall [0; 2] und [2; 4] gleich groß.

Es gilt: $\left.\begin{array}{l}\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 1 \\ \int_{2}^{4} f(x)\,dx = -1\end{array}\right\} \Rightarrow \int_{0}^{4} f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_{-2}^{4} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx$

Lösungsschlüssel:

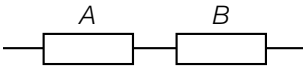
Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert des Integrals korrekt ermittelt, der Graph von f richtig dargestellt und eine korrekte Erklärung, warum $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx$ gilt, angegeben wird.

Aufgabe 5

Schaltungen

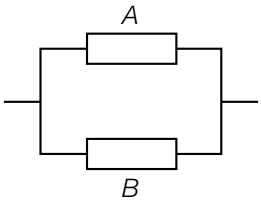
In dieser Aufgabe angegebene Schaltungen bestehen aus Bauteilen vom Typ *A* und/oder Typ *B*. Ein Bauteil vom Typ *A* hat eine Ausfallwahrscheinlichkeit *a* und ein Bauteil vom Typ *B* hat eine Ausfallwahrscheinlichkeit *b*, wobei man davon ausgehen kann, dass alle Bauteile unabhängig voneinander funktionieren.

Eine Serienschaltung zweier Bauteile (wie nachstehend abgebildet) funktioniert, wenn beide Bauteile funktionieren.



(Abb. 1)

Eine Parallelschaltung zweier Bauteile (wie nachstehend abgebildet) funktioniert, wenn mindestens einer der beiden Bauteile funktioniert.



(Abb. 2)

Aufgabenstellung:

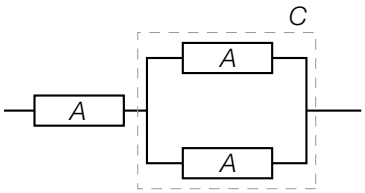
Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass eine Serienschaltung der Bauteile vom Typ A und vom Typ B (siehe Abb. 1) funktioniert!

Geben Sie weiters einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass eine Parallelschaltung der Bauteile vom Typ A und vom Typ B (siehe Abb. 2) funktioniert!

Leitfrage:

Durch eine Parallelschaltung zweier Bauteile vom Typ *A* entsteht ein Bauteil vom Typ *C*.

Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass eine Serienschaltung der Bauteile vom Typ *A* und vom Typ *C* (siehe Abb. 3) funktioniert, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!



(Abb. 3)

Für den Bauteil vom Typ *C* gibt Lena folgenden Term an: $a \cdot (1 - a) + (1 - a) \cdot a + a^2$
Geben Sie an, welche Wahrscheinlichkeit durch diesen Term beschrieben wird!

Lösung zur Aufgabe 5

Schaltungen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Wahrscheinlichkeit, dass die beschriebene Serienschaltung funktioniert:
$(1 - a) \cdot (1 - b)$

Wahrscheinlichkeit, dass die beschriebene Parallelschaltung funktioniert:
$1 - a \cdot b = (1 - a) \cdot b + a \cdot (1 - b) + (1 - a) \cdot (1 - b)$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn für beide Schaltungen jeweils ein korrekter Term angegeben wird. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Ein Bauteil vom Typ *A* funktioniert mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - a$.

Ein Bauteil vom Typ *C* funktioniert, wenn mindestens einer seiner beiden Bauteile vom Typ *A* funktioniert. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil vom Typ *C* funktioniert, beträgt daher $1 - a^2$.

Die Serienschaltung der Bauteile vom Typ *A* und vom Typ *C* funktioniert daher mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1 - a) \cdot (1 - a^2)$.

Durch Lenas Term wird die Wahrscheinlichkeit beschrieben, dass mindestens einer der beiden Bauteile vom Typ *A* ausfällt.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl ein korrekter Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit angegeben und die entsprechende Vorgehensweise (sinngemäß) korrekt erläutert wird als auch korrekt angegeben wird, welche Wahrscheinlichkeit durch Lenas Term beschrieben wird.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 2
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Gewinnschwelle

Gegeben sind die Gleichungen einer Kostenfunktion K und einer Erlösfunktion E mit $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

$K(x) = a \cdot x + b$
$E(x) = c \cdot x$

In der Kostenfunktion beschreibt x die Anzahl der produzierten Einheiten, in der Erlösfunktion beschreibt x die Anzahl der verkauften Einheiten.

Aufgabenstellung:

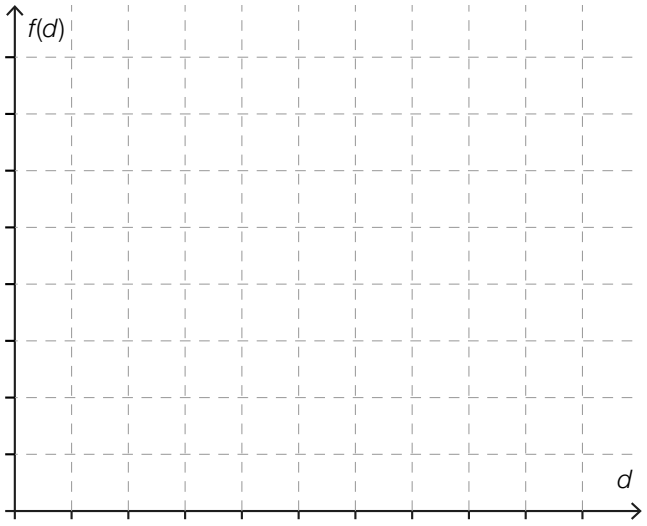
Die Stelle x_1 bezeichnet die Gewinnschwelle. Das ist diejenige Mengeneinheit, die produziert (und verkauft) werden muss, damit $K(x_1) = E(x_1)$ gilt. Geben Sie einen Term zur Berechnung von x_1 in Abhängigkeit von a, b und c an!

$x_1 =$ _____

Leitfrage:

Deuten Sie die Parameter a, b und c im gegebenen Kontext!

Fassen Sie weiters x_1 als Funktion f in Abhängigkeit von der Differenz d mit $d = c - a$ auf.
Geben Sie den Funktionstyp von f an und skizzieren Sie einen möglichen Graphen in das nachstehende Koordinatensystem!



Lösung zur Aufgabe 1

Gewinnschwelle

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$K(x_1) = E(x_1)$

$a \cdot x_1 + b = c \cdot x_1$

$x_1 = \frac{b}{c - a}$

Lösungsschlüssel:

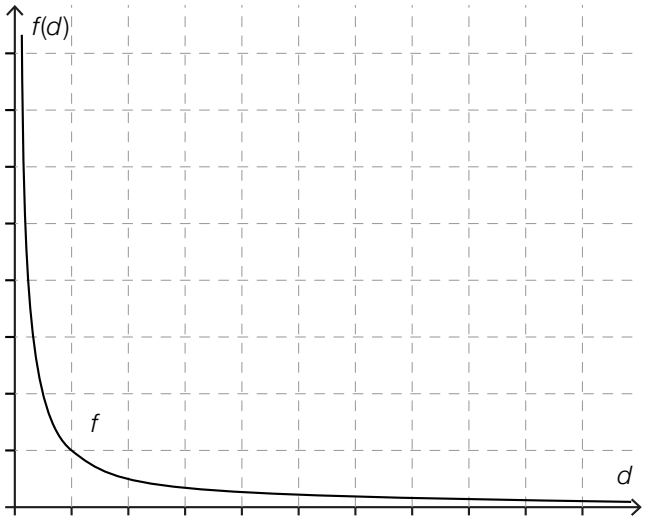
Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Term angegeben wird. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Der Parameter *a* beschreibt die zusätzlichen (variablen) Kosten, die pro Stück anfallen.

Der Parameter *b* beschreibt die Fixkosten.

Der Parameter *c* beschreibt den Verkaufspreis pro Stück.



Die Funktion *f* ist eine Potenzfunktion $\left(\text{vom Typ } f(x) = \frac{a}{x}, \text{ beschreibt eine indirekte Proportionalität}\right)$.

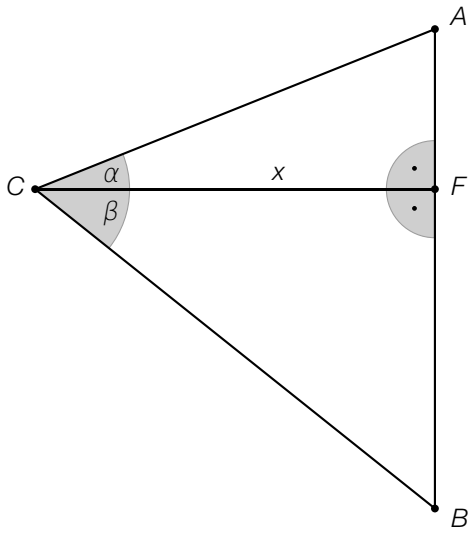
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle drei Parameter (sinngemäß) korrekt gedeutet werden sowie die Funktion *f* als Potenzfunktion (gebrochen rationale Funktion) erkannt und als solche skizziert wird.

Aufgabe 2

Dreiecke

Die nachstehende Grafik zeigt zwei aneinanderliegende rechtwinkelige Dreiecke.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie für $x = 8$ m und $\overline{AC} = 10$ m die Größe des Winkels α!

Beschreiben Sie weiters, wie man die Größe des Winkels α berechnen kann, wenn $\overline{AF}$ anstelle von $\overline{AC}$ angegeben ist!

Leitfrage:

Geben Sie eine Formel zur Berechnung von $\overline{AB}$ in Abhängigkeit von x, α und β an!

Geben Sie konkret an, wie sich $\overline{AB}$ verändert, wenn x verfünffacht wird und die beiden Winkel α, β unverändert bleiben! Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zur Aufgabe 2

Dreiecke

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\cos(\alpha) = \frac{x}{\overline{AC}}$

$\alpha \approx 36{,}87°$

Ist $\overline{AF}$ anstelle von $\overline{AC}$ angegeben, so kann man den Winkel α mithilfe der Tangensfunktion ermitteln:

$\tan(\alpha) = \frac{\overline{AF}}{x}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Größe des Winkels α richtig berechnet wird und im Fall der Angabe von $\overline{AF}$ eine korrekte Beschreibung angeführt wird.
Toleranzintervall: [36°; 37°]

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\tan(\alpha) = \frac{\overline{AF}}{x}$

$\tan(\beta) = \frac{\overline{BF}}{x}$

$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = x \cdot (\tan(\alpha) + \tan(\beta))$

Da zwischen x und $\overline{AB}$ eine direkte Proportionalität besteht, führt eine Verfünffachung von x auch zu einer Verfünffachung von $\overline{AB}$.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Formel zur Berechnung von $\overline{AB}$ ermittelt wird sowie angegeben wird, dass eine Verfünffachung von x eine Verfünffachung von $\overline{AB}$ bewirkt, und dieser Sachverhalt (sinngemäß) korrekt begründet wird. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Aufgabe 3

Wirkstoffkonzentration

Die Konzentration $c(t)$ eines Wirkstoffes im Blut t Stunden nach der Einnahme eines Arzneimittels kann durch die Gleichung $c(t) = c(0) \cdot 0{,}85^t$ beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die Gleichung $c(t_1) = 0{,}7 \cdot c(0)$ im gegebenen Zusammenhang und berechnen Sie t_1!

Leitfrage:

Skizzieren Sie einen zur Aufgabenstellung passenden Graphen und erläutern Sie für die berechnete Zeit t_1, wie sich die absoluten und relativen (prozentuellen) Änderungen der Wirkstoffkonzentration in den Intervallen $[0; t_1]$, $[t_1; 2t_1]$ und $[2t_1; 3t_1]$ jeweils entwickeln!

Lösung zur Aufgabe 3

Wirkstoffkonzentration

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Interpretationen:

Nach t_1 Stunden sind nur mehr 70 % der Anfangskonzentration im Blut vorhanden.

oder:

Nach t_1 Stunden vermindert sich die Anfangskonzentration um 30 %.

$0{,}7 \cdot c(0) = c(0) \cdot 0{,}85^{t_1}$

$t_1 = \frac{\ln(0{,}7)}{\ln(0{,}85)} \approx 2{,}2 \;\Rightarrow\; t_1 \approx 2{,}2$ Stunden

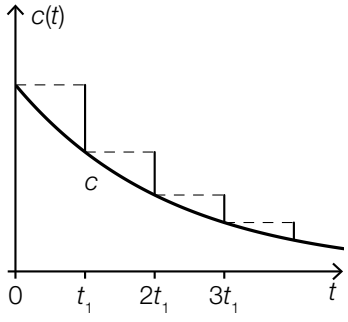
Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Gleichung korrekt interpretiert und t_1 richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die absoluten Änderungen (Abnahmen) werden bei gleichbleibender Intervalllänge mit zunehmender Zeit immer geringer.
Die prozentuellen Änderungen sind in allen drei Zeitintervallen gleich groß (da die Intervalle gleich lang sind).

Mögliche grafische Darstellung:



Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein Graph, der die Form einer (streng monoton fallenden) Exponentialfunktion haben muss, skizziert wird und die Änderungen (sinngemäß) der Lösungserwartung entsprechend erläutert werden.

Aufgabe 4

Polynomfunktion vierten Grades

Für eine Funktionsgleichung einer Polynomfunktion f vierten Grades mit $f(x) = a \cdot x^4 + x^2 + c$ gilt: $a > 0$ und $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie für $a = 1$ die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f an der Stelle $x = 2$ und erklären Sie, warum die Angabe des Wertes c für die Bearbeitung dieser Aufgabe nicht erforderlich ist!

Leitfrage:

Geben Sie eine Gleichung an, mit deren Hilfe man für alle $a > 0$ die Wendestellen berechnen kann, und schließen Sie anhand dieser Gleichung auf die Anzahl der Wendestellen der Funktion f!

Lösung zur Aufgabe 4

Polynomfunktion vierten Grades

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$f(x) = x^4 + x^2 + c$
$f'(x) = 4 \cdot x^3 + 2 \cdot x$
$f'(2) = 36 \quad \Rightarrow$ Die Steigung der Tangente an dieser Stelle beträgt 36.

Mögliche Erklärung:
Beim Ableiten der Funktion *f* fällt *c* weg. Die Kenntnis des genauen Wertes ist somit für die Berechnung des Anstiegs nicht erforderlich.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert der Steigung richtig ermittelt wird und eine korrekte Erklärung, warum die Angabe des Wertes *c* nicht erforderlich ist, angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$f(x) = a \cdot x^4 + x^2 + c$
$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot x$
$f''(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 + 2$

Die Gleichung $12 \cdot a \cdot x^2 + 2 = 0$ hat für $a > 0$ keine reellen Lösungen, daher hat die Funktion *f* keine Wendestellen.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung angegeben wird und daraus geschlossen wird, dass die Funktion *f* keine Wendestellen hat.

Aufgabe 5

Haarausfall

Laut einem Zeitungsartikel zeigt jeder dritte Mann, der über 30 Jahre alt ist, Anzeichen von Haarausfall.

Ein Shampoo-Hersteller bewirbt sein neues Produkt, das Haarausfall angeblich verhindern soll. Der Hersteller wählt 5 000 Männer, die über 30 Jahre alt sind, nach dem Zufallsprinzip aus, um sie für sein neues Produkt zu interessieren, und bietet diesen Männern eine Gratis-Probe des neuen Produkts an.

Aufgabenstellung:

Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl der ausgewählten Männer, die tatsächlich bereits Anzeichen von Haarausfall haben.

Begründen Sie, warum X binomialverteilt ist, und geben Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X an (unter der Annahme, dass die im Zeitungsartikel genannten Zahlen den Tatsachen entsprechen)!

Leitfrage:

Von den 5 000 zufällig ausgewählten Männern sind 374 an diesem Produkt prinzipiell interessiert.

Berechnen Sie auf Basis dieser Daten ein symmetrisches 95-%-Konfidenzintervall für den Anteil aller Männer über 30 Jahre, die an dem neuen Produkt prinzipiell interessiert sind!

Geben Sie an, wie viele der 5 000 zufällig ausgewählten Männer an diesem Produkt prinzipiell interessiert sein müssen, damit sich ein Konfidenzintervall maximaler Breite ergibt!

Lösung zur Aufgabe 5

Haarausfall

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Jeder der ausgewählten Männer hat entweder „Anzeichen von Haarausfall“ oder „keine Anzeichen von Haarausfall“, d. h., es gibt genau zwei mögliche Versuchsausgänge, die unabhängig voneinander mit gleichbleibender Wahrscheinlichkeit auftreten. Die Zufallsvariable X ist daher binomialverteilt.

$\mu = n \cdot p = 5\,000 \cdot \frac{1}{3} \approx 1\,666{,}7$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{5\,000 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 33{,}33$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn (sinngemäß) korrekt begründet wird, warum X binomialverteilt ist, und μ und σ richtig angegeben werden.
Toleranzintervall für μ: [1 666; 1 670]
Toleranzintervall für σ: [33; 34]

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$h = \frac{374}{5\,000} = 0{,}0748$

$0{,}0748 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}0748 \cdot 0{,}9252}{5\,000}} \approx 0{,}0748 \pm 0{,}0073$

95-%-Konfidenzintervall: [0,0675; 0,0821] = [6,75 %; 8,21 %]

Ein Konfidenzintervall maximaler Breite ergibt sich, wenn 2 500 Männer an diesem Produkt interessiert sind. (In diesem Fall gilt $h = (1-h) = 0{,}5$, somit ist der Ausdruck $h \cdot (1-h)$ maximal und damit auch $\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}$.)

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn das Konfidenzintervall richtig berechnet und die richtige Anzahl angegeben wird.
Toleranzintervall für die untere Grenze: [0,067; 0,068] bzw. [6,7 %; 6,8 %]
Toleranzintervall für die obere Grenze: [0,081; 0,083] bzw. [8,1 %; 8,3 %]

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 3
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Berechnungen mit Vektoren

Gegeben sind Zahlen und Vektoren. Es gilt:
$a \in \mathbb{R};\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2;\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, ob die folgenden Ausdrücke (wohl-)definiert sind:

$a - \vec{x} \cdot \vec{y}$
$(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{v}$
$\vec{v} \cdot (a \cdot \vec{v})$

Erklären Sie zu jedem (wohl-)definierten Ausdruck, welche Art von Ergebnis vorliegt!

Leitfrage:

Die beiden Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ y_2 \end{pmatrix}$ beschreiben die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks mit dem Flächeninhalt $A = 37{,}5$ Flächeneinheiten. Geben Sie zwei Gleichungen in Abhängigkeit von x_1 und y_2 an, die es ermöglichen, die fehlenden Koordinaten von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zu berechnen, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 1

Berechnungen mit Vektoren

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Das Ergebnis von $a - \vec{x} \cdot \vec{y}$ ist eine reelle Zahl, da das Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y}$ eine reelle Zahl ergibt (und es sich daher um die Differenz zweier reeller Zahlen handelt).

Der Ausdruck $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{v}$ ist nicht (wohl-)definiert.

Der Ausdruck $\vec{v} \cdot (a \cdot \vec{v})$ hat eine reelle Zahl als Ergebnis, da $(a \cdot \vec{v})$ einen Vektor aus $\mathbb{R}^3$ ergibt und es sich daher um ein Skalarprodukt zweier dreidimensionaler Vektoren handelt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn richtig angegeben wird, ob der jeweilige Ausdruck (wohl-)definiert ist, und (sinngemäß) korrekt erklärt wird, welche Art von Ergebnis vorliegt.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die beiden Vektoren stehen aufeinander normal, daraus folgt eine Gleichung:
$\begin{pmatrix} x_1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; 3 \cdot x_1 + 5 \cdot y_2 = 0$

Aus der Flächenberechnung eines rechtwinkeligen Dreiecks folgt eine zweite Gleichung:
$\frac{\sqrt{(x_1^2 + 25) \cdot (9 + y_2^2)}}{2} = 37{,}5 \;\Rightarrow\; (x_1^2 + 25) \cdot (9 + y_2^2) = 5\,625$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn zwei korrekte Gleichungen in Abhängigkeit von x_1 und y_2 angegeben werden und eine (sinngemäß) korrekte Vorgehensweise erklärt wird. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

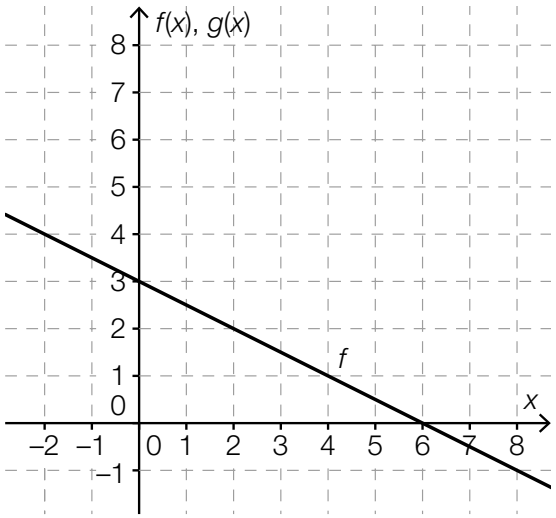
Aufgabe 2

Lineare Funktionen

Gegeben sind der Graph einer Funktion f und die Funktion g mit $g(x) = a \cdot x + 6$ und $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der Funktion g so, dass die Gleichung $f(x) = g(x)$ nicht lösbar ist, und bestimmen Sie für diesen Fall den Wert des Parameters a!



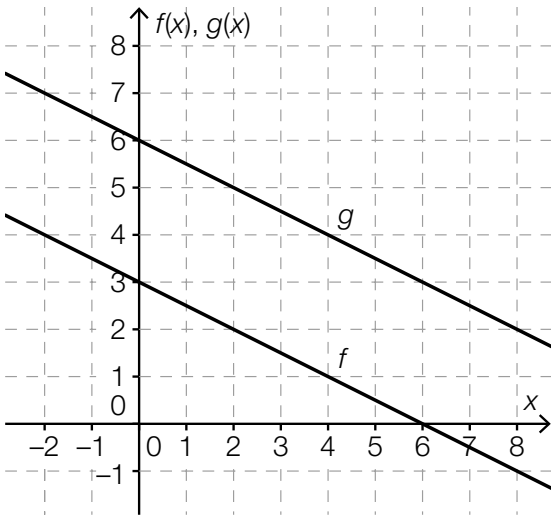
Leitfrage:

Lösen Sie die Gleichung $f(x) = g(x)$ und geben Sie die Lösung in Abhängigkeit von a an!
Geben Sie weiters an, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ die Lösung positiv ist, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 2

Lineare Funktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



$a = -\frac{1}{2}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl der Graph der Funktion richtig skizziert als auch der Wert des Parameters *a* richtig bestimmt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$-\frac{1}{2} \cdot x + 3 = a \cdot x + 6$
$2 \cdot a \cdot x + x = -6$

$x = \frac{-6}{2 \cdot a + 1}$

Aus $x > 0$ folgt: $2 \cdot a + 1 < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{1}{2}$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Lösung der Gleichung und eine korrekte Bedingung für *a* angegeben werden sowie eine korrekte Vorgehensweise erklärt wird!

Aufgabe 3

Bewegungsvorgang

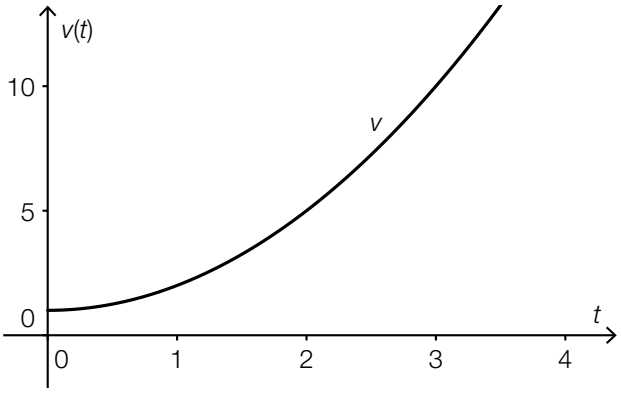
Die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Körpers zum Zeitpunkt t wird durch eine Funktion v beschrieben ($v(t)$ in m/s, t in s).

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die Terme $v'(2)$ und $\frac{v(2) - v(0)}{2}$ im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion v.
Erklären Sie anhand der Abbildung die geometrische Bedeutung von $v'(2)$ und $\frac{v(2) - v(0)}{2}$!



Geben Sie an, wie anhand der Abbildung derjenige Zeitpunkt t_1 aus dem Intervall [0; 3] ermittelt werden kann, zu dem gilt:

$v'(t_1) = \frac{v(2) - v(0)}{2}$

Lösung zur Aufgabe 3

Bewegungsvorgang

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$v'(2)$ gibt die (momentane) Beschleunigung (in m/s^2) des Körpers zum Zeitpunkt $t = 2$ an.
$\frac{v(2) - v(0)}{2}$ gibt die mittlere Beschleunigung (in m/s^2) des Körpers im Intervall [0; 2] an.

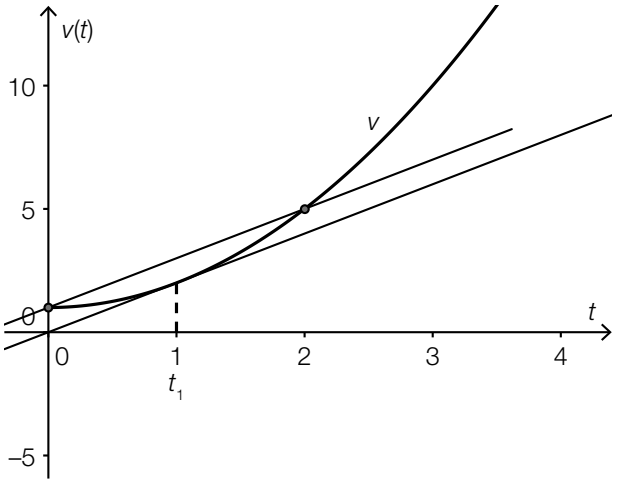
Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Terme im gegebenen Kontext (sinngemäß) korrekt interpretiert werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$v'(2)$ beschreibt die Steigung der Tangente an den Graphen von v an der Stelle $t = 2$.
$\frac{v(2) - v(0)}{2}$ gibt die Steigung der Sekante durch die Punkte $(0|v(0))$ und $(2|v(2))$ an.

Der Ausdruck $v'(t_1) = \frac{v(2) - v(0)}{2}$ beschreibt, dass die Momentanbeschleunigung zum Zeitpunkt t_1 gleich der mittleren Beschleunigung im Intervall [0; 2] ist. Somit ist t_1 derjenige Wert, für den die Tangente an den Graphen von v parallel zur Sekante durch die Punkte $(0|v(0))$ und $(2|v(2))$ ist.



Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die geometrische Bedeutung von $v'(2)$ und $\frac{v(2) - v(0)}{2}$ anhand der Abbildung richtig erklärt wird und korrekt erklärt wird, wie der Zeitpunkt t_1 ermittelt werden kann.

Aufgabe 4

Abbau eines Wirkstoffes

Die Entwicklung der Konzentration $c(t)$ (in mg/L) eines Arzneimittelwirkstoffes im Blut t Stunden nach der Einnahme kann durch die Gleichung $c(t + 1) - c(t) = -0{,}12 \cdot c(t)$ beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die angeführte Differenzengleichung im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Die Wirkstoffkonzentration $d(t)$ eines anderen Wirkstoffes nimmt pro Stunde konstant um 15 mg/L ab.

Geben Sie eine Differenzengleichung an, die diese Entwicklung der Wirkstoffkonzentration d beschreibt!

Geben Sie an, welche Funktionstypen jeweils zur Beschreibung der Entwicklung der Wirkstoffkonzentrationen c und d herangezogen werden können, und begründen Sie Ihre Entscheidungen!

Lösung zur Aufgabe 4

Abbau eines Wirkstoffes

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Konzentration des Wirkstoffes im Blut nimmt pro Stunde um 12 % (der zu Beginn dieser Stunde vorhandenen Menge) ab.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die angeführte Differenzengleichung im gegebenen Kontext korrekt interpretiert wird, wobei jedenfalls erwähnt werden muss, dass es sich um eine relative Abnahme der Wirkstoffkonzentration pro Stunde handelt.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$d(t + 1) - d(t) = -15$

Die Entwicklung der Wirkstoffkonzentration d kann durch eine lineare Funktion beschrieben werden, da die Abnahme der Wirkstoffkonzentration pro Stunde konstant ist.
Die Entwicklung der Wirkstoffkonzentration c kann durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden, da die Abnahme der Wirkstoffkonzentration pro Stunde um denselben Prozentsatz erfolgt.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Differenzengleichung angegeben wird (äquivalente Schreibweisen sind als richtig zu werten) und den beiden Wirkstoffkonzentrationen c und d jeweils der korrekte Funktionstyp unter Angabe (sinngemäß) korrekter Begründungen zugeordnet wird.

Aufgabe 5

Würfel

Die Seitenflächen eines „fairen“ sechsflächigen Würfels sind mit jeweils einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 beschriftet.
(Ein Würfel ist „fair“, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.)

Aufgabenstellung:

Bei einem Zufallsversuch wird dieser Würfel einmal geworfen.

Geben Sie den Grundraum *A* dieses Zufallsversuchs an und bestimmen Sie die Ereignismenge *B* für den Fall, eine Primzahl zu würfeln, und erklären Sie die beiden Begriffe „Grundraum” und „Ereignis“!

A = _____

B = _____

Geben Sie weiters die Wahrscheinlichkeit an, bei einmaligem Würfeln die Zahl 7 zu erhalten, und erklären Sie, welches besondere Ereignis in diesem Fall vorliegt!

Leitfrage:

Der Würfel wird *n*-mal geworfen.

Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit *P* an, bei diesem Zufallsversuch mindestens einmal eine gerade Zahl zu würfeln!

P = _____

Berechnen Sie weiters, wie oft ein Würfel geworfen werden muss, damit diese Wahrscheinlichkeit *P* mindestens 99 % beträgt!

Lösung zur Aufgabe 5

Würfel

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{2, 3, 5\}$

Bei der Menge A (Grundraum) handelt es sich um die Menge aller möglichen Versuchsausgänge.

Bei der Menge B (Ereignis) handelt es sich um die Menge der günstigen Versuchsausgänge.

Die Wahrscheinlichkeit, eine 7 zu würfeln, beträgt null, da es sich hierbei um ein unmögliches Ereignis handelt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Grundraum A und das Ereignis B richtig angegeben und (sinngemäß) korrekt erklärt werden sowie die Wahrscheinlichkeit für das unmögliche Ereignis richtig angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$P = 1 - 0{,}5^n$

$0{,}99 \leq 1 - 0{,}5^n$
$n \geq 6{,}64...$
Der Würfel muss mindestens 7-mal geworfen werden.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Term und die richtige Anzahl korrekt angegeben werden. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 4
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Normalvektor

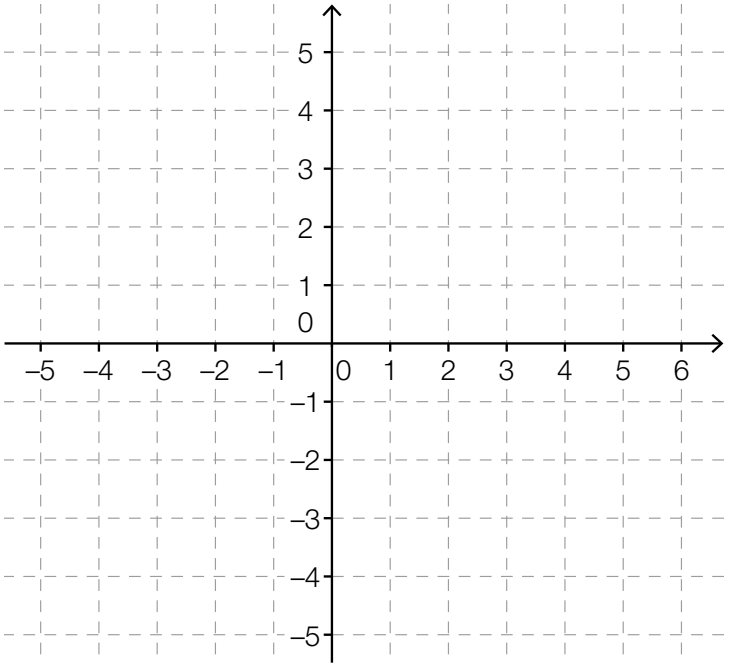
Gegeben sind ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die Punkte $P = (3|{-2})$ und $Q = (-7|{-8})$ in der Ebene.

Aufgabenstellung:

Eine Gerade g wird durch folgende Parameterdarstellung beschrieben: $X = P + s \cdot \vec{a}$ mit $s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass die Gerade g den Punkt Q enthält, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem einen Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und einen zugehörigen, gleich langen Normalvektor $\overrightarrow{n_a}$ ein!



Ergänzen Sie im obigen Koordinatensystem einen Vektor $\vec{a} + k \cdot \overrightarrow{n_a}$ mit $0 < k < 1$!

Erklären Sie weiters, warum es unterschiedliche Möglichkeiten gibt, zu einem gegebenen Vektor einen Normalvektor anzugeben!

Lösung zur Aufgabe 1

Normalvektor

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mögliche Rechnung: $\begin{pmatrix} -7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

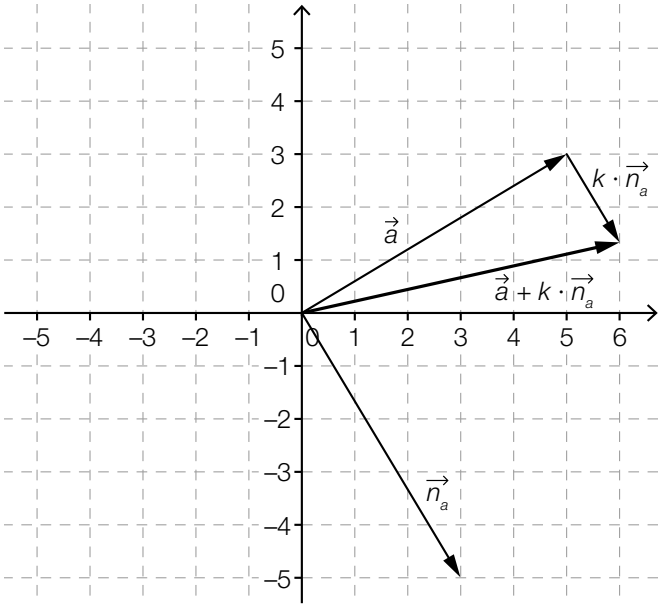
Für $s = -2$ erhält man eine wahre Aussage, also enthält die Gerade g den Punkt Q.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn durch eine Rechnung korrekt gezeigt wird, dass g den Punkt Q enthält, und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Vektoren:



Mögliche Erklärung:
Da der Normalvektor zu einem gegebenen Vektor nur durch seine Richtung, aber weder durch seine Länge noch durch seine Orientierung bestimmt ist, gibt es unterschiedliche Möglichkeiten, diesen anzugeben.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Vektor $\vec{a}$ sowie ein Normalvektor $\vec{n}_a$ korrekt eingezeichnet werden und ein korrekter Vektor $\vec{a} + k \cdot \vec{n}_a$ ergänzt wird. Weiters muss eine korrekte Erklärung für die unterschiedlichen Möglichkeiten der Wahl des Normalvektors angegeben werden.

Aufgabe 2

Funktionsgleichung aufstellen

Eine Funktion g hat die Eigenschaft, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$g(x + 1) = g(x) - 0{,}5$

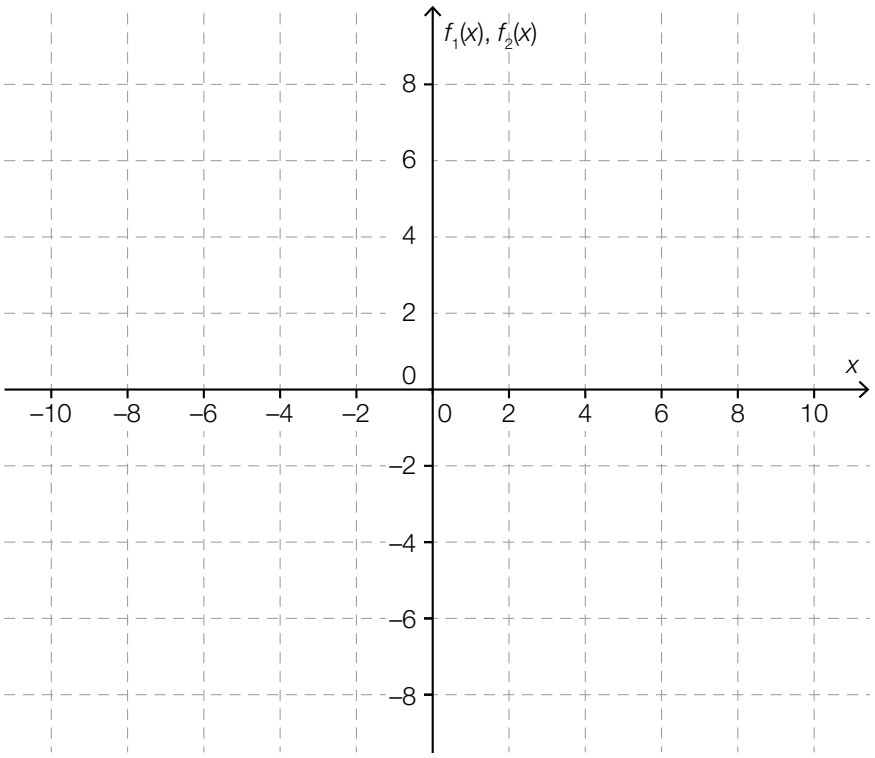
Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Funktionsgleichung einer Funktion g an, die die gegebene Eigenschaft hat, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Gegeben sind zwei Funktionen f_1 und f_2 mit folgenden Eigenschaften:
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$f_1(x + 1) = f_1(x) + a$ und $f_2(x + 1) = f_2(x) \cdot a$ mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem jeweils einen möglichen Verlauf der Graphen von f_1 und f_2!
Geben Sie für beide Funktionen an, welcher Funktionstyp jeweils vorliegt, und geben Sie an, wie sich das Monotonieverhalten der beiden Funktionen ändert, wenn man a aus dem Intervall (0; 1) wählt!



Lösung zur Aufgabe 2

Funktionsgleichung aufstellen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mögliche Funktionsgleichung: $g(x) = -0{,}5 \cdot x + 1$

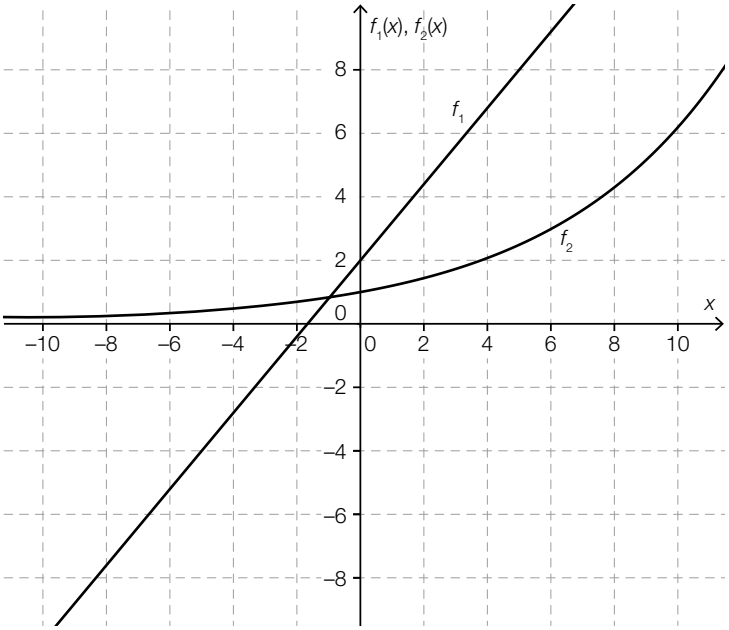
Die gegebene Eigenschaft sagt aus, dass der Funktionswert um 0,5 abnimmt, wenn x um 1 zunimmt. Daraus folgt, dass es sich um eine lineare Funktion mit der Steigung –0,5 handelt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine Funktionsgleichung der Form $g(x) = -0{,}5 \cdot x + d$ mit $d \in \mathbb{R}$ angegeben wird und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Funktionsgraphen:



Funktionstyp: f_1 ist eine lineare Funktion, f_2 ist eine Exponentialfunktion.
Das Monotonieverhalten von f_1 ändert sich nicht, hingegen ist der Graph von f_2 für $a \in (0; 1)$ streng monoton fallend.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine Gerade mit einer Steigung größer als 1 und der Graph einer streng monoton steigenden Exponentialfunktion skizziert und die Funktionstypen richtig angegeben werden. Weiters muss das jeweilige Monotonieverhalten beider Funktionen für $a \in (0; 1)$ korrekt angegeben werden.

Aufgabe 3

Lotrechter Wurf

Ein Objekt wird lotrecht nach oben geworfen. Die Funktion s beschreibt dabei die Höhe des Objekts über dem Boden in Abhängigkeit von der Zeit t.

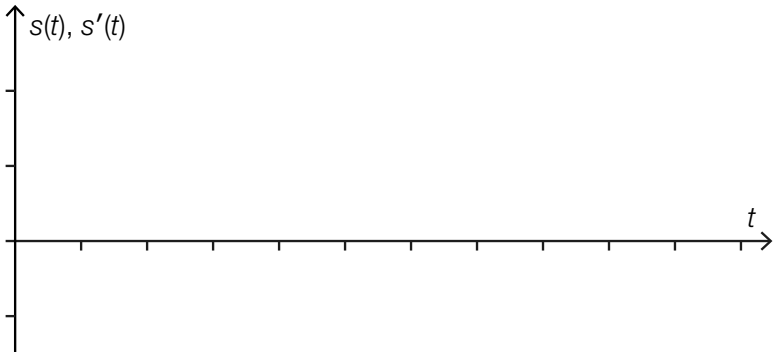
$s(t) = a \cdot t - \frac{b}{2} \cdot t^2$ mit $a, b > 0$ und $t \in \left[0; \frac{2a}{b}\right]$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Ableitungsfunktion s'' und geben Sie an, was durch die Funktion s'' im gegebenen Kontext beschrieben wird!

Leitfrage:

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem mögliche Graphen von s und s'! Achten Sie auf die Zusammenhänge zwischen den Funktionsgraphen!



Geben Sie die Nullstelle(n) der Funktion s' in Abhängigkeit von a und b an und deuten Sie die Nullstelle(n) im gegebenen Kontext!

Lösung zur Aufgabe 3

Lotrechter Wurf

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

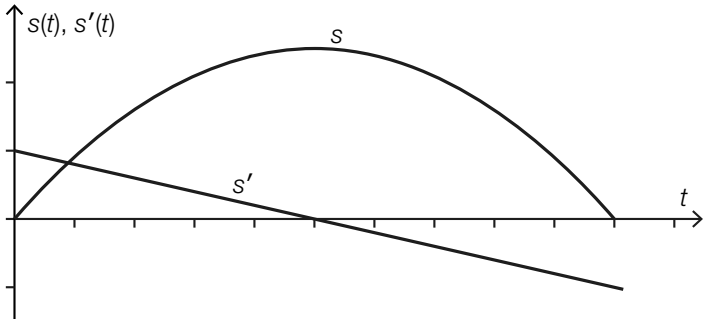
$s'(t) = a - b \cdot t$
$s''(t) = -b$

Die Funktion s'' beschreibt die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit des Objekts in Abhängigkeit von der Zeit, also die Momentanbeschleunigung.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Ableitungsfunktion korrekt angegeben und im Kontext korrekt gedeutet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:



$0 = a - b \cdot t \Rightarrow t = \frac{a}{b}$

Die Nullstelle der Funktion s' beschreibt denjenigen Zeitpunkt t, zu dem das Objekt die größte Höhe über dem Boden erreicht.

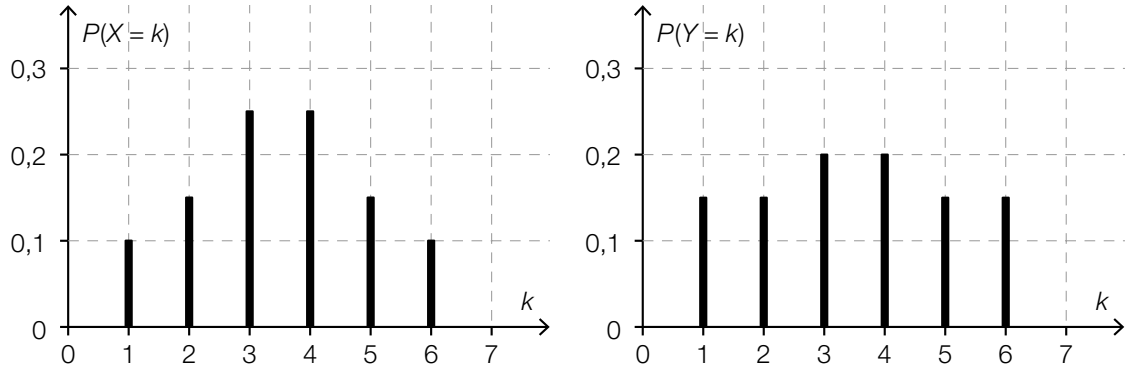
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine passende Skizze vorliegt sowie die Nullstelle der Funktion s' korrekt angegeben und (sinngemäß) korrekt gedeutet wird.
Dabei muss der Graph von s als eine nach unten offene Parabel erkennbar und der Graph von s' eine fallende Gerade sein. Die Nullstelle von s' muss mit der Extremstelle von s übereinstimmen.

Aufgabe 4

Verteilungen

Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Verteilungen zweier Zufallsvariablen X und Y.



Die Erwartungswerte der Zufallsvariablen X und Y werden mit $E(X)$ bzw. $E(Y)$ bezeichnet.
Die Standardabweichungen der Zufallsvariablen X und Y werden mit $\sigma(X)$ bzw. $\sigma(Y)$ bezeichnet.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$ und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Geben Sie anhand der obigen Abbildungen an, ob $E(Y)$ kleiner, größer oder gleich $E(X)$ ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Geben Sie weiters anhand der obigen Abbildungen an, ob $\sigma(Y)$ kleiner, größer oder gleich $\sigma(X)$ ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösung zur Aufgabe 4

Verteilungen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Vorgehensweise:
$E(X) = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}15 + 3 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}25 + 5 \cdot 0{,}15 + 6 \cdot 0{,}1 = 3{,}5$

Jeder Wert, den die Zufallsvariable annehmen kann, wird mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit multipliziert und diese Produkte werden aufsummiert.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn $E(X)$ korrekt ermittelt und eine korrekte Vorgehensweise beschrieben wird.
Dabei ist auch das Ablesen des Wertes (aufgrund der Symmetrie der Verteilung) aus der Abbildung zulässig, sofern diese Vorgehensweise richtig beschrieben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Es gilt $E(Y) = E(X)$, da beide Verteilungen symmetrisch um denselben Wert sind.

Es gilt $\sigma(Y) > \sigma(X)$, weil: Die Wahrscheinlichkeiten für die „Randwerte“ bei $k = 1$ und $k = 6$ sind bei Verteilung Y größer als bei Verteilung X und zugleich sind die Wahrscheinlichkeiten für die beiden „mittleren“ Werte bei $k = 3$ und $k = 4$ kleiner als bei Verteilung X.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl $E(Y) = E(X)$ als auch $\sigma(Y) > \sigma(X)$ erkannt und korrekt begründet wird.

Aufgabe 5

Wahlumfragen

Zwei Meinungsforschungsinstitute erhoben in unterschiedlichen Zufallsstichproben gleichzeitig den Wähleranteil einer Partei. Anhand von Umfrage *A* mit 500 Befragten wurde das symmetrische Konfidenzintervall [0,315; 0,355] für den relativen Wähleranteil dieser Partei ermittelt. Umfrage *B* mit 1 000 Befragten lieferte (bei gleicher Berechnungsmethode) das symmetrische Konfidenzintervall [0,275; 0,325] für den relativen Wähleranteil dieser Partei.

Aufgabenstellung:

Geben Sie zu jeder der nachstehenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidungen!

Aussage 1: Das der Berechnung des Konfidenzintervalls der Umfrage *A* zugrunde gelegte Konfidenzniveau ist höher als jenes, das der Berechnung des Konfidenzintervalls der Umfrage *B* zugrunde gelegt wurde.
Aussage 2: Der Wähleranteil dieser Partei liegt mit Sicherheit im Intervall [0,275; 0,355].

Leitfrage:

Ermitteln Sie die statistische Sicherheit (das Konfidenzniveau) des anhand von Umfrage *A* ermittelten Konfidenzintervalls und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!
Geben Sie an, ob eine Verdoppelung der Stichprobengröße bei gleichbleibendem Stichprobenanteil und gleichbleibender Sicherheit zu einer Halbierung der Breite des Konfidenzintervalls führt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösung zur Aufgabe 5

Wahlumfragen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Aussage 1 ist falsch: Da bei Umfrage *B* trotz deutlich größerer Stichprobe das ermittelte Konfidenzintervall breiter ist, muss das Konfidenzniveau höher gewählt worden sein.
Aussage 2 ist falsch, da der unbekannte Wähleranteil auch außerhalb der beiden Konfidenzintervalle liegen kann.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn für beide Aussagen richtig angegeben wird, dass sie falsch sind, und dies auch (sinngemäß) korrekt begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Der Stichprobenanteil lautet 0,335 und die halbe Breite des Konfidenzintervalls beträgt 0,02.

$0{,}02 = z \cdot \sqrt{\frac{0{,}335 \cdot 0{,}665}{500}}$

$z \approx 0{,}9475$

Sicherheit: $2 \cdot \phi(0{,}9475) - 1 \approx 0{,}657$

Da (im Nenner) die Quadratwurzel der Stichprobengröße berechnet wird, bewirkt eine Verdoppelung der Stichprobengröße keine Halbierung der Breite des Konfidenzintervalls.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Sicherheit des Konfidenzintervalls richtig ermittelt und eine korrekte Vorgehensweise erklärt wird.

Weiters muss (sinngemäß) korrekt begründet werden, warum eine Verdoppelung der Stichprobengröße keine Halbierung der Breite des Konfidenzintervalls bewirkt.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 5
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Zahlenmengen

Aufgabenstellung:

Geben Sie zu jeder der nachstehenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Antwort!

Aussage 1: $\sqrt{9} \in \mathbb{Z}$

Aussage 2: $-5{,}3$ liegt in $\mathbb{Q}$, aber nicht in $\mathbb{Z}$.

Aussage 3: $\frac{\pi}{4}$ ist eine rationale Zahl.

Leitfrage:

Geben Sie einen Überblick über den Zusammenhang der Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ und erklären Sie die Eigenschaft derjenigen Zahlen, die zwar in $\mathbb{R}$, aber nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten sind!

Geben Sie zu den folgenden Aussagen jeweils eine zutreffende Gleichung (in der Variablen x) an!

a) Die Gleichung ist in $\mathbb{Z}$, aber nicht in $\mathbb{N}$ lösbar.
b) Die Gleichung ist in $\mathbb{C}$, aber nicht in $\mathbb{R}$ lösbar.

Lösung zur Aufgabe 1

Zahlenmengen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Aussagen 1 und 2 sind wahr, die Aussage 3 ist falsch.

Mögliche Begründungen:

Aussage 1: $\sqrt{9} = 3$ und 3 ist eine ganze Zahl.

Aussage 2: –5,3 kann als Bruch zweier ganzer Zahlen dargestellt werden, ist somit ein Element der Menge der rationalen Zahlen, ist aber keine ganze Zahl.

Aussage 3: Da π eine irrationale Zahl ist, kann $\frac{\pi}{4}$ nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen dargestellt werden und ist somit nicht rational.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wahrheitswert der drei Aussagen richtig angegeben und jeweils eine korrekte Begründung angeführt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Es gilt folgender Zusammenhang: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Die irrationalen Zahlen (in $\mathbb{R}$, aber nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten) sind Dezimalzahlen, die nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen geschrieben werden können.

Mögliche Gleichungen:

a) $x + 3 = 1$

b) $x^2 = -4$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Teilmengenbeziehungen formal oder verbal korrekt angegeben werden, die Eigenschaft der irrationalen Zahlen richtig erklärt wird und zu den Aussagen aus a und b jeweils eine passende Gleichung angegeben wird.

Aufgabe 2

Parallelogramm

Von einem Parallelogramm *ABCD* sind die Eckpunkte $A = (-1|2)$ und $B = (5|1)$ und der Schnittpunkt der Diagonalen $M = (3|3)$ gegeben.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Koordinaten des Eckpunkts *C* rechnerisch!

Leitfrage:

Geben Sie die Koordinaten eines Punktes B_1 so an, dass die Punkte *A* und B_1 die Eckpunkte sind und *M* der Mittelpunkt eines Quadrats ist! Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 2

Parallelogramm

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Möglicher Lösungsweg:

$C = M + \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Punkt C richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Diagonalen eines Quadrats sind gleich lang und stehen normal aufeinander, somit gilt:

$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{MB_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (je nach Umlaufsinn)

$B_1 = M + \overrightarrow{MB_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

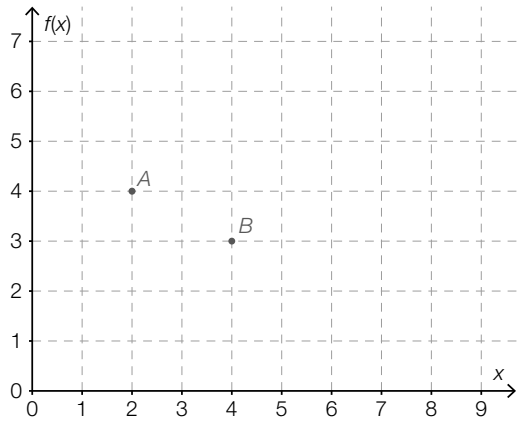
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein Eckpunkt B_1 richtig angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird. (Auf den Umlaufsinn muss dabei nicht eingegangen werden.)

Aufgabe 3

Punkte einer Exponentialfunktion

Die in der nachstehenden Abbildung dargestellten Punkte A und B haben ganzzahlige Koordinaten. Der Graph einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ verläuft durch die Punkte A und B.



Aufgabenstellung:

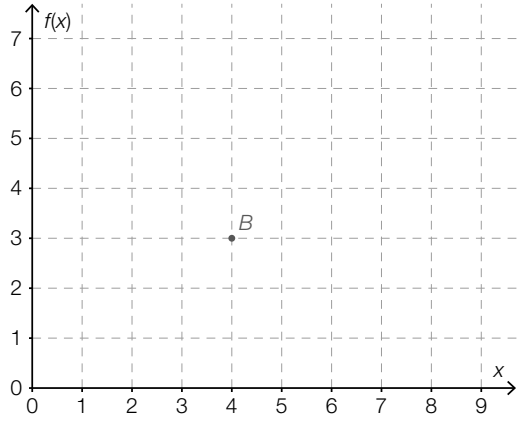
Geben Sie an, ob die nachstehenden Aussagen über diese durch A und B verlaufende Exponentialfunktion f zutreffen, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidungen!

- $f(0) \leq 5$
- $b < 1$
- Der Änderungsfaktor $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ ist konstant.

Leitfrage:

Die gegebene Funktion f beschreibt einen Zerfallsprozess mit x in Stunden.
Ermitteln Sie die Funktionsgleichung und die Halbwertszeit der Funktion f!

Ergänzen Sie im nachstehenden Koordinatensystem einen Punkt A_1 so, dass A_1 und B auf dem Graphen einer Exponentialfunktion liegen, deren Halbwertszeit zwei Stunden beträgt!



Lösung zur Aufgabe 3

Punkte einer Exponentialfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

- $f(0) \leq 5$
  Diese Aussage ist falsch, denn $f(0) = 5$ würde im Fall eines linearen Verlaufes des Graphen gelten. Aufgrund der Linkskrümmung dieses Funktionsgraphen kann dieser daher nicht durch den Punkt $(0|y)$ mit $y \leq 5$ verlaufen.
- $b < 1$
  Diese Aussage ist richtig, da die Funktion (streng) monoton fallend ist und damit der Wert von b zwischen 0 und 1 liegt.
- Der Änderungsfaktor $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ ist konstant.
  Diese Aussage ist richtig, da bei Exponentialfunktionen die relative Änderung in gleichen Intervallen konstant ist (und daher gilt: $f(x+1) = a \cdot b^x \cdot b = f(x) \cdot b$).

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn bei allen Aussagen angegeben wird, ob diese zutreffen oder nicht, und jeweils eine (sinngemäß) korrekte Begründung angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$f(x) = \frac{16}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x}{2}}$ bzw. $f(x) \approx 5{,}\dot{3} \cdot e^{-0{,}1438 \cdot x}$

Die Halbwertszeit beträgt ca. 4,82 Stunden.

Ein möglicher Punkt A_1 hat die Koordinaten $(2|6)$.

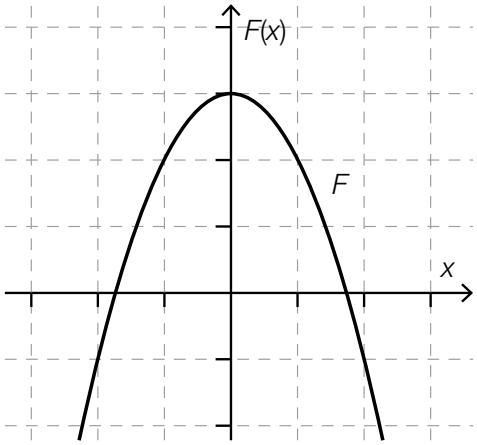
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl die Gleichung als auch die Halbwertszeit und ein möglicher Punkt A_1 korrekt angegeben werden.

Aufgabe 4

Stammfunktion

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Stammfunktion F einer Polynomfunktion f dargestellt. Die Funktion F ist symmetrisch zur senkrechten Achse.



Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert des Integrals $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ an und erläutern Sie, welche Überlegungen zu diesem Wert führen!

Leitfrage:

Die Funktion F ist eine Polynomfunktion zweiten Grades mit der Funktionsgleichung $F(x) = a \cdot x^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Erläutern Sie, wie sich eine Veränderung des Parameters b auf den Wert des bestimmten Integrals $\int_{0}^{z} f(x)\,dx$ mit $z > 0$ auswirkt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösung zur Aufgabe 4

Stammfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Der Wert des Integrals beträgt null, weil die Stammfunktion symmetrisch zur senkrechten Achse ist, daher gilt $F(c) = F(-c)$ und somit gilt $\int_{-c}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(-c) = 0$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert des Integrals mit null angegeben wird und (sinngemäß) korrekt erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Der Wert des Integrals ändert sich nicht, wenn b verändert wird, da eine additive Konstante in einer Stammfunktion keine Auswirkung auf den Wert des bestimmten Integrals hat.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Unabhängigkeit des bestimmten Integrals vom Parameter b korrekt begründet wird.

Aufgabe 5

Erwartungswert

Die nachstehende Tabelle zeigt alle möglichen Auszahlungsbeträge und die entsprechenden Gewinnwahrscheinlichkeiten bei einem Glücksspiel, wobei eine Gewinnwahrscheinlichkeit nicht angegeben ist.

Auszahlungsbetrag in €	0	5	10	100
Gewinnwahrscheinlichkeit	0,68	0,2	0,1	p

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit p für den Gewinn von € 100 an und ermitteln Sie den Erwartungswert des Auszahlungsbetrags!

Leitfrage:

Um am Glücksspiel teilnehmen zu dürfen, ist ein Einsatz von € 5 zu leisten.
Geben Sie an, ob das Glücksspiel im Mittel den Anbieter oder die Spieler „bevorzugt“, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Ändern Sie einen Auszahlungsbetrag so ab, dass (unter Beibehaltung der Gewinnwahrscheinlichkeiten und des Einsatzes) das Glücksspiel weder den Anbieter noch die Spieler „bevorzugt“, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 5

Erwartungswert

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$p = 0{,}02$

Der Erwartungswert für den Auszahlungsbetrag beträgt € 4, weil
$5 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}1 + 100 \cdot 0{,}02 = 4$ ergibt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert für p angegeben und der Erwartungswert für den Auszahlungsbetrag richtig ermittelt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Das Spiel bevorzugt den Anbieter, da der Einsatz höher als der Erwartungswert für den Auszahlungsbetrag ist.

Mögliche Änderung:
Wenn der höchste Auszahlungsbetrag von € 100 auf € 150 erhöht wird, beträgt der Erwartungswert für den Auszahlungsbetrag € 5 und entspricht somit der Höhe des Einsatzes.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Bevorzugung des Anbieters erkannt und korrekt begründet wird und wenn eine korrekte Änderung eines Auszahlungsbetrags angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erklärt wird.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 6
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Äquivalenzumformungen

Für $x \in \mathbb{R}$ sind zwei Gleichungen gegeben:

- $3 - \frac{2x}{5} = -1$
- $\frac{3x}{5} + 1 = x - 3$

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, ob diese beiden Gleichungen äquivalent sind!

Für den Fall, dass diese äquivalent sind, geben Sie mögliche Äquivalenzumformungen an, um die erste Gleichung in die zweite Gleichung überzuführen!
Falls diese Gleichungen nicht äquivalent sind, begründen Sie, warum dies so ist!

Leitfrage:

Erklären Sie konkret auf das unten angegebene Beispiel bezogen, warum es sich bei der durchgeführten Umformung um keine Äquivalenzumformung handelt! Die Grundmenge ist die Menge der reellen Zahlen.

$(x - 2)^2 = 25 \mid \sqrt{}$
$x - 2 = 5$

Lösung zur Aufgabe 1

Äquivalenzumformungen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Diese beiden Gleichungen sind äquivalent.

Mögliche Äquivalenzumformungen:
Durch die Subtraktion der Zahl 2 erhält man die Gleichung $1 - \frac{2x}{5} = -3$.
Die anschließende Addition von x liefert $1 + \frac{3x}{5} = -3 + x$, und somit erhält man die zweite Gleichung.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden Gleichungen als äquivalent erkannt und mögliche Äquivalenzumformungen richtig angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die erste Gleichung hat die Lösungen -3 und 7, die zweite hingegen nur eine Lösung, nämlich 7. Die beiden Gleichungen haben daher nicht die gleiche Lösungsmenge, sind also nicht äquivalent.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn (sinngemäß) korrekt erklärt wird, warum die beiden Gleichungen nicht äquivalent sind.

Aufgabe 2

Abkühlung

Ein Gefäß mit heißem Wasser wird bei einer Umgebungstemperatur von 0 °C zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ins Freie gestellt. Die Temperatur $T(t)$ (in °C) des Wassers ist abhängig von der Zeit t (in Minuten) und kann durch eine Funktion T mit $T(t) = 90 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}$ beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Halbwertszeit für diesen Abkühlungsprozess und deuten Sie diesen Wert im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Zeigen Sie, dass die momentane Änderungsrate $T'(t)$ der Temperatur des Wassers direkt proportional zur momentanen Temperatur des Wassers zum Zeitpunkt t ist, und geben Sie den Proportionalitätsfaktor k an!

$k =$ _____

Geben Sie an, welche Bedeutung der Betrag von T' für den Abkühlungsprozess hat!

Lösung zur Aufgabe 2

Abkühlung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$45 = 90 \cdot e^{-0,2 \cdot t} \Rightarrow t \approx 3,5$

Nach ca. 3,5 Minuten ist die Temperatur des Wassers auf die Hälfte des Ausgangswerts gesunken (von 90 °C auf 45 °C).

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Halbwertszeit korrekt bestimmt und eine (sinngemäß) korrekte Deutung angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$T'(t) = 90 \cdot (-0,2) \cdot e^{-0,2 \cdot t} = -0,2 \cdot T(t)$
$k = -0,2$

Der Betrag von T' gibt die Abkühlungsgeschwindigkeit an.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die direkte Proportionalität gezeigt und der Proportionalitätsfaktor korrekt bestimmt wird (auch $k = -5$ ist als richtig zu werten, weil gilt: $T(t) = -5 \cdot T'(t)$). Weiters muss die Bedeutung von T' (sinngemäß) korrekt angegeben werden.

Aufgabe 3

Rohölpreis

Im Dezember 2015 fiel der Preis für Rohöl täglich tendenziell ab. Der Preis für Rohöl wird in US-Dollar und bezogen auf das *Barrel* (engl. für *Fass*) angegeben, wobei ein Barrel 159 Liter beinhaltet.

Am 1. Dezember 2015 um 12:00 Uhr betrug der Rohölpreis 41,70 US-Dollar pro Barrel, am 11. Dezember 2015 um 12:00 Uhr betrug der Preis 37,94 US-Dollar pro Barrel.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die absolute und die relative (prozentuelle) Änderung des Rohölpreises pro Barrel für den angegebenen Zeitraum an!

Leitfrage:

Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate des Rohölpreises pro Liter über den angegebenen Zeitraum (in Tagen) und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im gegebenen Zusammenhang!

Geben Sie an, welchen Preis 1 Liter Rohöl am 16. Dezember 2015 gehabt hätte, wenn sich der Rohölpreis ab 11. Dezember 2015 mit derselben mittleren Änderungsrate pro Tag weiterentwickelt hätte!

Lösung zur Aufgabe 3

Rohölpreis

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

absolute Änderung: –3,76 US-Dollar pro Barrel
relative Änderung: –9 % bzw. –0,09

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Werte richtig angegeben werden.
Auch die Angabe von positiven Werten (3,76 US-Dollar und 9 %) ist gültig, wenn verbal eindeutig darauf hingewiesen wird, dass es sich um eine Abnahme handelt.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Lösung:

mittlere Änderungsrate: $\frac{\frac{37{,}94}{159} - \frac{41{,}7}{159}}{10} \approx -0{,}00236$

Der Rohölpreis pro Liter hat in diesem Zeitraum um durchschnittlich ca. 0,00236 US-Dollar pro Tag abgenommen.

Preis pro Liter am 16.12.2015 bei beschriebener Entwicklung: $\frac{37{,}94}{159} - 5 \cdot 0{,}00236 \approx 0{,}2268$
Der Preis pro Liter hätte ca. 0,2268 US-Dollar betragen.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die mittlere Änderungsrate des Rohölpreises pro Liter richtig angeben und (sinngemäß) korrekt interpretiert wird sowie der Rohölpreis pro Liter für den 16.12.2015 korrekt angegeben wird.
Toleranzintervall für die mittlere Änderungsrate: [–0,0024; –0,002]
Toleranzintervall für den Preis pro Liter: [0,22; 0,23]

Aufgabe 4

Integral

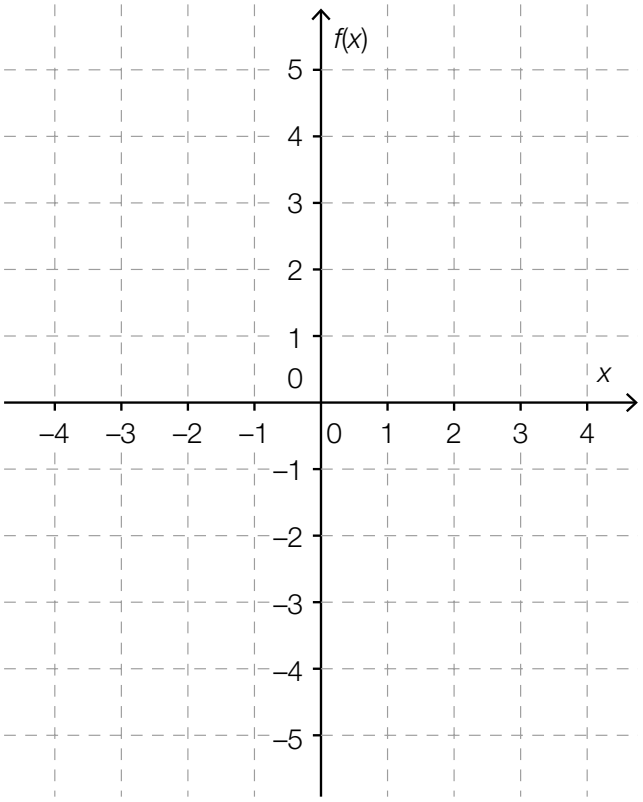
Gegeben ist die lineare Funktion f mit $f(x) = -2 \cdot x + 2$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion F der Funktion f an, für die $F(2) = 1$ gilt, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Ermitteln Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^3 f(x)\,dx$ und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise! Stellen Sie den Graphen der Funktion f im nachstehenden Koordinatensystem dar und erklären Sie, warum in diesem Fall der Wert des bestimmten Integrals nicht mit dem Inhalt derjenigen Fläche übereinstimmt, die im Intervall [0; 3] vom Graphen und von der x-Achse eingeschlossen wird!



Lösung zur Aufgabe 4

Integral

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Vorgehensweise:

Für alle Stammfunktionen gilt: $F(x) = -x^2 + 2 \cdot x + c$.
Wegen $F(2) = 1$ gilt: $-2^2 + 2 \cdot 2 + c = 1 \Rightarrow c = 1$.
Somit: $F(x) = -x^2 + 2 \cdot x + 1$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung von F angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

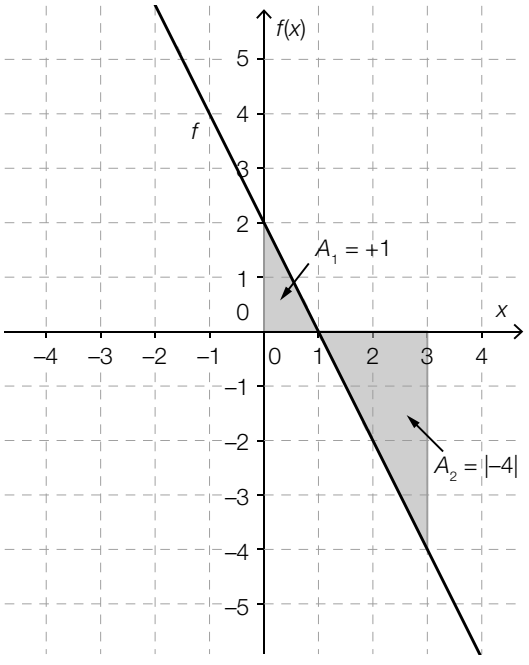
Lösungserwartung zur Leitfrage:

Es gilt:
$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 (-2 \cdot x + 2)\,dx = (-x^2 + 2 \cdot x)\Big|_0^3 = -3$ bzw. $F(3) - F(0) = -2 - 1 = -3$

Mögliche Erklärung: Bei der Berechnung von Flächeninhalten ist zu berücksichtigen, dass das Integral der Funktion bei denjenigen Flächenteilen, die unterhalb der x-Achse liegen, negativ ist. Daher muss die Berechnung unter Beachtung der Lage der Teilflächen stückweise erfolgen.

$\int_0^3 f(x)\,dx = 1 + (-4) = -3$

Flächeninhalt:
$A_1 + A_2 = 1 + |-4| = 5$



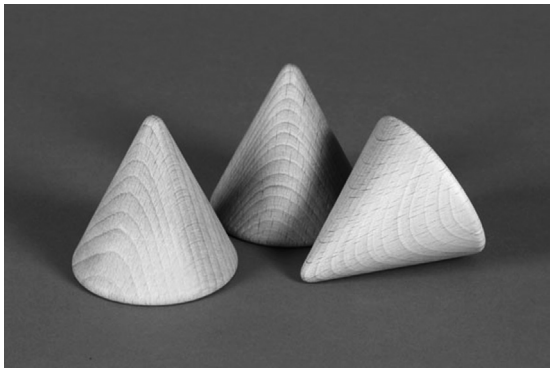
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert des Integrals korrekt ermittelt, eine korrekte Vorgehensweise angeführt, der Graph richtig dargestellt und eine (sinngemäß) korrekte Erklärung angegeben wird.

Aufgabe 5

Kegel

Ein Kegel, der geworfen wird, kann entweder auf der Mantelfläche oder auf der Grundfläche zu liegen kommen.



Bildquelle: http://www.holzbausteine.at/images/Spitzkegel60.jpg [28.04.2016].

Aufgabenstellung:

Das Werfen eines derartigen Kegels wird als Zufallsexperiment betrachtet. Der Kegel wird zuerst 50-mal geworfen. Dabei kommt er in 12 Fällen auf der Grundfläche zu liegen.

Felix gibt folgende Rechnung an:

$$\left(\frac{12}{50}\right)^2 = \frac{144}{2\,500} = 0{,}0576 = 5{,}76\ \%$$

Interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Zusammenhang!

Leitfrage:

Selin behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der der Kegel auf der Grundfläche zu liegen kommt, eigentlich gar nicht bekannt ist.

Geben Sie an, welches Argument sie zur Untermauerung ihrer Behauptung heranziehen kann und wie man das Zufallsexperiment verändern muss, um diese Wahrscheinlichkeit möglichst genau zu bestimmen!

Lösung zur Aufgabe 5

Kegel

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei zweimaligem Werfen des Kegels dieser bei beiden Würfen auf der Grundfläche zu liegen kommt, beträgt 5,76 % (unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Kegel auf der Grundfläche zu liegen kommt, $\frac{12}{50}$ beträgt).

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine (sinngemäß) korrekte Interpretation im gegebenen Zusammenhang angeführt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die relative Häufigkeit liefert nur einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit.
Wird ein Zufallsexperiment nur 50-mal durchgeführt, wird die Wahrscheinlichkeit durch die Angabe der relativen Häufigkeit nur sehr ungenau approximiert.
Man muss das Zufallsexperiment viel öfter durchführen, um einen genaueren Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit zu erhalten.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine der Lösungserwartung (sinngemäß) entsprechende Antwort gegeben wird.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 7
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Quadratische Gleichung

Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $x^2 + a \cdot x = 15$ mit $a \in \mathbb{R}$ angegeben.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie a so, dass $x_1 = -5$ eine der beiden Lösungen der Gleichung ist!

Bestimmen Sie weiters die zweite Lösung x_2 dieser Gleichung!

Leitfrage:

Geben Sie jeweils alle Werte für a an, sodass die Gleichung genau eine Lösung, keine Lösung bzw. zwei Lösungen hat, und begründen Sie jeweils die Wahl der Werte von a!

Lösung zur Aufgabe 1

Quadratische Gleichung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$(-5)^2 + a \cdot (-5) = 15 \Rightarrow a = 2$

$x^2 + 2 \cdot x = 15 \Rightarrow x_2 = 3$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn a und x_2 richtig bestimmt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Damit die angegebene Gleichung genau eine Lösung hat, muss die Diskriminante null sein:

$\frac{a^2}{4} + 15 = 0$

$a^2 = -60$

Die Gleichung $a^2 = -60$ hat in den reellen Zahlen keine Lösung, daher gibt es keine Werte für a, sodass die angegebene Gleichung genau eine Lösung hat!

Damit die angegebene Gleichung keine Lösung hat, muss gelten:

$a^2 < -60$

Es gibt keine reelle Zahl, die diese Ungleichung erfüllt. Daher gibt es keine Werte für a, sodass die angegebene Gleichung keine Lösung hat!

Damit die angegebene Gleichung zwei Lösungen hat, muss gelten:

$a^2 > -60$

Jede reelle Zahl erfüllt diese Ungleichung. Daher hat die angegebene Gleichung bei jedem Wert für a genau zwei Lösungen.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für alle drei Fälle die Werte von a richtig angegeben und (sinngemäß) richtig begründet werden.

Aufgabe 2

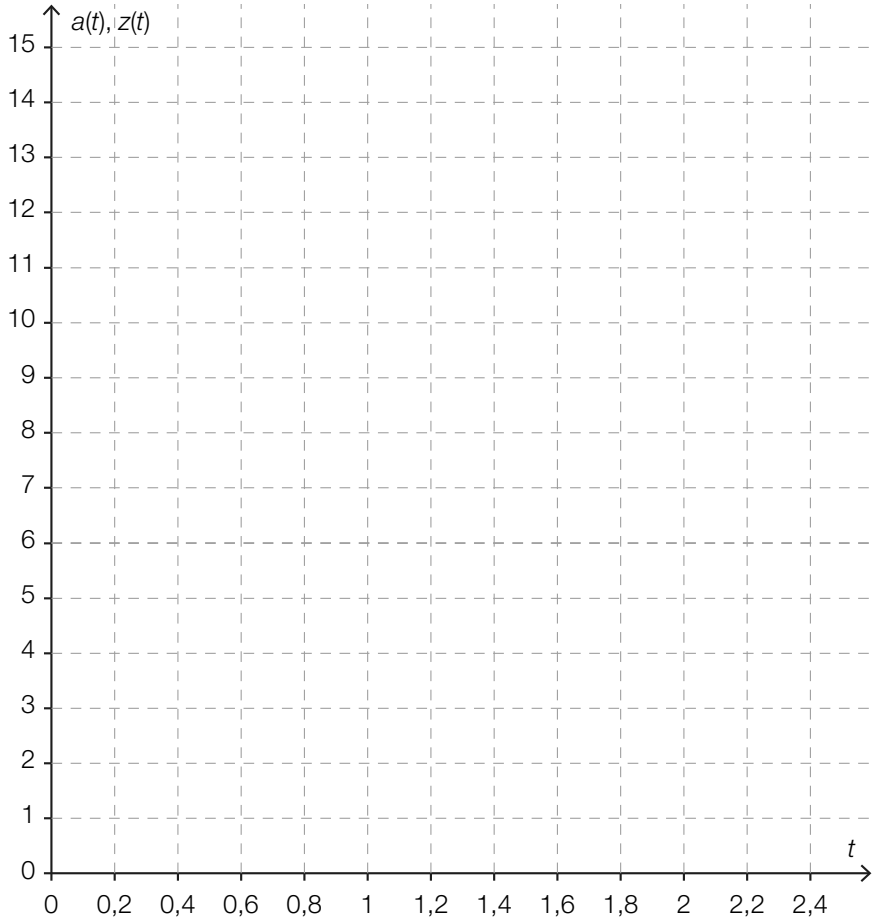
Zwischenspeicher

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden sich in einem Zwischenspeicher 1 000 m³ Wasser. Der Zwischenspeicher besitzt eine Zuleitung und einen Abfluss.

Die Zuflussrate z wird durch die Gleichung $z(t) = 3 \cdot t + 4$ beschrieben. Die Abflussrate a wird durch die Gleichung $a(t) = 2 \cdot t + 5$ beschrieben. Dabei werden $z(t)$ und $a(t)$ in m³/h und t in Stunden gemessen.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie im nachstehenden Koordinatensystem die Graphen der Funktionen z und a dar!



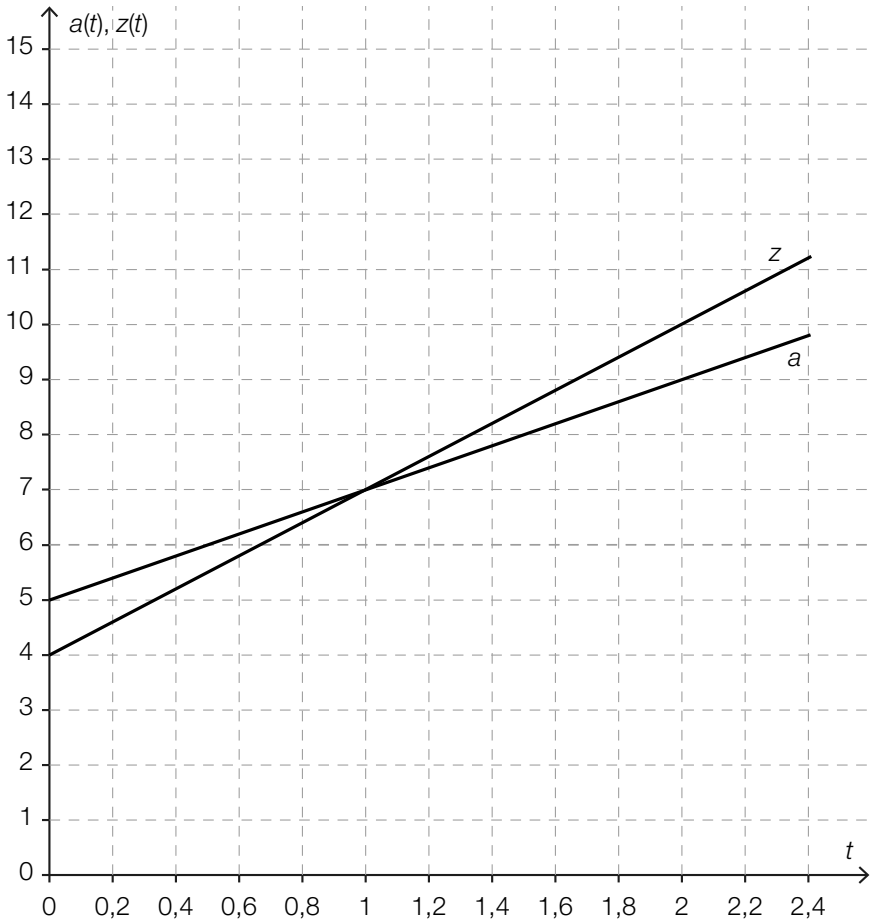
Leitfrage:

Ermitteln Sie die Gleichung derjenigen Funktion V, die zu jedem Zeitpunkt die Füllmenge des Zwischenspeichers angibt!

Lösung zur Aufgabe 2

Zwischenspeicher

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Graphen (die einander im Punkt (1|7) schneiden) korrekt dargestellt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Differenz von Zu- und Abflussrate ist $z(t) - a(t) = t - 1$.

$\Rightarrow\ V(t) = 1\,000 + \frac{t^2}{2} - t$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Funktionsgleichung von V korrekt ermittelt wird.

Aufgabe 3

Änderungsmaße

Wird ein bestimmter Körper senkrecht nach oben geworfen, so kann die Höhe des Körpers über dem Boden näherungsweise durch eine Funktion h mit der Gleichung $h(t) = -5 \cdot t^2 + 30 \cdot t + 2$ beschrieben werden. Dabei ist $h(t)$ die Höhe des Körpers über dem Boden in Metern (m) und t die Zeit in Sekunden (s), die nach dem Wurf vergangen ist.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die absolute und die relative (prozentuelle) Änderung der Funktion h im Zeitintervall [0 s; 2 s] und deuten Sie die Ergebnisse im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion h im Zeitintervall [0 s; 2 s] und deuten Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Bewegung des Körpers!

Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt t_0, zu dem die momentane Änderungsrate der Funktion h gleich der mittleren Änderungsrate im Zeitintervall [0 s; 2 s] ist, und deuten Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Bewegung des Körpers!

Lösung zur Aufgabe 3

Änderungsmaße

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$h(2) - h(0) = 42 - 2 = 40$
Die Höhe nimmt während der ersten beiden Sekunden um 40 m zu.

$\frac{h(2) - h(0)}{h(0)} = 20$

Mögliche Deutungen:

Die Höhe hat in den ersten beiden Sekunden um 2 000 % zugenommen.

oder:

In den ersten beiden Sekunden hat die Höhe um das 20-Fache zugenommen.

oder:

Nach zwei Sekunden ist die Höhe 21-mal so groß wie zu Beginn.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Änderungsmaße richtig angegeben und (sinngemäß) richtig gedeutet werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = 20$ m/s
Die mittlere Geschwindigkeit des Körpers in den ersten beiden Sekunden beträgt 20 m/s.

$h'(t) = -10 \cdot t + 30$
$h'(t_0) = 20 \Rightarrow -10 \cdot t_0 + 30 = 20 \Rightarrow t_0 = 1$
Die Momentangeschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt $t_0 = 1$ ist gleich der mittleren Geschwindigkeit des Körpers im Zeitintervall [0 s; 2 s].

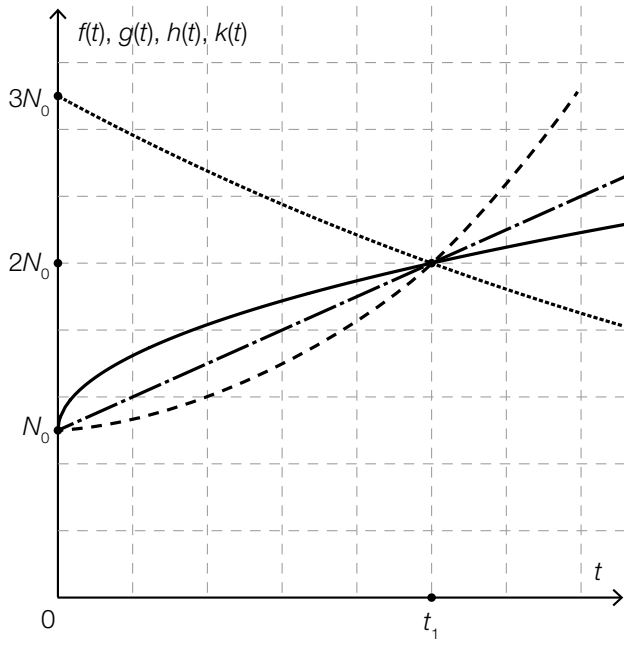
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die mittlere Änderungsrate richtig ermittelt und gedeutet wird. Weiters muss der Zeitpunkt t_0 korrekt bestimmt und eine (sinngemäß) korrekte Deutung angegeben werden.

Aufgabe 4

Funktionsgraphen

Nachstehend sind die Graphen von vier Funktionen f, g, h und k dargestellt.



Aufgabenstellung:

Für die vier Funktionen f, g, h und k gelten für alle $t \in (0; t_1)$ folgende Aussagen:

- $f''(t) = 0$ und $f'(t) > 0$
- $g''(t) > 0$ und $g'(t) > 0$
- $h''(t) < 0$ und $h'(t) > 0$
- $k''(t) > 0$ und $k'(t) < 0$

Beschriften Sie in der obigen Abbildung die Graphen korrekt mit f, g, h und k und begründen Sie Ihre Entscheidungen!

Leitfrage:

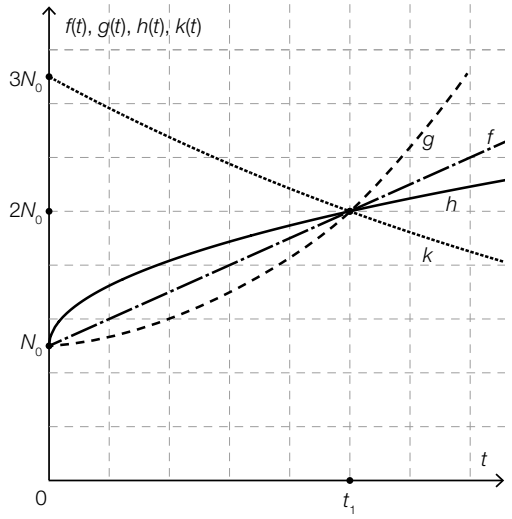
Ermitteln Sie unter Verwendung von N_0 und t_1 die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von t und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Geben Sie an, ob für die Funktion f die Aussage „Die Verdoppelungszeit ist konstant“ richtig oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösung zur Aufgabe 4

Funktionsgraphen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



$f''(t) = 0 \Rightarrow$ Der Graph der Funktion f hat die Krümmung null (ist eine Gerade).
$g''(t) > 0$ und $g'(t) > 0 \Rightarrow$ Der Graph der Funktion g ist linksgekrümmt (positiv gekrümmt) und streng monoton steigend.
$h''(t) < 0 \Rightarrow$ Der Graph der Funktion h ist rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt).
$k''(t) > 0$ und $k'(t) < 0 \Rightarrow$ Der Graph der Funktion k ist linksgekrümmt (positiv gekrümmt) und streng monoton fallend.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle Graphen richtig beschriftet werden und jeweils eine (sinngemäß) korrekte Begründung angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Funktion f ist eine lineare Funktion, deren Graph durch die Punkte $(0|N_0)$ und $(t_1|2N_0)$ verläuft.
Daher gilt: $f(t) = \frac{N_0}{t_1} \cdot t + N_0$.
Die Aussage „Die Verdoppelungszeit ist konstant“ ist falsch.

Mögliche Begründung:
Im Zeitintervall $[0; t_1]$ verdoppelt sich zwar der Funktionswert von N_0 auf $2N_0$, der Funktionswert im Zeitintervall $[t_1; 2t_1]$ steigt hingegen von $2N_0$ auf $3N_0$. Er verdoppelt sich also nicht.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Funktionsgleichung der Funktion f korrekt angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird. Weiters muss die Aussage als falsch erkannt und dies (sinngemäß) richtig begründet werden.

Aufgabe 5

Kugeln

In einer Urne befinden sich zehn schwarze und fünf weiße Kugeln.

Aufgabenstellung:

David entnimmt zuerst eine schwarze Kugel aus der Urne. Dann entnimmt er nach dem Zufallsprinzip eine weitere Kugel, ohne die erste Kugel zurückzulegen.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit P_1, dass auch die zweite entnommene Kugel schwarz ist, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leo entnimmt (wieder aus allen 15 Kugeln) nach dem Zufallsprinzip hintereinander ohne Zurücklegen zwei Kugeln aus der Urne.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit P_2, dass die zweite entnommene Kugel schwarz ist, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Für ein Zufallsexperiment wird zusätzlich zu der in der Einleitung erwähnten Urne eine zweite Urne verwendet, die zehn weiße und fünf schwarze Kugeln enthält.

David muss nach dem Zufallsprinzip eine der beiden Urnen auswählen und dann nach dem Zufallsprinzip aus der ausgewählten Urne zwei Kugeln entnehmen.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit P_3, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind!

Leo führt das gleiche Zufallsexperiment durch, darf aber die Kugeln anders auf die beiden Urnen verteilen, um die Wahrscheinlichkeit, zwei schwarze Kugeln (hintereinander und ohne Zurücklegen) zu entnehmen, zu erhöhen.
Er gibt dazu alle schwarzen Kugeln in die erste Urne und alle weißen Kugeln in die zweite Urne.

Überprüfen Sie rechnerisch, ob Leo dadurch bessere Chancen als David hat, zwei schwarze Kugeln zu entnehmen!

Lösung zur Aufgabe 5

Kugeln

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$P_1 = \frac{9}{14} \approx 0{,}643 = 64{,}3\ \%$

Mögliche Erläuterung:
Wenn man weiß, dass die erste entnommene Kugel schwarz ist, befinden sich unter den 14 verbleibenden Kugeln noch 9 schwarze Kugeln.

Die für Leo günstigen Versuchsausgänge sind: schwarz – schwarz bzw. weiß – schwarz.
Mögliche Berechnung:
$P_2 = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667 = 66{,}7\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Wahrscheinlichkeiten korrekt ermittelt und jeweils (sinngemäß) korrekte Vorgehensweisen erläutert werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$P_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{11}{42} \approx 0{,}2619 = 26{,}19\ \%$

Wahrscheinlichkeit, dass Leo bei seinem Zufallsexperiment zwei schwarze Kugeln entnimmt:
$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\ \%$

Leos Chancen, zwei schwarze Kugeln zu entnehmen, sind deutlich höher!

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit P_3 korrekt ermittelt wird und rechnerisch nachgewiesen wird, dass Leo bessere Chancen hat, zwei schwarze Kugeln zu entnehmen.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 8
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Zwei Türme

Auf einem waagrechten Platz stehen 100 m voneinander entfernt zwei senkrechte Türme. Der höhere Turm ist 80 m hoch, der niedrigere Turm ist 60 m hoch.

Je nach Einfallswinkel der Sonnenstrahlen sind die Schatten, die die beiden Türme werfen, unterschiedlich lang. Als Einfallswinkel der Sonnenstrahlen wird derjenige Winkel bezeichnet, den die Sonnenstrahlen mit der waagrechten Ebene einschließen.

Aufgabenstellung:

Zu einem bestimmten Zeitpunkt steht die Sonne so am Himmel, dass der Schatten, den der höhere Turm wirft, genau bis zum Fußpunkt des niedrigeren Turms reicht.

Geben Sie an, wie groß der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen in diesem Fall sein muss!

Leitfrage:

Man vergleicht die Länge des Schattens S_H des höheren Turms in der Ebene mit der Länge des Schattens S_N des niedrigeren Turms in der Ebene.

Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{S_H}{S_N}$ und zeigen Sie, dass dieses Verhältnis vom Einfallswinkel der Sonnenstrahlen unabhängig ist!

Lösung zur Aufgabe 1

Zwei Türme

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\tan(\alpha) = \frac{80}{100} = 0{,}8 \Rightarrow \alpha \approx 38{,}66°$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Winkel richtig angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$S_H = \frac{80}{\tan(\alpha)}$; $S_N = \frac{60}{\tan(\alpha)} \Rightarrow \frac{S_H}{S_N} = \frac{80}{60} = \frac{4}{3}$

Bei der Division $S_H : S_N$ fällt $\tan(\alpha)$ weg und somit ist $\frac{S_H}{S_N}$ vom Einfallswinkel unabhängig.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn das Verhältnis richtig berechnet und eine korrekte Erklärung angegeben wird.

Aufgabe 2

Formel

Gegeben ist die Formel $E = \frac{a \cdot b^2}{c} + d$ mit $a, b, d \in \mathbb{R}_0^+$ und $c \in \mathbb{R}^+$.

Diese Formel kann als Darstellung einer Funktion E in Abhängigkeit von einer der Variablen a, b, c oder d interpretiert werden, sofern die anderen drei Variablen mit Werten belegt und somit konstant sind.

Aufgabenstellung:

Bei der Funktion E_d mit $d \mapsto \frac{a \cdot b^2}{c} + d$ handelt es sich um eine lineare Funktion. Geben Sie für diese lineare Funktion die Steigung des Graphen und seinen Schnittpunkt S mit der senkrechten Achse an!

$k =$ _____

$S =$ (_____ | _____)

Leitfrage:

Für die Bearbeitung der nachstehenden Fragestellung gilt: $d = 0$.

E_a: $a \mapsto \frac{a \cdot b^2}{c}$
E_b: $b \mapsto \frac{a \cdot b^2}{c}$
E_c: $c \mapsto \frac{a \cdot b^2}{c}$

Geben Sie jeweils den Funktionstyp der reellen Funktionen E_a, E_b und E_c an und skizzieren Sie für jede dieser Funktionen einen möglichen Graphen!

Lösung zur Aufgabe 2

Formel

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$k = 1$ und $S = \left(0 \left| \frac{a \cdot b^2}{c} \right.\right)$

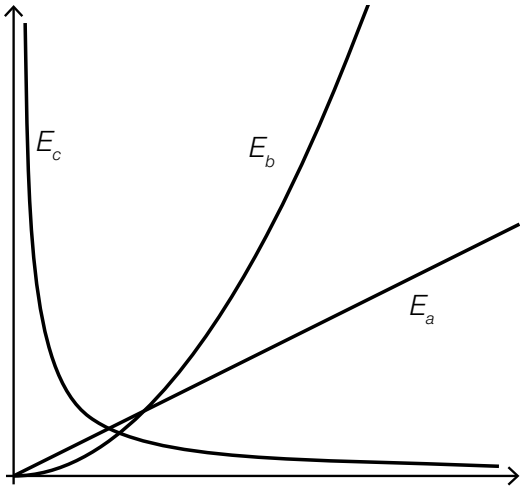
Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn k und S korrekt angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

E_a ist eine (homogene) lineare Funktion.
E_b ist eine Potenzfunktion der Form $f(x) = a \cdot x^z$ mit $z = 2$ (quadratische Funktion).
E_c ist eine Potenzfunktion der Form $f(x) = \frac{a}{x}$ (gebrochen rationale Funktion).

Mögliche Skizze:



Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle drei Funktionstypen korrekt angegeben und jeweils mögliche Graphen korrekt skizziert werden.
Die Graphen der Funktionen E_a und E_b müssen jedenfalls durch den Ursprung verlaufen und E_c darf keine Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen aufweisen.

Aufgabe 3

Exponentialfunktion

Von einer Exponentialfunktion f ist die nachstehende Wertetabelle gegeben:

x	0	1	3	5
$f(x)$		12	3	

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die beiden fehlenden Funktionswerte und geben Sie die Funktionsgleichung von f in der Form $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ an!

Leitfrage:

Zusätzlich zu der in der Aufgabenstellung angegebenen Form $f(x) = a \cdot b^x$ ist auch die Schreibweise $f(x) = c \cdot e^{d \cdot x}$ (mit $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ und $d \in \mathbb{R}, d \neq 0$) gebräuchlich.

Geben Sie an, wie die Parameter a, b, c, d der beiden (Darstellungs-)Formen zusammenhängen! Erklären Sie die Wirkung der Parameterwerte c und d auf die Monotonie der Funktion!

Lösung zur Aufgabe 3

Exponentialfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

x	0	1	3	5
$f(x)$	**24**	12	3	**0,75**

$f(x) = 24 \cdot 0{,}5^x$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Funktionswerte richtig ergänzt werden und eine korrekte Funktionsgleichung angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Es gelten folgende Zusammenhänge:
$a = c$
$b = e^d$ bzw. $d = \ln(b)$

Der Parameter c bestimmt den Schnittpunkt des Graphen mit der senkrechten Achse.
Da $c \in \mathbb{R}^+$ ist, gilt: Der Graph von f ist (streng) monoton steigend, falls $d > 0$ ist.
Der Graph von f ist (streng) monoton fallend, falls $d < 0$ ist.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Zusammenhänge zwischen den Parametern korrekt angegeben werden und die Wirkung der Parameter c und d der Lösungserwartung entsprechend erklärt wird.

Aufgabe 4

Zurückgelegter Weg

Ein Fahrzeug wird im Zeitintervall [0; 10] aus dem Stand gleichmäßig beschleunigt. Dabei beschreibt $v(t)$ die Geschwindigkeit des Fahrzeugs (in m/s) zum Zeitpunkt t (in s).

Aufgabenstellung:

Mit welchem der nachstehenden Terme kann die Länge des im Zeitintervall [0; 10] zurückgelegten Weges näherungsweise berechnet werden? Geben Sie denjenigen Term an, der am besten geeignet ist, und begründen Sie, warum die anderen beiden Terme nicht geeignet sind.

a) $v(0) \cdot 10$

b) $[v(0) + v(2) + v(4) + v(6) + v(8)] \cdot 2$

c) $[v(0) + v(1) + v(2) + ... + v(8) + v(9)] \cdot 10$

Leitfrage:

Geben Sie an, ob der im Zeitintervall [0; 10] vom Fahrzeug tatsächlich zurückgelegte Weg kleiner oder größer als der am besten geeignete Näherungswert aus der Aufgabenstellung ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Beschreiben Sie eine Vorgehensweise, mit der der Näherungswert für den zurückgelegten Weg verbessert werden kann, und geben Sie einen Ausdruck unter Verwendung von $v(t)$ zur Berechnung des exakten Wertes an!

Lösung zur Aufgabe 4

Zurückgelegter Weg

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Begründungen:

a) Der Term ist nicht geeignet, weil das Fahrzeug aus dem Stand beschleunigt wird, also $v(0) = 0$ gilt. Somit ist auch der Näherungswert für den zurückgelegten Weg gleich null.

b) Der Term ist geeignet, da das Zeitintervall [0; 10] in fünf Intervalle der Länge 2 unterteilt wird und die fünf Näherungswerte für den zurückgelegten Weg in diesen Intervallen aufsummiert werden.

c) Der Term ist nicht geeignet. Da das Zeitintervall [0; 10] in zehn Intervalle der Länge 1 unterteilt wird, müsste jeder Geschwindigkeitswert mit dem Faktor 1 (nicht 10) multipliziert werden, um die zurückgelegte Weglänge zu erhalten.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn für jeden Term richtig begründet wird, warum er für die näherungsweise Berechnung des zurückgelegten Weges geeignet bzw. nicht geeignet ist.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Der im Intervall [0; 10] zurückgelegte Weg ist größer als der durch Term b berechnete Näherungswert, da in allen Teilintervallen die Geschwindigkeit zu Beginn des Intervalls für die Berechnung der Weglänge verwendet wird. Da das Fahrzeug gleichmäßig beschleunigt wird, nimmt die Geschwindigkeit in jedem der fünf Teilintervalle zu. (Der gegebene Ausdruck entspricht somit der „Untersumme“.)

In je mehr (gleich lange) Teilintervalle das Intervall [0; 10] unterteilt wird, desto genauer wird der Näherungswert für den zurückgelegten Weg.
möglicher Ausdruck: $\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn (sinngemäß) korrekt begründet wird, warum der tatsächlich zurückgelegte Weg größer als der durch Term b berechnete Näherungswert ist. Weiters ist eine korrekte Vorgehensweise zur Verbesserung des Näherungswertes zu beschreiben und ein korrekter Ausdruck anzugeben.

Aufgabe 5

Therapieverfahren

Ein medizinisches Therapieverfahren ist im Durchschnitt in vier von fünf Fällen erfolgreich.
Zehn Patienten werden mit diesem Verfahren unabhängig voneinander behandelt.

Aufgabenstellung:

Geben Sie unter Verwendung der Binomialverteilung einen Term zur Berechnung derjenigen Wahrscheinlichkeit an, dass bei mindestens acht Patienten die Therapie erfolgreich ist, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Mit den nachstehenden Termen können Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen im gegebenen Kontext berechnet werden:

- $0{,}2^{10}$
- $\binom{10}{2} \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2$
- $1 - [0{,}8^9 \cdot 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}8^{10}]$

Formulieren Sie für jeden dieser Terme ein entsprechendes Ereignis!

Lösung zur Aufgabe 5

Therapieverfahren

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Wahrscheinlichkeit, dass die Therapie bei mindestens 8 Patienten erfolgreich ist:
P(„8 Erfolge“) + P(„9 Erfolge“) + P(„10 Erfolge“)

$0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 \cdot \binom{10}{8} + 0{,}8^9 \cdot 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}8^{10}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Term angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

- $0{,}2^{10}$
  Die Therapie ist bei keinem der 10 Patienten erfolgreich.
- $\binom{10}{2} \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2$
  Die Therapie ist bei genau 8 Patienten erfolgreich (bzw. bei genau 2 Patienten nicht erfolgreich).
- $1 - [0{,}8^9 \cdot 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}8^{10}]$
  Die Therapie ist bei höchstens 8 Patienten erfolgreich.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für jeden der drei Terme ein entsprechendes Ereignis formuliert wird.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2016

Mathematik

Kompensationsprüfung 9
Angabe für **Prüfer/innen**

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

öffentliches Dokument

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Geraden in $\mathbb{R}^3$

Gegeben sind zwei Geraden g und h in $\mathbb{R}^3$.

Die Gerade g verläuft durch den Punkt $P = (3|1|5)$ und ist parallel zur y-Achse.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Parameterdarstellung für g an!

Begründen Sie, warum es nicht möglich ist, die Koordinaten y_Q und z_Q eines Punktes $Q = (1|y_Q|z_Q)$ so zu bestimmen, dass der Punkt Q auf der Geraden g liegt!

Leitfrage:

Geben Sie einen Überblick über mögliche Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden in $\mathbb{R}^3$!

Die Gerade h wird durch die Parameterdarstellung $X = \begin{pmatrix} x_h \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ y_h \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $s, x_h, y_h \in \mathbb{R}$ beschrieben.

Ist es möglich, Zahlenwerte für x_h und y_h so zu bestimmen, dass die beiden Geraden g und h zueinander normal sind und einander im Punkt P schneiden?
Wenn nein, begründen Sie mithilfe von Rechnungen, warum dies nicht möglich ist!
Wenn ja, geben Sie die entsprechenden Werte von x_h und y_h an!

Lösung zur Aufgabe 1

Geraden in $\mathbb{R}^3$

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Parameterdarstellung:

$g: X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Mögliche Begründung:
Für alle Punkte auf der Geraden g gilt:
$x = 3$; $y = 1 + t$; $z = 5$ (mit $t \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow$ Ein Punkt mit $x = 1$ kann nicht auf der Geraden g liegen.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Parameterdarstellung von g angegeben und eine korrekte Begründung angeführt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Zwei Geraden in $\mathbb{R}^3$ können identisch, parallel, schneidend oder windschief sein.

Es ist möglich, Zahlenwerte für x_h und y_h so zu bestimmen, dass die beiden angeführten Bedingungen erfüllt sind:

$x_h = -1$ (ergibt sich aus dem Parameterwert $s = 2$)

$y_h = 0$ (ergibt sich aus $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$)

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle möglichen Lagebeziehungen genannt und die Werte von x_h und y_h korrekt angegeben werden.

Aufgabe 2

Quadratische Funktion

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = r \cdot x^2 + s$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ und $r \neq 0$.

Aufgabenstellung:

Erläutern Sie, welche Auswirkungen eine Veränderung der Werte der Parameter r und s auf den Verlauf des Graphen von f hat!

Leitfrage:

Der Graph der Funktion f verläuft durch die beiden Punkte $B = (a|b)$ und $E = (0|e)$ mit $a \neq 0$.

Geben Sie die Parameter r und s mithilfe der Koordinaten a, b, e der angegebenen Punkte an!

Geben Sie an, für welchen Wert von b die Funktion f keine quadratische Funktion ist!

Lösung zur Aufgabe 2

Quadratische Funktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Für $r > 0$ handelt es sich um eine nach oben offene Parabel, für $r < 0$ handelt es sich um eine nach unten offene Parabel. Je größer der Betrag von *r*, desto „steiler“ verläuft der Graph von *f*.

Eine Veränderung des Parameters *s* bewirkt eine Verschiebung der Parabel entlang der senkrechten Achse.

oder:

Der Scheitelpunkt der Parabel ist im Punkt $(0|s)$.

oder:

$(0|s)$ ist der Schnittpunkt des Graphen mit der senkrechten Achse.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Auswirkungen einer Veränderung der Werte der Parameter *r* und *s* auf den Verlauf des Graphen von *f* (sinngemäß) richtig erklärt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Da *B* und *E* auf dem Graphen von *f* liegen und *E* der Scheitelpunkt ist, gilt:

$s = e$

$b = r \cdot a^2 + e \Rightarrow r = \frac{b - e}{a^2}$

Für $b = e$ ist die Funktion *f* keine quadratische Funktion.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Parameter *r* und *s* richtig angegeben werden und korrekt angegeben wird, dass $b = e$ gelten muss, damit *f* keine quadratische Funktion ist.

Aufgabe 3

Federkraft

Wird eine Feder gedehnt, so ist die Kraft, die zur Dehnung der Feder aufgewendet werden muss, direkt proportional zur Ausdehnung. Die Funktion F beschreibt die aufzuwendende Kraft in Abhängigkeit von der Ausdehnung x.

Es gilt: $F(x) = k \cdot x$.

Dabei wird x in Metern (m) und $F(x)$ in Newton (N) angegeben. Die Konstante k wird als Federkonstante bezeichnet und gibt die „Härte“ einer Feder an.

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie einen möglichen Graphen von F und kennzeichnen Sie k in Ihrer Skizze!

Leitfrage:

Geben Sie einen Term in Abhängigkeit von k an, mit dem man diejenige Arbeit berechnen kann, die notwendig ist, um die Feder um die Länge x_0 zu dehnen!

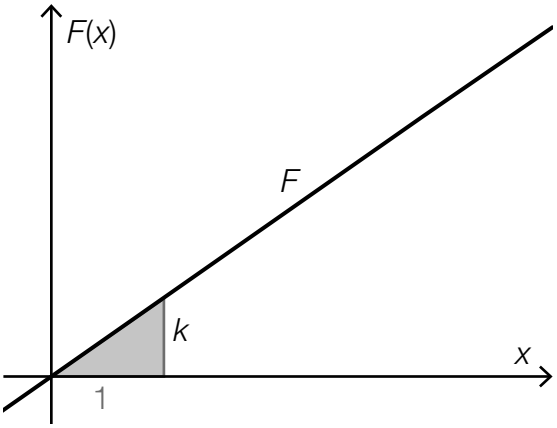
Geben Sie an, wie sich die Arbeit ändert, wenn die Feder um die Länge $2 \cdot x_0$ gedehnt wird!

Lösung zur Aufgabe 3

Federkraft

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Skizze:



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine entsprechende Skizze einer homogenen linearen Funktion vorliegt und *k* korrekt gekennzeichnet ist.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$W = \int_0^{x_0} k \cdot x \, \mathrm{d}x = \frac{k \cdot x_0^{\,2}}{2}$$

Im Fall der doppelten Ausdehnung gilt:
$$W = \int_0^{2x_0} k \cdot x \, \mathrm{d}x = \frac{k \cdot (2 \cdot x_0)^2}{2}$$

Die Arbeit wächst auf das Vierfache an.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein Term zur Berechnung der Arbeit korrekt angegeben und die Änderung der Arbeit korrekt beschrieben wird.
Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Aufgabe 4

Grenzkosten

Von einem Betrieb kennt man für die Herstellung eines Produkts die Kostenfunktion K mit $K(x) = 4 \cdot x^3 - 60 \cdot x^2 + 400 \cdot x + 1\,000$. Dabei gibt $K(x)$ die Produktionskosten in Geldeinheiten (GE) bei der Produktion von x Mengeneinheiten (ME) an.

Unter den Grenzkosten (in GE/ME) versteht man diejenigen Kosten, die durch eine Produktionssteigerung um 1 ME zusätzlich anfallen.

Aufgabenstellung:

Die näherungsweise Berechnung der Grenzkosten bei einer bestimmten Produktionsmenge x_0 erfolgt durch die erste Ableitung $K'(x_0)$.

Berechnen Sie mithilfe der Ableitung der Funktion K die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 15 ME!

Leitfrage:

Berechnen Sie, um wie viele GE sich der Wert der näherungsweise berechneten Grenzkosten bei einem Produktionsumfang von 15 ME vom tatsächlichen Zuwachs der Kosten unterscheidet, wenn der Produktionsumfang von 15 ME auf 16 ME erhöht wird!

Die Ableitungsfunktion K' ist ab $x = 5$ ME streng monoton steigend.
Geben Sie die Bedeutung dieser Aussage für die Produktionskosten an, wenn die Produktionsmenge zunimmt!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 4

Grenzkosten

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$K'(x) = 12 \cdot x^2 - 120 \cdot x + 400$
$K'(15) = 1\,300$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn $K'(15)$ korrekt ermittelt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$K'(15) = 1\,300$

$K(16) - K(15) = 8\,424 - 7\,000 = 1\,424$

Der Wert der näherungsweise berechneten Grenzkosten unterscheidet sich für $x_0 = 15$ ME vom tatsächlichen Zuwachs der Kosten bei 1 ME um 124 GE.

Diese Aussage bedeutet, dass der Kostenzuwachs ab der Produktionsmenge $x = 5$ progressiv ist (d. h., die Kosten steigen bei zunehmender Produktionsmenge immer stärker).

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Kostenunterschied korrekt ermittelt und die Bedeutung der Aussage (sinngemäß) korrekt angegeben wird.

Aufgabe 5

Diskrete Zufallsvariable

Für eine diskrete Zufallsvariable X liegt eine Tabelle vor, die alle möglichen Werte k dieser Zufallsvariable und die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten angibt. Der Parameter n ist eine natürliche Zahl mit $n \neq 0$.

k	1	4	7	10	15
$P(X = k)$	0,2	$\frac{2}{n}$	$\frac{6}{n}$	0,1	0,3

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Parameter n und den Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsvariablen X!
Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Die Standardabweichung σ hat bei der oben angegebenen Zufallsvariable den Wert $\sigma = 5{,}2$.

Verändern Sie die in der Tabelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ für mindestens zwei Werte von k so, dass die Standardabweichung kleiner wird und dabei immer noch eine gültige Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt! Die Werte der Zufallsvariablen (in der ersten Zeile der Tabelle) sollen aber unverändert bleiben.
Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 5

Diskrete Zufallsvariable

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 ergibt, folgt: $\frac{8}{n} = 0{,}4$. Daraus folgt: $n = 20$.

$E(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}1 + 15 \cdot 0{,}3 = 8{,}2$

Lösungsschlüssel:

Ein Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl n als auch $E(X)$ richtig bestimmt und die Vorgehensweise korrekt erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Vorgehensweise:
Die in der Tabelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten müssen für mindestens zwei Werte von k so verändert werden, dass die beiden Forderungen – kleinere Standardabweichung, gültige Wahrscheinlichkeitsverteilung, also Summe der Wahrscheinlichkeiten ist gleich 1 – jedenfalls erfüllt sind.
Eine sinnvolle Strategie ist, die Wahrscheinlichkeiten an den Rändern des Intervalls der möglichen Ergebnisse zu verkleinern und jene in der Mitte zu vergrößern.

Mögliches Beispiel:

k	1	4	7	10	15
$P(X = k)$	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Lösungsschlüssel:

Ein Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Strategie zur Verkleinerung der Standardabweichung und eine gültige Wahrscheinlichkeitsverteilung angegeben werden.
Eine Berechnung der neuen Standardabweichung muss dabei nicht erfolgen.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2016

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

öffentliches Dokument

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

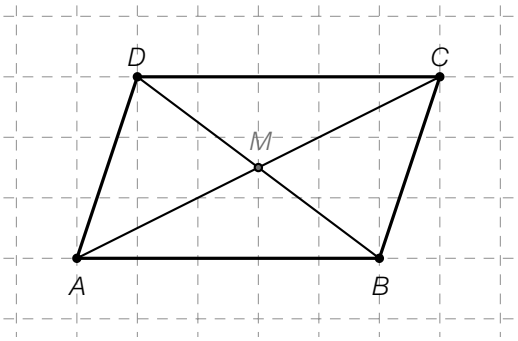
Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Vektoren

Die nachstehende Abbildung zeigt ein Parallelogramm *ABCD* mit dem Diagonalenschnittpunkt *M*.



Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch ist/sind!
Begründen Sie Ihre Antwort jeweils anhand der Abbildung!

I. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

II. $A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = C$

III. $\overrightarrow{AD} + 2 \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

Leitfrage:

In physikalischen Kontexten können Geschwindigkeiten mithilfe von Vektoren dargestellt werden. Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_1$ beschreibt die geradlinige Bewegung eines Objekts. Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_2$ beschreibt die geradlinige Bewegung eines zweiten Objekts.

Deuten Sie die nachstehend angeführten Zusammenhänge sowohl geometrisch als auch im Hinblick auf die Bewegung der Objekte!

I. $2 \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 0$

II. Die Länge des Vektors $\vec{v}_1$ ist halb so groß wie die des Vektors $\vec{v}_2$.

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 1

Vektoren

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

I. Die Gleichung ist falsch, da die beiden Vektoren keinen rechten Winkel einschließen.

II. Die Gleichung ist richtig, da ausgehend vom Punkt A die Addition der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ den Punkt C ergibt und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ gilt.

III. Die Gleichung ist richtig, da $2 \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DB}$ gilt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wahrheitsgehalt aller drei Aussagen richtig angegeben und (anhand der Abbildung veranschaulicht) erklärt/begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

I. Die beiden Vektoren sind parallel. $\vec{v}_2$ ist doppelt so lang wie $\vec{v}_1$ und hat die entgegengesetzte Orientierung.
Das bedeutet, dass sich das zweite Objekt doppelt so schnell wie das erste Objekt und entgegengesetzt orientiert bewegt.

II. $\vec{v}_2$ ist wieder doppelt so lang wie $\vec{v}_1$, allerdings kann im Gegensatz zur ersten Gleichung nichts über die Richtung der beiden Vektoren, d. h. über die Richtungen der Bewegungen, ausgesagt werden.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Zusammenhänge sowohl geometrisch als auch im gegebenen Kontext richtig gedeutet werden. Die geometrische Deutung kann auch anhand einer Skizze erfolgen.

Aufgabe 2

Sportaktivitäten

In einem Betrieb gibt es *a* Personen, die Sport betreiben, und *b* Personen, die das nicht tun. Die Anzahl der Frauen im Betrieb ist *c*. Von allen Personen im Betrieb, die Sport betreiben, sind *d* männlich.

Aufgabenstellung:

Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle durch entsprechende Terme mithilfe der gegebenen Variablen!

	Personen, die Sport betreiben	Personen, die keinen Sport betreiben
Männer	*d*	
Frauen		

Leitfrage:

Drei Personen des Betriebes werden zufällig ausgewählt. Stellen Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit auf, dass diese drei Personen keinen Sport betreiben, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 2

Sportaktivitäten

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

	Personen, die Sport betreiben	Personen, die keinen Sport betreiben
Männer	d	$b - (c - a + d)$
Frauen	$a - d$	$c - (a - d)$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Tabelle korrekt vervollständigt wird.
Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$\frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{b-2}{a+b-2}$$

Mögliche Erklärung der Vorgehensweise:
Die vorliegende Situation entspricht einem dreimaligen „Ziehen ohne Zurücklegen“.
Dadurch verringert sich bei jedem Zug sowohl die Anzahl der Personen, die keinen Sport betreiben (b), als auch die Anzahl der Personen insgesamt ($a + b$) jeweils um 1.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der gesuchte Term korrekt aufgestellt und die Vorgehensweise schlüssig erklärt wird.
Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Aufgabe 3

Zeit – Geschwindigkeit

Der Geschwindigkeitsverlauf eines PKW kann im Beobachtungszeitraum [0 s; 5 s] annähernd durch eine quadratische Funktion v mit $v(t) = b \cdot t^2 + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$ modelliert werden. Dabei wird t in Sekunden (s) und $v(t)$ in Metern pro Sekunde (m/s) angegeben.

Aufgabenstellung:

Zum Zeitpunkt $t = 3$ beträgt die Geschwindigkeit 13,6 m/s und zum Zeitpunkt $t = 5$ beträgt die Geschwindigkeit 20 m/s.

Ermitteln Sie die Gleichung der Geschwindigkeitsfunktion v für diesen Beobachtungszeitraum und deuten Sie den Wert des Parameters c im gegebenen Kontext!

$v(t) =$ _____

Leitfrage:

Bestimmen Sie die Länge des Wegstücks s, das der PKW (in diesem Beobachtungszeitraum) bis zum Erreichen einer Geschwindigkeit von $v = 15$ m/s zurücklegt, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 3

Zeit – Geschwindigkeit

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Aus $v(3) = 13{,}6$ und $v(5) = 20$ folgt:

$9 \cdot b + c = 13{,}6$
$25 \cdot b + c = 20 \Rightarrow b = 0{,}4;\ c = 10$

$v(t) = 0{,}4 \cdot t^2 + 10$

Der Wert des Parameters c gibt die Geschwindigkeit zu Beginn des Beobachtungszeitraums ($t = 0$) an.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung der Geschwindigkeitsfunktion v angegeben und der Wert des Parameters c (sinngemäß) korrekt gedeutet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$15 = 0{,}4 \cdot t^2 + 10 \Rightarrow t = \sqrt{12{,}5}$

$$s = \int_0^{\sqrt{12{,}5}} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{12{,}5}} (0{,}4 \cdot t^2 + 10)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{0{,}4 \cdot t^3}{3} + 10 \cdot t\right)\Big|_0^{\sqrt{12{,}5}}$$

$s \approx 41{,}25$ m

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Länge des Wegstücks korrekt ermittelt und die Vorgehensweise schlüssig erklärt wird.

Aufgabe 4

Funktionseigenschaften – Krümmung

Gegeben ist eine allgemeine Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$).

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, in welchem Intervall der Graph der Funktion f mit den Parametern $a = 1$, $b = -6$, $c = 0$ und $d = 1$ linksgekrümmt ist! Erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Ermitteln Sie die zweite Ableitung der allgemeinen Polynomfunktion f und lösen Sie dann die beiden folgenden Teilaufgaben!

Begründen Sie, warum die Krümmung des Graphen von f nicht von den Parametern c und d abhängt!
Begründen Sie, warum der Graph der Funktion f immer zwei verschiedene Krümmungsbereiche aufweist!

Lösung zur Aufgabe 4

Funktionseigenschaften – Krümmung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$
$f'(x) = 3x^2 - 12x$
$f''(x) = 6x - 12$

An der Wendestelle ändert der Funktionsgraph sein Krümmungsverhalten.
$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$
$f'''(2) = 6 \neq 0$
$\Big\}$ $x = 2$ ist die Wendestelle

Da z. B. $f''(3) = 6 > 0$ gilt, ist der Graph von f im Intervall $[2; \infty)$ linksgekrümmt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Bereich korrekt angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird. Die Angabe eines offenen oder halboffenen Intervalls bzw. einer Ungleichungskette ist ebenfalls als richtig zu werten.

Eine grafische Ermittlung des gesuchten Intervalls einschließlich der Argumentation, dass es nur einen Wendepunkt gibt, ist ebenfalls als richtig zu werten.
Der Nachweis $f'''(2) \neq 0$ muss nicht erbracht werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$f''(x) = 6a \cdot x + 2b$

Da die Krümmungsbereiche mithilfe der zweiten Ableitung ermittelt werden und in der Gleichung von f'' die Parameter c und d nicht vorkommen, ist die Krümmung von den Parametern c und d unabhängig.

Die Übergangsstelle zwischen den beiden Krümmungsbereichen ist die Wendestelle x_W. Da die Wendestelle als Nullstelle der linearen Funktion f'' ermittelt werden kann und diese für $a \neq 0$ jedenfalls existiert, gibt es zwei Krümmungsbereiche: Linkskrümmung, wenn $f''(x) > 0$ gilt, bzw. Rechtskrümmung, wenn $f''(x) < 0$ gilt.

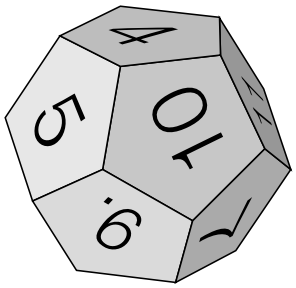
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die zweite Ableitung korrekt ermittelt wird und wenn die Unabhängigkeit der Krümmung von den Parametern c und d und die Existenz der beiden verschiedenen Krümmungsbereiche (sinngemäß) korrekt begründet werden.

Aufgabe 5

Dodekaeder

Ein Dodekaeder ist ein Körper mit 12 Flächen. Ein regelmäßiger Dodekaeder, dessen Flächen gleich groß sind und der mit den Zahlen von 1 bis 12 beschriftet ist, wird für Zufallsexperimente verwendet. Die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, ist dabei für alle Seitenflächen gleich groß.



Aufgabenstellung:

Jemand wirft diesen Dodekaeder einmal und möchte eine Zahl würfeln, die durch 3 teilbar ist. Geben Sie den Grundraum *G* und die entsprechende Ereignismenge *E* dieses Zufallsexperiments an!

G = _____

E = _____

Leitfrage:

Bei einem Spiel wird der Dodekaeder zweimal hintereinander geworfen. Der Spieler gewinnt, wenn die Summe der geworfenen Zahlen 6 ergibt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler gewinnt, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 5

Dodekaeder

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

G = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} *oder verbal:* die Zahlen von 1 bis 12

E = {3, 6, 9, 12} *oder verbal:* die Zahlen 3, 6, 9, 12

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl der Grundraum als auch die Ereignismenge verbal oder formal richtig angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Es gibt fünf günstige Versuchsausgänge: (1, 5) und (5, 1), (3, 3), (2, 4) und (4, 2).

Die Wahrscheinlichkeit beträgt demnach $5 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{144} \approx 0{,}03472 = 3{,}472\ \%$.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit korrekt angegeben und erklärt wird.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2016

Mathematik

Kompensationsprüfung 3
Angabe für **Prüfer/innen**

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

öffentliches Dokument

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Steigung

Die Steigung von Straßen wird in Prozent angegeben. Eine Steigung von p % bedeutet beispielsweise, dass auf einer waagrechten Strecke von 100 Metern die Höhe um p Meter zunimmt.

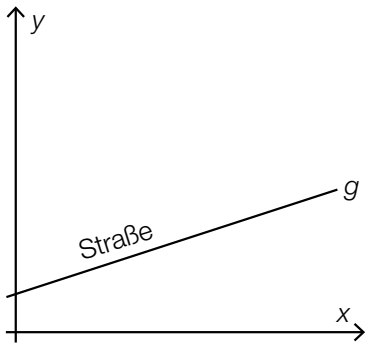
Jeder Steigung p (in %) entspricht ein bestimmter Steigungswinkel α.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel an, die den Zusammenhang zwischen α und p beschreibt!

Leitfrage:

Der geradlinige Verlauf einer ansteigenden Straße kann durch eine Gerade g mit der Parameterdarstellung g: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ veranschaulicht werden.



Ermitteln Sie den Steigungswinkel α und die Steigung p (in %) der Straße!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 1

Steigung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$p = 100 \cdot \tan(\alpha)$ oder $\tan(\alpha) = \frac{p}{100}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Zusammenhang zwischen α und p durch eine korrekte Formel beschrieben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\tan(\alpha) = \frac{1}{5} \Rightarrow \alpha \approx 11{,}31°$

$p = 100 \cdot \frac{1}{5} = 20\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Winkel α und die Steigung p (in %) korrekt angegeben werden.

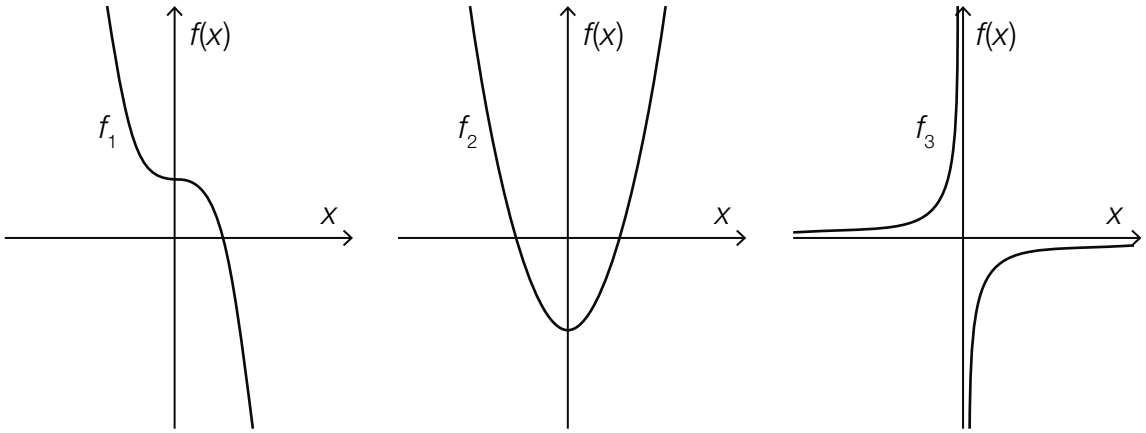
Aufgabe 2

Graphen von Potenzfunktionen

Gegeben sind drei Graphen von Potenzfunktionen mit $f(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie für jede der drei Funktionen f_1 bis f_3 einen möglichen Wert für den Exponenten z an! Geben Sie für jede Funktion an, ob der Parameter b negativ, positiv oder gleich null ist, und begründen Sie Ihre Antwort!



Leitfrage:

Geben Sie für Potenzfunktionen f mit $f(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a > 0$ an, für welche Werte des Parameters b und für welche Exponenten z folgende Sonderfälle auftreten:

- f beschreibt einen direkt proportionalen Zusammenhang.
- f beschreibt einen indirekt proportionalen Zusammenhang.

Erklären Sie außerdem die Begriffe *direkte Proportionalität* und *indirekte Proportionalität*!

Lösung zur Aufgabe 2

Graphen von Potenzfunktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

f_1: z ist eine ungerade natürliche Zahl größer als 1.
$b > 0$, da der Graph die positive senkrechte Achse schneidet.

f_2: z ist eine gerade natürliche Zahl größer als 0.
$b < 0$, da die Parabel die negative senkrechte Achse schneidet.

f_3: z ist eine ungerade negative Zahl.
$b = 0$, da sich der Graph asymptotisch der x-Achse nähert.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu vergeben, wenn für alle drei Funktionen ein richtiger Wert für den Exponenten z genannt wird und die Bedingungen für den Parameter b richtig angegeben und (sinngemäß) richtig begründet werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

- direkt proportionaler Zusammenhang, falls $b = 0$ und $z = 1$

  In diesem Fall beschreibt die Gleichung $f(x) = a \cdot x$ eine direkte Proportionalität, d. h., das Verhältnis von Funktionswert und Argument ist konstant. Eine Ver-k-fachung des Arguments führt zu einer Ver-k-fachung des Funktionswerts.

- indirekt proportionaler Zusammenhang, falls $b = 0$ und $z = -1$

  In diesem Fall beschreibt die Gleichung $f(x) = a \cdot x^{-1} = \frac{a}{x}$ eine indirekte Proportionalität, d. h., das Produkt aus Argument und Funktionswert ist konstant. Eine Ver-k-fachung des Arguments führt zu einer Teilung des Funktionswerts durch k.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für beide Fälle die Werte für b und z richtig angegeben und die Proportionalitäten richtig erklärt werden.
Die direkte und die indirekte Proportionalität dürfen auch anhand konkreter Zahlenbeispiele (z. B.: $k = 2$) erklärt werden.

Aufgabe 3

Preisänderung

In einem Geschäft wurde ein bestimmtes TV-Gerät zu Beginn des Jahres 2013 zu einem Preis von p_1 angeboten, zwei Jahre später zu einem Preis von p_2.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Bedeutung der Terme $p_2 - p_1$ und $\frac{p_2 - p_1}{p_1}$ an!

Leitfrage:

Erläutern Sie die Bedeutung des Terms $\frac{p_2 - p_1}{2}$ im gegebenen Kontext!

Für die Preise p_1 und p_2 gilt folgender Zusammenhang: $\frac{p_2}{p_1} = 0{,}8$.

Zeigen Sie, dass in diesem Fall $\frac{p_2 - p_1}{2} = -0{,}1 \cdot p_1$ gilt, und deuten Sie diese Gleichung im Hinblick auf die Preisänderung!

Lösung zur Aufgabe 3

Preisänderung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$p_2 - p_1$ ist die absolute Preisänderung im gegebenen Zeitraum.

$\frac{p_2 - p_1}{p_1}$ ist die relative (prozentuelle) Preisänderung im gegebenen Zeitraum.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Bedeutung beider Terme (sinngemäß) korrekt erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Der Term $\frac{p_2 - p_1}{2}$ gibt die mittlere Preisänderung pro Jahr im gegebenen Zeitraum an.

$\frac{p_2}{p_1} = 0{,}8 \Rightarrow p_2 = 0{,}8 \cdot p_1$

Durch Einsetzen in $\frac{p_2 - p_1}{2}$ folgt $\frac{0{,}8 \cdot p_1 - p_1}{2} = -0{,}1 \cdot p_1$.

Mögliche Deutungen:

Der Preis sinkt in diesem Zeitraum pro Jahr durchschnittlich um 10 % des Ausgangspreises.

Die durchschnittliche Preisabnahme beträgt in diesem Zeitraum $0{,}1 \cdot p_1$ pro Jahr.

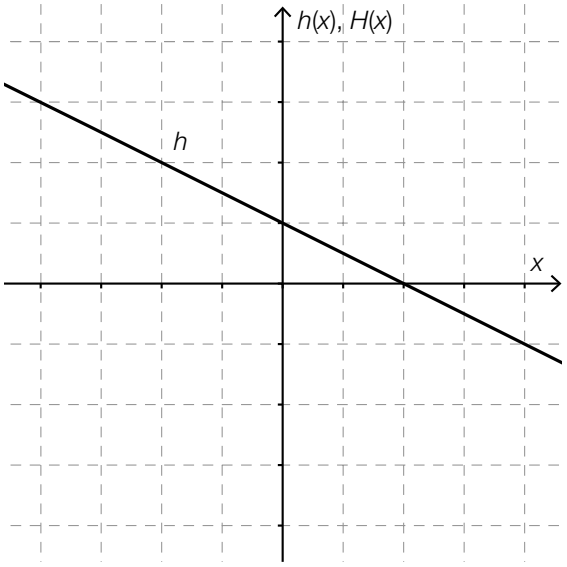
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Bedeutung des Terms $\frac{p_2 - p_1}{2}$ (sinngemäß) korrekt erläutert wird, die Gültigkeit der angegebenen Gleichung gezeigt wird und die Gleichung (sinngemäß) korrekt gedeutet wird.

Aufgabe 4

Stammfunktionen

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer linearen Funktion h.



Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in obiger Abbildung den Graphen einer Stammfunktion H von h und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Begründen Sie, warum es unendlich viele Stammfunktionen der dargestellten Funktion h gibt, und geben Sie an, worin sich die Graphen dieser Stammfunktionen unterscheiden!

Geben Sie mithilfe der Stammfunktion H einen (allgemeinen) Term zur Berechnung des Integrals $\int_{-10}^{0} h(x)\,\mathrm{d}x$ an!

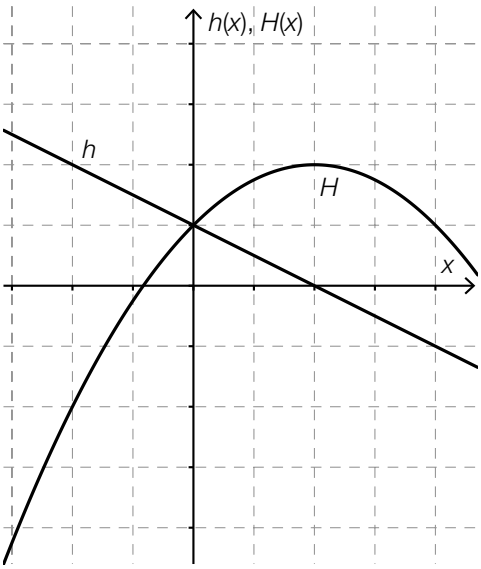
öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 4

Stammfunktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Da h eine lineare Funktion ist, muss H eine quadratische Funktion sein.
Der x-Wert des Scheitelpunktes von H muss mit der Nullstelle von h übereinstimmen.
Da h monoton fällt, muss der Graph von H vor dem Scheitelpunkt steigen und nach dem Scheitelpunkt fallen (bzw. eine negative Krümmung aufweisen).



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein möglicher Graph für H richtig skizziert wird und eine korrekte Vorgehensweise erklärt wird.
Der Funktionswert des Scheitelpunktes kann dabei beliebig gewählt werden, die Symmetrie der Parabel zur Geraden $x = 2$ muss erkennbar sein.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Wenn H eine Stammfunktion von h ist, so ist auch $H + c$ (mit $c \in \mathbb{R}$) eine Stammfunktion von h, da gilt: $(H + c)' = h$.

Die Funktionsterme der Stammfunktionen unterscheiden sich durch konstante Summanden, was eine vertikale Verschiebung der Graphen bewirkt.

$\int_{-10}^{0} h(x)\,dx = H(0) - H(-10)$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn (sinngemäß) richtig erklärt wird, warum es (unendlich viele) weitere Stammfunktionen von h gibt und worin sie sich unterscheiden.
Weiters müssen zumindest zwei Parabeln (qualitativ) richtig skizziert werden und es muss ein richtiger Term zur Berechnung des bestimmten Integrals angeschrieben werden.
Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Aufgabe 5

Blutgruppe B

Die relative Häufigkeit der Blutgruppe B in der österreichischen Bevölkerung wird mit p bezeichnet.

Aufgabenstellung:

Zehn Österreicher/innen werden zufällig ausgewählt. Die binomialverteilte Zufallsvariable H gibt die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B in dieser Zufallsstichprobe ($n = 10$) an.
Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit berechnet werden kann, dass von diesen zehn Personen höchstens eine Person Blutgruppe B hat, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B in einer Zufallsstichprobe der Größe $n = 500$ an.

Erklären Sie, was mit den nachstehenden Termen jeweils berechnet wird, und geben Sie an, welcher der beiden Terme den größeren Wert liefert!

- $P\left(500 \cdot p - 2 \cdot \sqrt{500 \cdot p \cdot (1-p)} \leq X \leq 500 \cdot p + 2 \cdot \sqrt{500 \cdot p \cdot (1-p)}\right)$
- $P(X \leq 500 \cdot p)$

Lösung zur Aufgabe 5

Blutgruppe B

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

„Höchstens eine Person“ bedeutet: keine oder eine Person.
Daher müssen die beiden Einzelwahrscheinlichkeiten addiert werden.

$(1 - p)^{10}$ ... Wahrscheinlichkeit, dass keine der 10 Personen die Blutgruppe B hat
$p \cdot (1 - p)^9 \cdot 10$ ... Wahrscheinlichkeit, dass genau eine der 10 Personen die Blutgruppe B hat
(dafür gibt es 10 Möglichkeiten)

$\Rightarrow \; P(H \leq 1) = (1 - p)^{10} + p \cdot (1 - p)^9 \cdot 10$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Term angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Der erste Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B in der Stichprobe um höchstens das Zweifache der Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht.
Der zweite Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B in der Stichprobe maximal dem Erwartungswert entspricht.

Der erste Term liefert den größeren Wert.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Terme (sinngemäß) richtig interpretiert werden und erkannt wird, dass der erste Term den größeren Wert liefert.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2016

Mathematik

Kompensationsprüfung 4
Angabe für **Prüfer/innen**

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

öffentliches Dokument

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Quadratische Gleichungen

Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 - 2 \cdot x + k = 0$ mit $k \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, für welche Werte von k die angegebene quadratische Gleichung

– keine
– genau eine
– zwei verschiedene

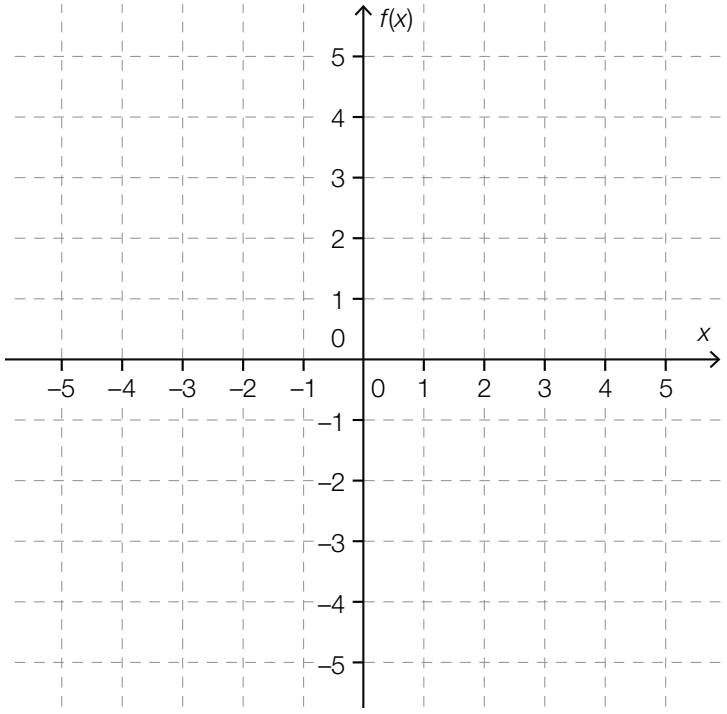
reelle Lösung(en) hat, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Die Lösungen der gegebenen quadratischen Gleichung können mithilfe des Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2 \cdot x + k$ veranschaulicht werden.

Stellen Sie den Graphen der Funktion f für $k = 1$ im nachstehenden Koordinatensystem dar und erläutern Sie, wie man aufgrund des Graphen von f auf die Anzahl der Lösungen der entsprechenden quadratischen Gleichung schließen kann!

Erläutern Sie, wie sich eine Änderung des Parameters k auf den Verlauf des Graphen der Funktion f und auf die Lösungen der entsprechenden quadratischen Gleichung auswirkt!



öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 1

Quadratische Gleichungen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-k}$

Die Anzahl der (reellen) Lösungen hängt vom Wert der Diskriminante ab.

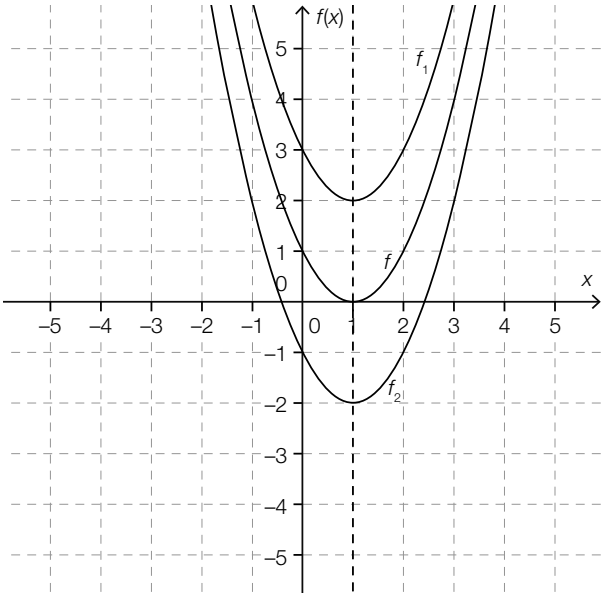
- keine Lösung, wenn $1 - k < 0 \Rightarrow k > 1$
- genau eine Lösung, wenn $1 - k = 0 \Rightarrow k = 1$
- zwei Lösungen, wenn $1 - k > 0 \Rightarrow k < 1$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Werte von k für die einzelnen Lösungsfälle angegeben werden und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Grafische Veranschaulichung: f stellt den Graphen der Funktion f für $k = 1$ dar, die Lösungen der entsprechenden quadratischen Gleichung sind die Nullstellen von f.



Für $k > 1$ erfolgt eine Verschiebung in Richtung der positiven senkrechten Achse, der dazugehörige Graph f_1 hat keine Nullstellen und die entsprechende quadratische Gleichung hat somit keine Lösung.

Für $k < 1$ erfolgt eine Verschiebung in Richtung der negativen senkrechten Achse, der dazugehörige Graph f_2 hat zwei Nullstellen und die entsprechende quadratische Gleichung hat somit zwei Lösungen.

Lösungsschlüssel:

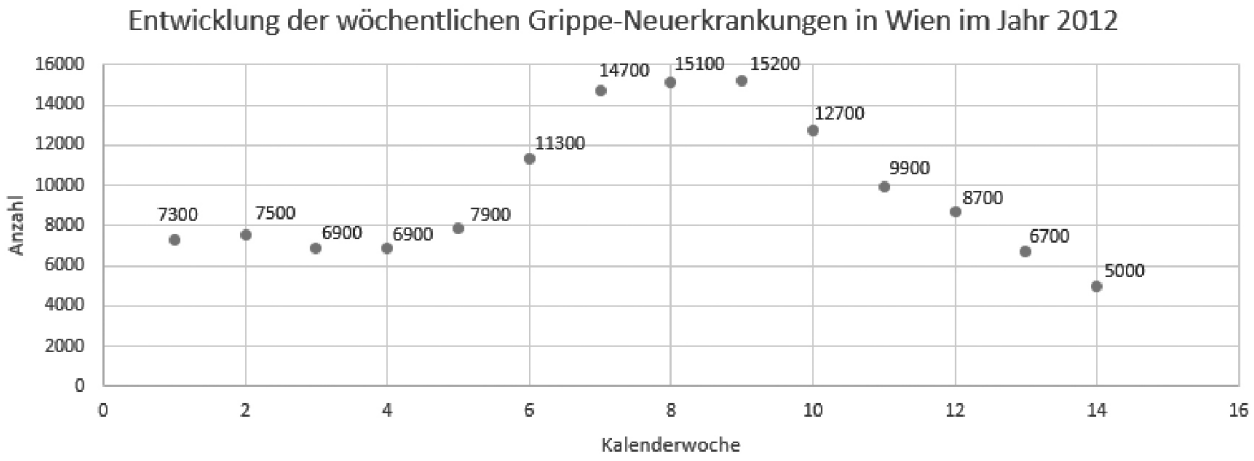
Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Graph der Funktion f für $k = 1$ richtig dargestellt wird, die Ermittlung der Lösungen der quadratischen Gleichung mithilfe der Nullstellen von f erkannt wird und die Auswirkungen der Änderung des Parameters k (sinngemäß) korrekt erläutert werden.

Der Graph von f muss als nach oben geöffnete Parabel, deren Extremstelle bei $x = 1$ liegt, erkennbar sein.

Aufgabe 2

Grippe

Die nachstehende Grafik beschreibt die Entwicklung der gemeldeten wöchentlichen Grippe-Neuerkrankungen in Wien im Jahr 2012 von der Kalenderwoche 1 bis zur Kalenderwoche 14.



(Datenquelle: https://www.wien.gv.at/gesundheit/einrichtungen/grippemeldedienst/archiv.html#saison1112 [13.05.2016])

Aufgabenstellung:

Anhand der Daten von Kalenderwoche 4 und Kalenderwoche 5 kann mithilfe eines exponentiellen Modells die Anzahl der Grippe-Neuerkrankungen für die Kalenderwoche 6 prognostiziert werden. Berechnen Sie, um wie viel dieser prognostizierte Wert vom in der Grafik angeführten tatsächlichen Wert abweicht!

Leitfrage:

Berechnen Sie, in welcher Kalenderwoche durch das soeben erstellte exponentielle Modell der in der Grafik angegebene Maximalwert erreicht worden wäre!
Erklären Sie, warum eine Modellierung mit einer Exponentialfunktion nur zeitlich begrenzt sinnvoll sein kann!

Lösung zur Aufgabe 2

Grippe

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Der Wachstumsfaktor beträgt $\frac{7\,900}{6\,900} \approx 1{,}145$.

Der prognostizierte Wert für die Kalenderwoche 6 liegt bei ca. 9 045 Grippe-Neuerkrankungen.

Der prognostizierte Wert weicht um ca. 2 255 vom tatsächlichen Wert ab.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Abweichung korrekt angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Vorgehensweise:

$15\,200 = 6\,900 \cdot \left(\frac{7\,900}{6\,900}\right)^t \Rightarrow t \approx 5{,}84$

In der Kalenderwoche 10 hätte das exponentielle Modell den in der Grafik angegebenen Maximalwert erreicht.

Eine Modellierung mithilfe einer Exponentialfunktion ist nur zeitlich begrenzt sinnvoll, da die Exponentialfunktion (streng) monoton wachsend ist und daher die Anzahl der Grippe-Neuerkrankungen im Laufe der Zeit irreal hohe Werte erreichen würde.

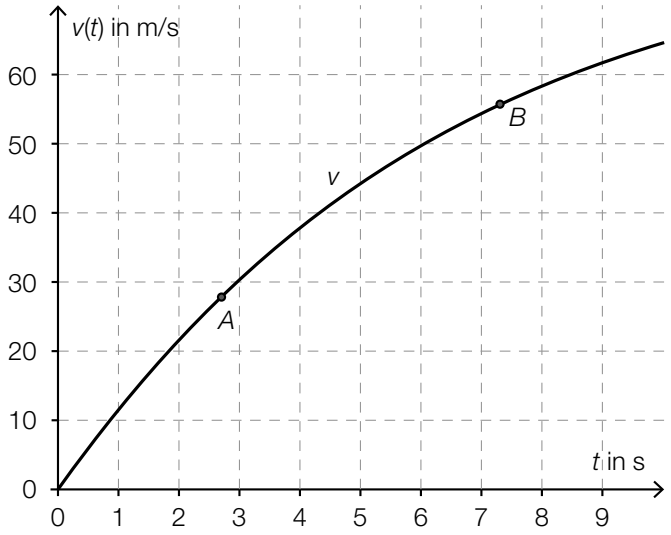
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Kalenderwoche korrekt ermittelt und eine (sinngemäß) richtige Erklärung angegeben wird.

Aufgabe 3

Beschleunigungsvorgang

Im nachstehenden Diagramm ist die Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/s) eines Rennautos während der Beschleunigungsphase in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) dargestellt. Weiters sind zwei Punkte $A = (2{,}7 \mid 27{,}78)$ und $B = (7{,}3 \mid 55{,}56)$ markiert.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Wert der Steigung derjenigen Sekante s, die durch die Punkte A und B verläuft, und deuten Sie diesen Wert im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Ermitteln Sie grafisch denjenigen Punkt T, in dem die Tangente dieselbe Steigung wie die Sekante s durch die Punkte A und B hat, und geben Sie die Koordinaten von T an!

Deuten Sie beide Koordinaten von T und den Wert der Steigung im gegebenen Kontext!

Lösung zur Aufgabe 3

Beschleunigungsvorgang

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$k = \frac{55{,}56 - 27{,}78}{7{,}3 - 2{,}7} \approx 6{,}04$

Mögliche Deutungen:
Die mittlere Beschleunigung (mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit) im Zeitintervall [2,7 s; 7,3 s] beträgt ca. 6 m/s^2.

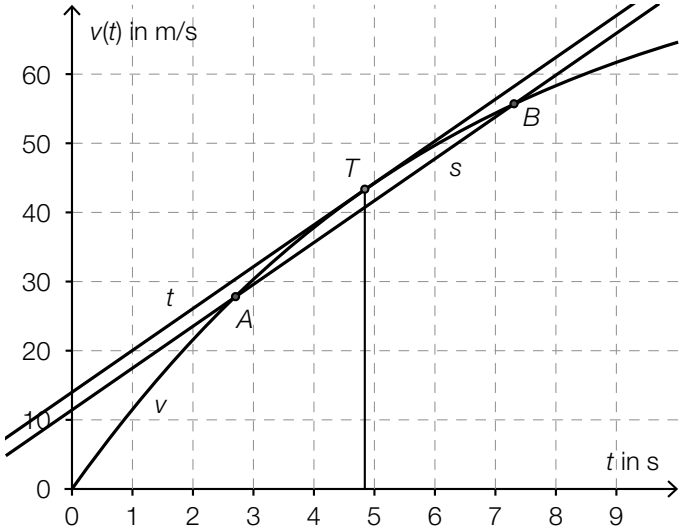
oder:

Die Geschwindigkeit des Rennautos nimmt im Zeitintervall [2,7 s; 7,3 s] in jeder Sekunde durchschnittlich um ca. 6 m/s zu.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert der Steigung korrekt ermittelt und (sinngemäß) korrekt gedeutet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:



$T \approx (4{,}8 \mid 43)$

Nach ca. 4,8 s hat das Rennauto eine Geschwindigkeit von ca. 43 m/s erreicht. Die momentane Beschleunigung beträgt zu diesem Zeitpunkt ca. 6 m/s^2.

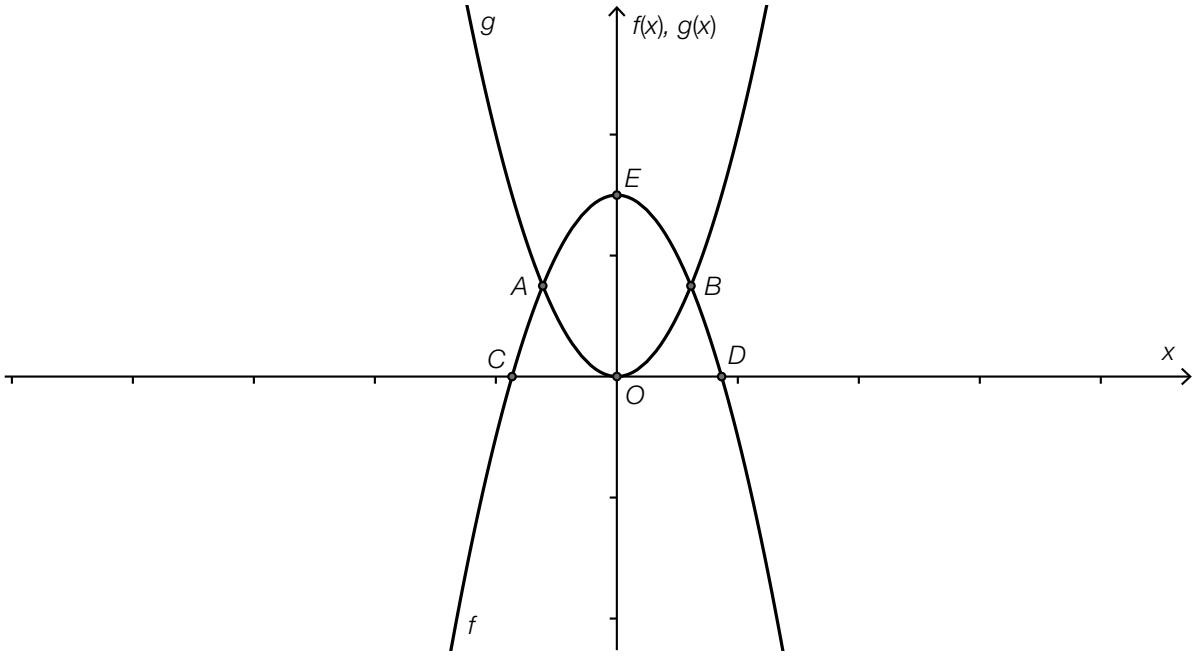
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Koordinaten des Punktes *T* korrekt angegeben werden und eine (sinngemäß) korrekte Deutung erfolgt.
Toleranzintervall für die Koordinaten von *T*: [4,0; 5,5] bzw. [38; 48]

Aufgabe 4

Flächenberechnung

Gegeben sind die Graphen von zwei quadratischen Funktionen *f* und *g*, die symmetrisch zur senkrechten Achse liegen:



Dabei gilt:

$B = (a|b)$
$D = (d|0)$
$O = (0|0)$
$E = (0|e)$ mit $a, b, d, e \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Die Graphen von *g* und *f* und die positive *x*-Achse begrenzen ein Flächenstück.

Geben Sie einen Term zur Berechnung der Größe dieses Flächenstücks an!

Leitfrage:

Skizzieren Sie den Graphen der Stammfunktion *F* der Funktion *f* mit $F(0) = 0$ in der gegebenen Abbildung!

Markieren Sie in der Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt gleich $F(d)$ ist!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 4

Flächenberechnung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

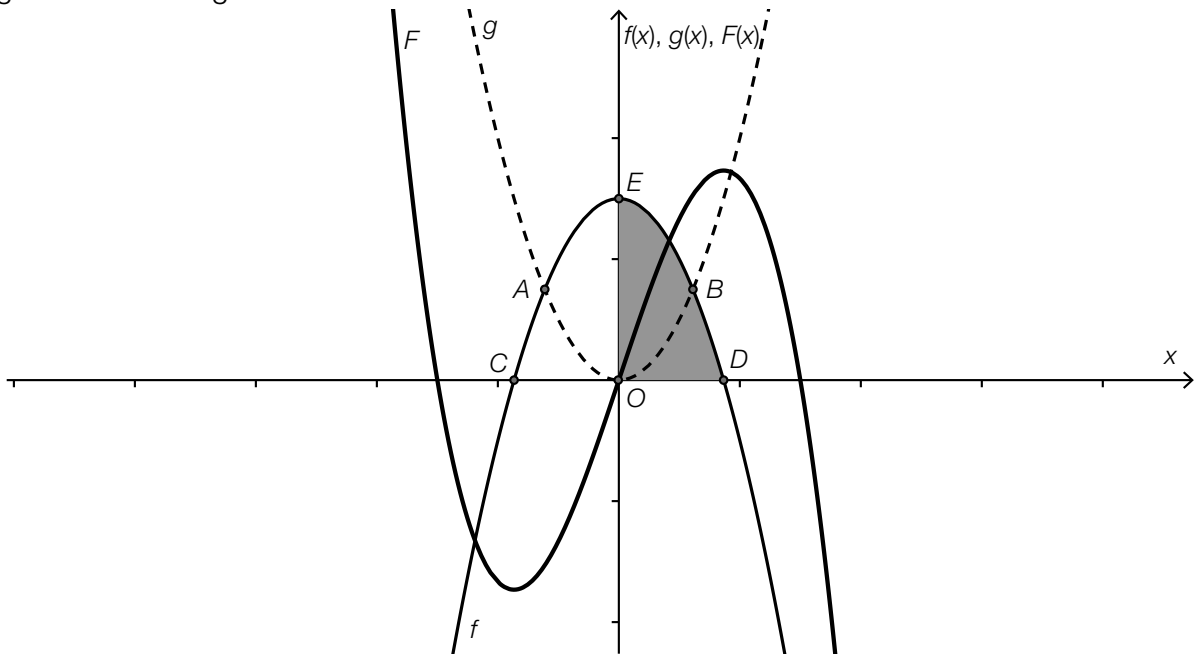
$\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Term angegeben wird. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Darstellung:



Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Graph von F richtig eingezeichnet (F muss als Polynomfunktion 3. Grades mit der Minimumstelle $x = -d$, der Maximumstelle $x = d$ und der Wendestelle $x = 0$ erkennbar sein) und eine entsprechende Fläche markiert wird.

Aufgabe 5

Datenliste

Gegeben ist eine geordnete Datenliste von zehn verschiedenen natürlichen Zahlen $x_1 < x_2 < ... < x_{10}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, ob sich das arithmetische Mittel, der Median und/oder die Spannweite der Datenliste verändern, wenn der kleinste Wert x_1 der Datenliste um 1 verringert wird, der größte Wert x_{10} der Datenliste um 1 vergrößert wird und die restlichen Werte der Datenliste unverändert bleiben!

Begründen Sie Ihre Entscheidungen und geben Sie gegebenenfalls diese Veränderungen an!

Leitfrage:

Angenommen, der ursprüngliche Wert x_1 wird nun um 5 vergrößert und der ursprüngliche Wert x_{10} wird um 5 verkleinert.

Welche der statistischen Kennzahlen *arithmetisches Mittel*, *Median*, *Modus*, *Standardabweichung* und *Spannweite* ändert/ändern sich

I mit Sicherheit
II je nach Datenliste
III keinesfalls?

Begründen Sie Ihre Antworten!

Lösung zur Aufgabe 5

Datenliste

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Das arithmetische Mittel bleibt gleich, da die Summe der zehn Werte unverändert bleibt.

Der Median bleibt gleich, da der 5. und der 6. Wert und somit auch deren arithmetisches Mittel unverändert bleiben.

Die Spannweite der Datenliste wird um 2 größer, da der Abstand vom kleinsten zum größten Wert um 2 größer wird.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn für alle drei Kennzahlen richtig angegeben und begründet wird, ob und wie sich diese ändern bzw. nicht ändern.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

I Die Spannweite und die Standardabweichung ändern sich mit Sicherheit (nehmen ab), da die neue Spannweite kleiner ist und die beiden geänderten Werte weniger weit vom arithmetischen Mittel abweichen als x_1 und x_{10}.
Auch die Modi ändern sich. Da die zehn gegebenen Werte unterschiedlich sind, ist jeder Wert Modus. Durch die Änderung der beiden Werte können folgende Werte auftreten:
– Es gibt weiterhin zehn verschiedene Modi, wobei sich die Liste der Modi geändert hat.
– Es gibt nur noch einen Modus oder genau zwei Modi.

II Ob sich der Median ändert, hängt von den konkreten Zahlenwerten ab.
Bei einer ursprünglichen Datenliste wie z. B. 1, 2, ... , 9, 10 bleibt der Median unverändert, bei einer ursprünglichen Datenliste wie z. B. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12 ändert er sich.

III Keinesfalls ändert sich das arithmetische Mittel, da die Summe der zehn Werte unverändert bleibt.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn richtig begründet wird, warum

I sich Spannweite, Standardabweichung und Modus (Modi) sicher verändern,
II die Änderung des Medians von der Datenliste abhängt,
III das arithmetische Mittel sicher gleich bleibt.

öffentliches Dokument

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Oktober 2015

Mathematik

Kompensationsprüfung
Angabe für **Prüfer/innen**

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

öffentliches Dokument

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Parallelogramm

Gegeben sind die Koordinaten der Eckpunkte A, B und C eines Parallelogramms $ABCD$.

$A = (-2|0)$

$B = (2|b)$ mit $b \in \mathbb{R}$

$C = (6|4)$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D dieses Parallelogramms in Abhängigkeit von b! Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Es gibt genau einen Wert für b, sodass das Viereck $ABCD$ ein entartetes Parallelogramm ergibt (das bedeutet, dass die Punkte A, B, C, D auf einer Geraden liegen). Ermitteln Sie diesen Wert für b und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 1

Parallelogramm

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$D = A + \overrightarrow{BC}$

$D = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 - b \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 - b \end{pmatrix}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Koordinaten von D korrekt angegeben werden und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Möglicher Lösungsweg:

Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und C:

$g: X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$

B soll auf g liegen:

$\begin{pmatrix} 2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

daher: $s = 0{,}5$ und $b = 2$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Parameter b korrekt bestimmt ist und die Vorgehensweise korrekt erläutert wird.

Aufgabe 2

Coulomb-Kraft

Zwischen zwei Ladungsmengen q_1 und q_2 (mit q_1, $q_2 > 0$), die sich im Abstand r befinden, wirkt die Coulomb-Kraft $F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$, wobei k eine positive Konstante ist.

Aufgabenstellung:

Begründen Sie, welche Auswirkungen es auf die Coulomb-Kraft F hat, wenn die in der Formel auftretenden Größen folgendermaßen verändert werden!

a) Beide Ladungsmengen und der Abstand werden halbiert.

b) Eine Ladungsmenge und der Abstand werden verdoppelt, die zweite Ladungsmenge bleibt unverändert.

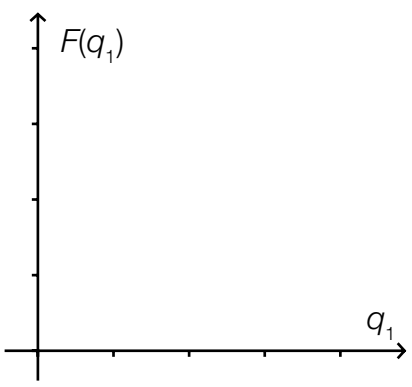
Leitfrage:

Skizzieren Sie in den nachstehenden Koordinatensystemen die Graphen folgender funktionaler Abhängigkeiten und erläutern Sie jeweils den Zusammenhang zwischen dem Verlauf des Graphen und den auftretenden Größen in der Funktionsgleichung!

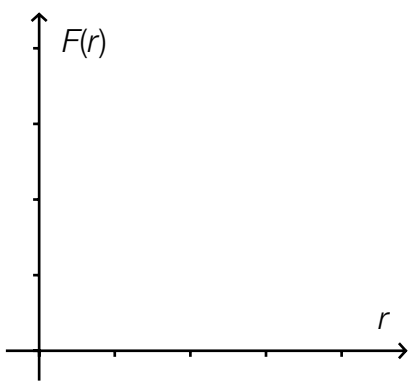
a) $F(q_1)$ bei konstantem q_2 und konstantem Abstand r

b) $F(r)$ bei konstanten Ladungsmengen

a)



b)



Lösung zur Aufgabe 2

Coulomb-Kraft

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

a) F bleibt unverändert, da $\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$.

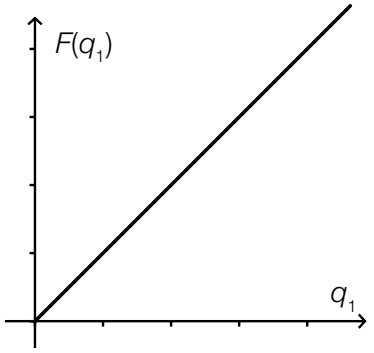
b) F wird halbiert, da $\frac{1\cdot 2}{2^2} = \frac{1}{2}$.

Lösungsschlüssel:

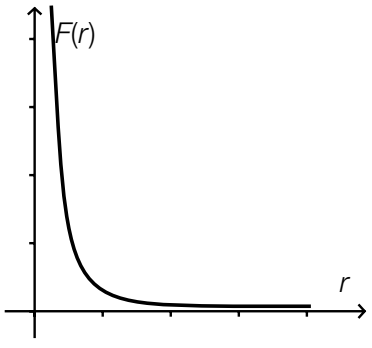
Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die jeweiligen Auswirkungen auf F für beide Veränderungen (a und b) korrekt angeführt und begründet werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

a) F ist direkt proportional zu q_1 (lineare Funktion durch den Koordinatenursprung).



b) F ist indirekt proportional zu r^2.



Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für beide funktionalen Abhängigkeiten die Graphen richtig skizziert werden und der jeweilige Zusammenhang zwischen dem Verlauf des Graphen und den auftretenden Größen in der Funktionsgleichung korrekt erläutert wird.

Aufgabe 3

Senkrechter Wurf

Ein Körper wird aus einer Anfangshöhe h_0 mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen. Die durch die Erdanziehungskraft verursachte Beschleunigung wird mit g bezeichnet.
Die Wurfhöhe des Körpers zu einem beliebigen Zeitpunkt t kann in diesem Fall durch eine Polynomfunktion h mit $h(t) = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ näherungsweise beschrieben werden. Dabei wird t in Sekunden und $h(t)$ in Metern angegeben.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die nachstehenden Ausdrücke im Hinblick auf die Bewegung des Körpers!

a) $\frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (t_2 > t_1)$

b) $h'(t_2)$

c) $h''(t_2)$

Leitfrage:

Geben Sie an, unter welcher Voraussetzung $h'(t_2) \approx \frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1}$ für $t_2 > t_1$ gilt!

Die Gleichung $h'(t) = 0$ hat die Lösung t^*. Geben Sie diese Lösung in Abhängigkeit von den Parametern der Funktion h an!

Deuten Sie die Lösung t^* und den Ausdruck $h(t^*)$ im gegebenen Zusammenhang!

Lösung zur Aufgabe 3

Senkrechter Wurf

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

a) die mittlere Geschwindigkeit des Körpers im Zeitintervall $[t_1; t_2]$

b) die Momentangeschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt t_2

c) die momentane Beschleunigung des Körpers zum Zeitpunkt t_2 (beträgt in diesem Fall $-g$)

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle drei Ausdrücke (sinngemäß) richtig interpretiert werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Momentangeschwindigkeit (momentane Änderungsrate) zum Zeitpunkt t_2 stimmt mit der mittleren Geschwindigkeit (mittlere Änderungsrate) im Intervall $[t_1; t_2]$ annähernd überein, wenn $t_1 \approx t_2$ gilt.

$$h'(t) = v_0 - g \cdot t \;\Rightarrow\; h'(t^*) = 0 \;\Rightarrow\; v_0 - g \cdot t^* = 0 \;\Rightarrow\; t^* = \frac{v_0}{g}$$

Zum Zeitpunkt t^* erreicht der Körper seine maximale Höhe (die Momentangeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt ist null).
$h(t^*)$ ist die maximale Höhe, die der Körper erreicht.

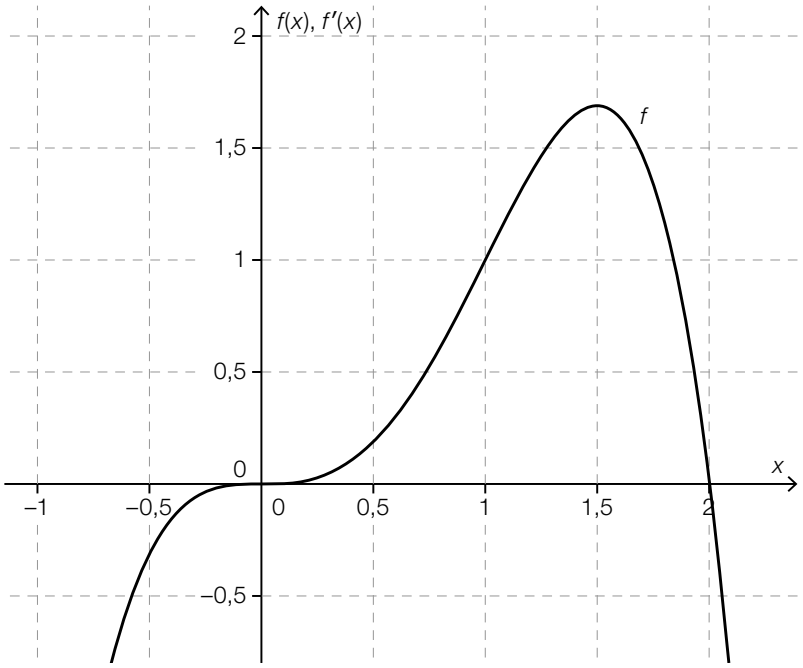
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Voraussetzung für die ungefähre Gleichheit der momentanen und der mittleren Änderungsrate genannt sowie t^* richtig berechnet wird und die Lösung t^* sowie der Ausdruck $h(t^*)$ (sinngemäß) richtig gedeutet werden.

Aufgabe 4

Polynomfunktion

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion f dargestellt.



Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Ableitungsfunktion f' von f! Achten Sie dabei besonders darauf, die Nullstellen von f' korrekt einzuzeichnen und das Monotonieverhalten von f' korrekt darzustellen!

Leitfrage:

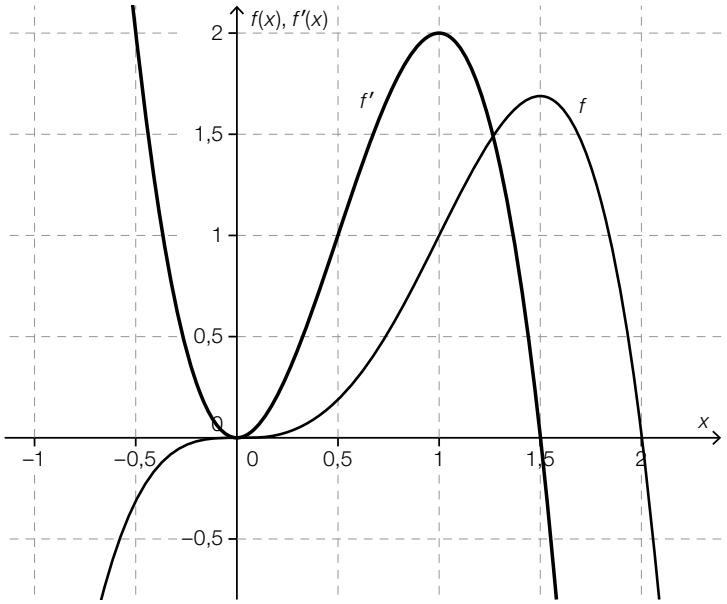
Begründen Sie, warum die Polynomfunktion f mindestens vom Grad 4 sein muss!

Eine Funktionsgleichung der Polynomfunktion f vom Grad 4 lautet allgemein:
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.
Begründen Sie, warum für die in der Abbildung dargestellte Polynomfunktion $c = d = e = 0$ gilt!

Lösung zur Aufgabe 4

Polynomfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Nullstellen von f' an den Stellen 0 und 1,5 eingezeichnet werden. Weiters muss die Funktion f' für $x < 0$ fallend, für $0 < x < 1$ steigend und für $x > 1$ fallend sein.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Polynomfunktion f hat mindestens zwei Wendestellen, daher muss der Grad von f mindestens 4 sein.

$e = 0$, weil der Graph von f durch den Punkt $(0|0)$ verläuft.

$d = 0$ und $c = 0$, weil f an der Stelle $x = 0$ eine Wendestelle mit waagrechter Tangente hat, daher sind $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$.

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$, daher $f'(0) = d = 0$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$, daher $f''(0) = 2c = 0$, daher $c = 0$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine (sinngemäß) korrekte Begründung für den Grad der Funktion f und für $c = d = e = 0$ angegeben wird.

Aufgabe 5

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Auf vier Seitenflächen eines „fairen“ sechsseitigen Würfels ist die Zahl 1 abgebildet, auf zwei Seitenflächen die Zahl 2. Ein Würfel ist „fair“, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.

Bei einem Zufallsversuch wird der Würfel zweimal geworfen. Als Ergebnis jedes einzelnen Wurfes gilt diejenige Zahl, die auf der nach oben zeigenden Seitenfläche abgebildet ist.
Die Zufallsvariable X beschreibt das Produkt der bei den beiden Würfen eintretenden Ergebnisse, also das Produkt der beiden gewürfelten Zahlen.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche Werte die Zufallsvariable X annehmen kann, und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X an!
Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Der beschriebene, aus jeweils zwei Würfen bestehende Zufallsversuch wird fünfmal ausgeführt.
Die Zufallsvariable Y beschreibt, wie oft dabei das Produkt der beiden gewürfelten Zahlen den Wert 1 ergibt.
Erläutern Sie, warum Y als binomialverteilte Zufallsvariable angenommen werden kann, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 2)$!

Lösung zur Aufgabe 5

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

X kann die Werte 1, 2 und 4 annehmen.

Da für die Wahrscheinlichkeiten, dass die Zahl 1oder 2 nach dem Wurf nach oben zeigt, die Werte $P(1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ und $P(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ gelten, ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x_i	$P(X = x_i)$
1	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
2	$2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$
4	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle Werte, die die Zufallsvariable annehmen kann, sowie die Wahrscheinlichkeitsverteilung korrekt angegeben werden und die Vorgehensweise korrekt erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Es handelt sich um eine Binomialverteilung, weil

- pro Versuch zwischen zwei möglichen Ergebnissen (das Produkt der gewürfelten Zahlen ist 1 oder nicht 1) unterschieden wird,
- die Versuche voneinander unabhängig sind und die Wahrscheinlichkeit für ein Produkt vom Wert 1 über alle Versuche hinweg als konstant angenommen werden kann.

Mit $n = 5$, $p = \frac{4}{9}$ und $k = 2$ ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:
$P(Y = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^3 \approx 0{,}339$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Bedingungen für das Vorliegen einer Binomialverteilung (sinngemäß) korrekt angegeben werden und die gesuchte Wahrscheinlichkeit korrekt angegeben wird. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,33; 0,34]

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2015

Mathematik

Kompensationsprüfung
Angabe für **Prüfer/innen**

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

öffentliches Dokument

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

öffentliches Dokument

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

öffentliches Dokument

Aufgabe 1

Archäologie

In der Archäologie gibt es eine empirische Formel, um von der Länge eines entdeckten Oberschenkelknochens auf die Körpergröße der zugehörigen Person schließen zu können.

Für Männer gilt näherungsweise:

$h = 48{,}8 + 2{,}63 \cdot l$

Dabei beschreibt l die Länge des Oberschenkelknochens und h die Körpergröße. Beides wird in Zentimetern (cm) angegeben.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Körpergröße eines Mannes, dessen Oberschenkelknochen eine Länge von 50 cm aufweist!

Besteht zwischen den Größen l und h eine direkte Proportionalität? Begründen Sie Ihre Antwort!

Leitfrage:

Für Frauen gilt eine analoge Formel:

$h = a + b \cdot l$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

Eine Frau mit einer Körpergröße von 163,4 cm hat eine Oberschenkelknochenlänge von 45 cm.
Bei einer Frau mit einer Körpergröße von 170,6 cm ist der Oberschenkelknochen um 3 cm länger.

Bestimmen Sie aufgrund dieser Daten die Belegung der Parameter a und b!

Deuten Sie den Wert von b in der angegebenen Formel!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 1

Archäologie

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

h = 180,3 cm

Zwischen l und h besteht keine direkte Proportionalität, da bei einer Verdoppelung, Verdreifachung, … von l der Wert von h nicht verdoppelt, verdreifacht, … wird.
Das Verhältnis der Größen h und l ist nicht konstant.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl der Wert von h als auch eine (sinngemäß) korrekte Begründung angegeben werden.
Toleranzintervall für h: [180 cm; 181 cm]

Lösungserwartung zur Leitfrage:

a = 55,4 cm
b = 2,4 (b ist dimensionslos; dies muss aber nicht erkannt werden)

b ist die Steigung der Funktion, die die Körpergröße in Abhängigkeit von der Länge des Oberschenkelknochens angibt.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden Parameter a und b richtig berechnet werden und die Deutung des Wertes b (sinngemäß) der Lösungserwartung entspricht.
Toleranzintervall für a: [55 cm; 56 cm]
Toleranzintervall für b: [2,3; 2,6]

öffentliches Dokument

Aufgabe 2

Lagebeziehungen von Geraden im Raum

Gegeben sind zwei Geraden g und h in $\mathbb{R}^3$.

Die Gerade g ist durch eine Parameterdarstellung $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ festgelegt.

Die Gerade h verläuft durch die Punkte $A = (0|8|0)$ und $B = (-2|28|6)$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes dieser beiden Geraden und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Erläutern Sie, welche weiteren Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden a und b in $\mathbb{R}^3$ mit den Parameterdarstellungen $a: X = P + r \cdot \vec{a}$ und $b: X = Q + s \cdot \vec{b}$ (mit $r, s \in \mathbb{R}$) auftreten können! Geben Sie für jeden dieser Fälle an, welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit diese Lagebeziehung auftritt!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 2

Lagebeziehungen von Geraden im Raum

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Berechnung:

$$h: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{I:}\ \ 3 + t = -2s \\ \text{II:}\ -4 - t = 8 + 20s \\ \text{III:}\ -7 - 2t = 6s \end{array}\right\} \Rightarrow\ t = -2\ \text{ bzw. }\ s = -0{,}5\ \Rightarrow\ S = (1\,|{-2}|{-3})$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Koordinaten des Schnittpunktes richtig ermittelt werden und die Vorgehensweise schlüssig erklärt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Zwei Geraden a und b in $\mathbb{R}^3$ können außer schneidend auch zueinander parallel, ident oder windschief sein.

- a und b sind parallel, wenn gilt: $\vec{a} \parallel \vec{b}$ und $P \notin b$ bzw. $Q \notin a$.
- a und b sind ident, wenn gilt: $\vec{a} \parallel \vec{b}$ und $P \in b$ bzw. $Q \in a$ oder $\overrightarrow{PQ} \parallel \vec{a} \parallel \vec{b}$.
- a und b sind windschief, wenn gilt: $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ und $a \cap b = \{\}$, d. h. $\nexists\ (r; s)$, sodass $P + r \cdot \vec{a} = Q + s \cdot \vec{b}$ gilt.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die drei weiteren Lagebeziehungen genannt und der Lösungserwartung (sinngemäß) entsprechende Voraussetzungen angegeben werden.

öffentliches Dokument

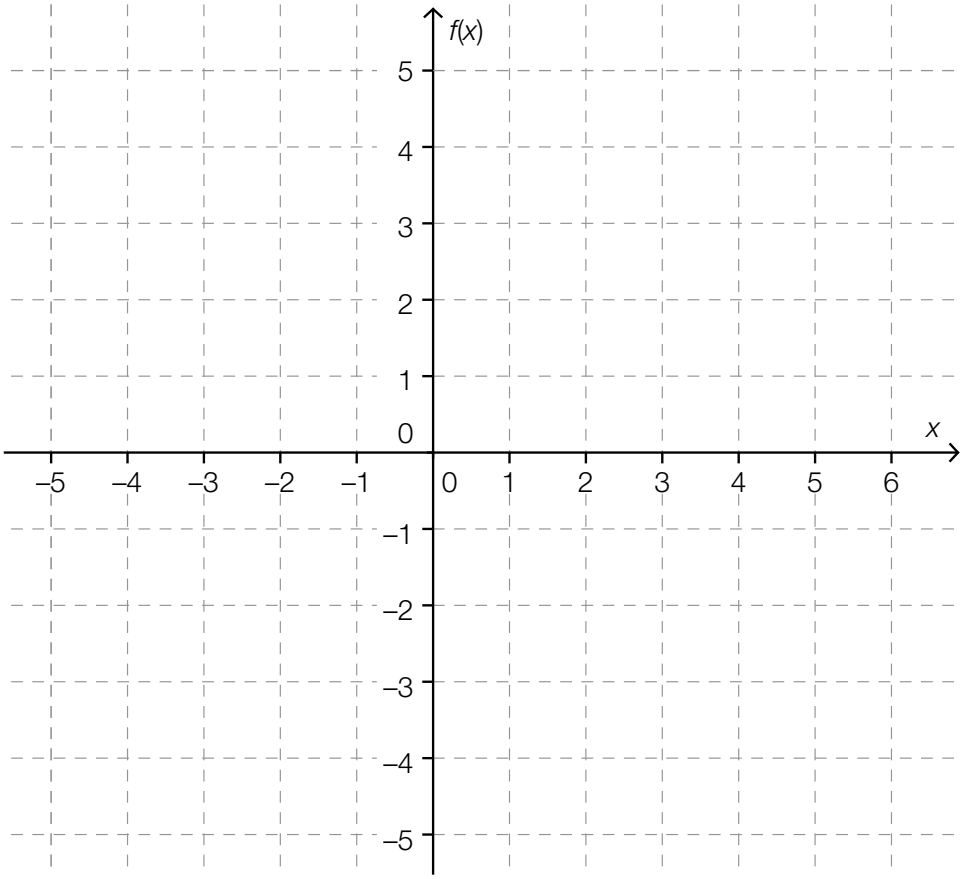
Aufgabe 3

Quadratische Funktion und ihre Nullstellen

Gegeben ist eine quadratische Funktion f mit der Gleichung $f(x) = a \cdot x^2 + b$ mit $a \neq 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie den Graphen einer möglichen quadratischen Funktion, die in $P = (0|-1)$ ein lokales Minimum (einen Tiefpunkt) hat, und geben Sie die Anzahl der Nullstellen dieser Funktion an! Geben Sie auch an, welche Werte für die Parameter a und b in diesem Fall möglich sind!



Leitfrage:

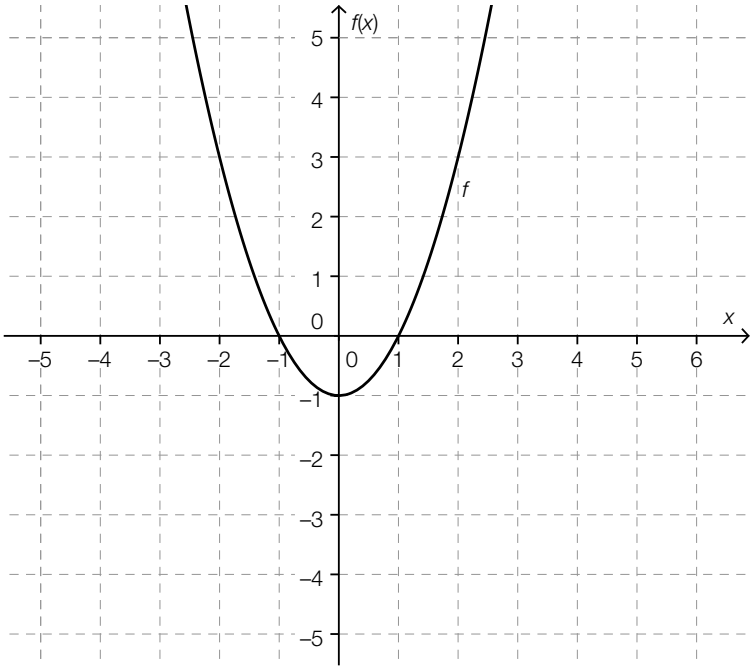
Geben Sie an, wie die Anzahl der Nullstellen einer quadratischen Funktion von den Parametern a und b der Funktion abhängt!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 3

Quadratische Funktion und ihre Nullstellen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Diese Funktion hat jedenfalls zwei Nullstellen. Der Parameter a ist in diesem Fall positiv und $b = -1$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Graph der Funktion als nach oben offene Parabel erkennbar ist und zwei Nullstellen hat und die Bedingungen für die Parameter korrekt angegeben werden.
Jede nach oben geöffnete Parabel, die ihren Scheitel in $(0|-1)$ hat, ist als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$a > 0$ und $b < 0$ $\Rightarrow$ zwei Nullstellen
$a < 0$ und $b > 0$ $\Rightarrow$ zwei Nullstellen

a beliebig und $b = 0$ $\Rightarrow$ eine Nullstelle

$a > 0$ und $b > 0$ $\Rightarrow$ keine Nullstelle
$a < 0$ und $b < 0$ $\Rightarrow$ keine Nullstelle

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle fünf Fälle (sinngemäß) korrekt angeführt werden.

öffentliches Dokument

Aufgabe 4

Gewinn und Kosten

Gegeben ist die Gewinnfunktion G mit der Gleichung $G(x) = -x^2 + 90 \cdot x - 1800$. Dabei wird x in Stück und $G(x)$ in Euro angegeben.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den maximalen Gewinn!

Leitfrage:

Der Verkaufspreis beträgt € 7 pro Stück. Die Kosten $K(x)$ in Euro zur Herstellung von x Stück werden durch die Kostenfunktion K beschrieben. Stellen Sie eine Gleichung der Kostenfunktion K auf und berechnen Sie $K(50)$!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 4

Gewinn und Kosten

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$G'(x) = -2 \cdot x + 90$
$G'(x) = 0$
$x = 45$
$G(45) = 225$

Der maximale Gewinn beträgt € 225.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der maximale Gewinn korrekt berechnet wird. Die Angabe von 45 Stück alleine reicht nicht aus.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$-x^2 + 90 \cdot x - 1\,800 = 7 \cdot x - K(x)$
$K(x) = x^2 - 83 \cdot x + 1\,800$
$K(50) = 150$

Die Kosten zur Herstellung von 50 Stück betragen € 150.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Funktionsgleichung und der Wert von € 150 richtig angegeben werden. Äquivalente Funktionsgleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

öffentliches Dokument

Aufgabe 5

Mittelwerte von Datenreihen

Bei einer Verkehrskontrolle in einem Ortsbereich (Geschwindigkeitsbeschränkung 50 km/h) wurden die Geschwindigkeiten von 20 Fahrzeugen gemessen. Die Ergebnisse sind in der nachstehenden Tabelle aufgezeichnet.

v in km/h	45	47	48	50	51	52	54	89
Anzahl	2	3	5	2	2	2	3	1

Aufgabenstellung:

Geben Sie das arithmetische Mittel, den Median (Zentralwert) und den Modus (Modalwert) der gemessenen Geschwindigkeiten an! Geben Sie an, ob in diesem Fall das arithmetische Mittel oder der Median aussagekräftiger ist, und begründen Sie Ihre Aussage!

Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Nicht immer erlauben erhobene Daten die Bestimmung aller Mittelwerte.

Bei einer Befragung wurden Daten zu den Autos der befragten Personen erhoben, und zwar im Hinblick auf die Farbe des Autos, die Zufriedenheit mit dem Auto (in den vier Stufen „sehr zufrieden“, „zufrieden“, „wenig zufrieden“, „nicht zufrieden“) und das Alter des Autos (in Jahren).

Geben Sie an, welcher Mittelwert prinzipiell für die angegebenen Merkmale bestimmt werden kann! Ergänzen Sie dazu die nachstehende Tabelle, indem Sie die Mittelwerte, die bei den entsprechenden Merkmalen bestimmt werden können, ankreuzen! Begründen Sie Ihre Vorgehensweise!

	Autofarbe	Zufriedenheit mit dem Auto	Alter des Autos
Modus			
Median			
arithmetisches Mittel			

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 5

Mittelwerte von Datenreihen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Modus = 48; häufigster Wert einer Datenreihe

Median = 49; mittlerer Wert einer geordneten Datenreihe

arithmetisches Mittel = 51,4; Summe der Werte einer Datenreihe / Anzahl der Werte

Der Median ist in diesem Fall aussagekräftiger als das arithmetische Mittel, weil der „Ausreißer 89“ das arithmetische Mittel erhöht.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle drei Werte richtig bestimmt werden und die Aussagekraft des arithmetischen Mittels (sinngemäß) korrekt begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

	Autofarbe	Zufriedenheit mit dem Auto	Alter des Autos
Modus	X	X	X
Median		X	X
arithmetisches Mittel		(X)*	X

Mögliche Begründungen:
- Farbe: Es besteht nur die Möglichkeit, die am häufigsten vorkommende Farbe, also den Modus anzugeben. Eine Bestimmung des Medians ist nicht möglich, da keine Rangordnung vorliegt.
- Zufriedenheit: Eine Rangordnung ist festgelegt, dadurch ist neben der Angabe der am häufigsten vorkommenden Zufriedenheitsstufe (Modus) auch die Angabe des Medians möglich.
- Das Alter des Autos wird in Jahren angegeben. Die Berechnung des arithmetischen Mittels (Durchschnittsalter) ist möglich. Die Liste kann geordnet werden, wodurch die Bestimmung des Medians möglich ist. Das häufigste in der Liste vorkommende Alter ist der Modus.

* Eine Bestimmung des arithmetischen Mittels wäre dann möglich, wenn man der Zufriedenheit Punkte wie etwa 0 (nicht zufrieden), 1, 2 und 3 (sehr zufrieden) zuordnet – in diesem Fall ist das Kreuz richtig gesetzt.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Kreuze richtig gesetzt werden und das Setzen der Kreuze (sinngemäß) richtig begründet wird.

öffentliches Dokument

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2015

Mathematik

Kompensationsprüfung
Angabe für **Prüfer/innen**

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

öffentliches Dokument

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

öffentliches Dokument

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

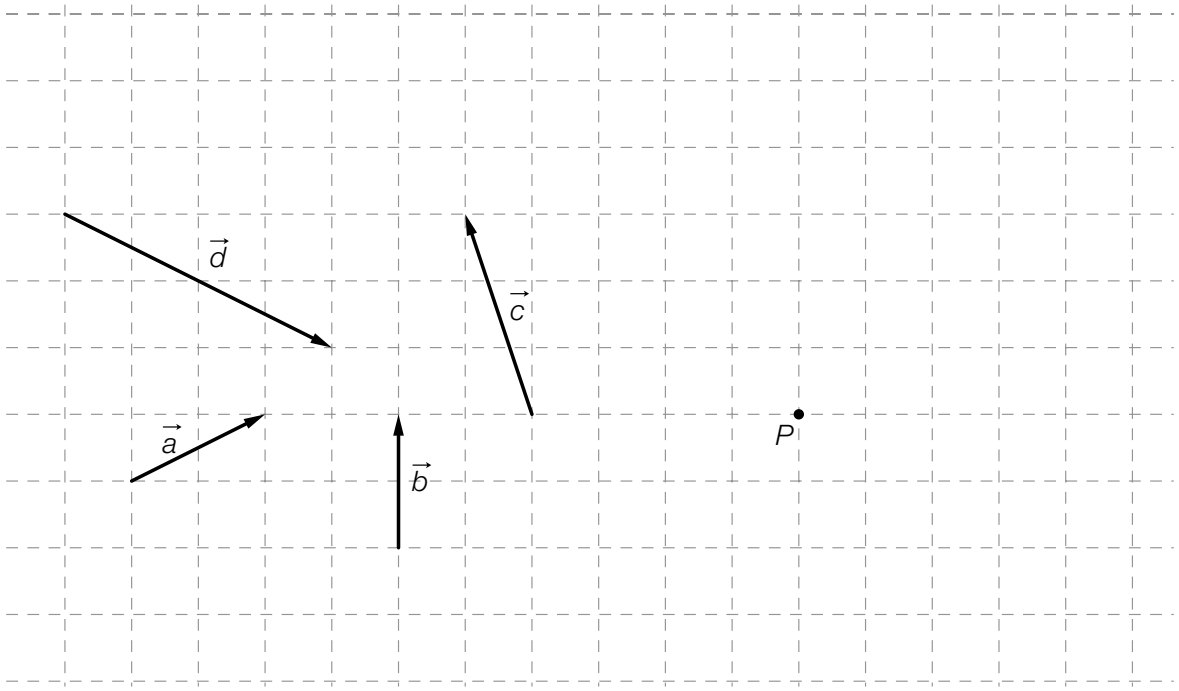
	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

öffentliches Dokument

Aufgabe 1

Vektoren

Gegeben sind Pfeildarstellungen der vier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^2$ und ein Punkt P.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie in der gegebenen Abbildung ausgehend vom Punkt P grafisch Pfeildarstellungen der Vektoren $\vec{a} - \vec{c}$ und $2 \cdot \vec{b} - \frac{1}{2} \cdot \vec{d}$!

Leitfrage:

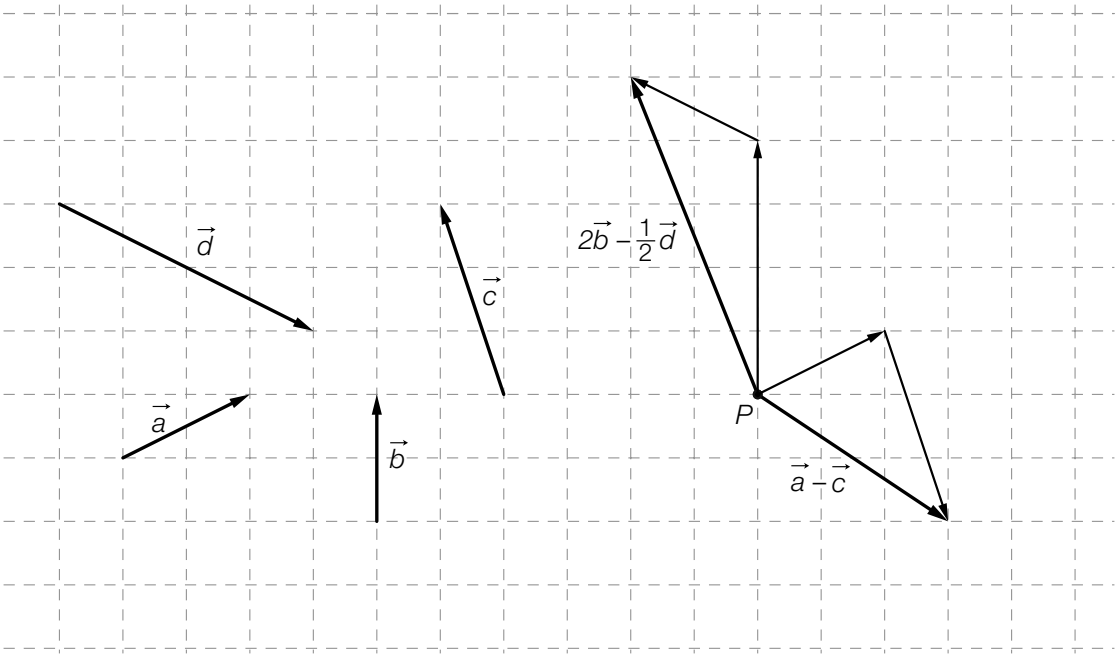
Begründen Sie anhand der gegebenen Pfeildarstellungen, warum es möglich ist, durch die Vektoraddition $r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{d}$ (mit $r, s \in \mathbb{R}$) den Vektor $\vec{c}$ zu erhalten, und bestimmen Sie rechnerisch die Werte der Parameter r und s!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 1

Vektoren

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Lösungsvektoren korrekt ermittelt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Es ist möglich, weil die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{d}$ nicht parallel sind bzw. weil das entsprechende Gleichungssystem genau eine Lösung hat.

$$r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$r = 1{,}25$ und $s = -0{,}25$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Möglichkeit der Darstellung des Vektors $\vec{c}$ durch die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{d}$ (sinngemäß) richtig begründet wird und die Faktoren r und s richtig berechnet werden.

öffentliches Dokument

Aufgabe 2

Quadratische Gleichungen und Funktionen

Betrachtet werden eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ und eine quadratische Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 8x + 16 = 0$ und erklären Sie die Bedeutung dieser Lösungen für den Funktionsgraphen der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 8x + 16$!

Leitfrage:

Erläutern Sie mithilfe von Skizzen, wie man bei Kenntnis des Graphen einer beliebigen quadratischen Funktion f auf die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung $f(x) = 0$ schließen kann!

Geben Sie an, welcher der Parameter a, b und c dafür verantwortlich ist, dass genau eine Lösung der quadratischen Gleichung den Wert 0 annimmt!
Geben Sie für diesen Fall den Wert des Parameters an und skizzieren Sie einen entsprechenden Funktionsgraphen!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 2

Quadratische Gleichungen und Funktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Lösungen: $x_1 = x_2 = 4$

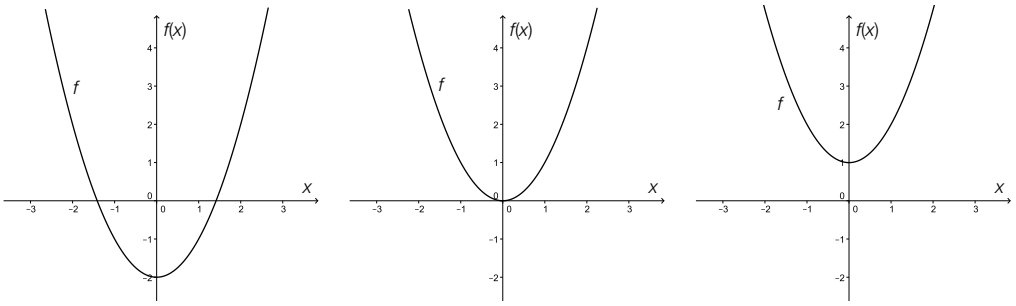
Das heißt, dass der entsprechende Funktionsgraph die x-Achse an der Stelle $x = 4$ berührt.
An dieser Stelle hat der Funktionsgraph eine Nullstelle, die zugleich der Scheitel der Parabel ist.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Lösung richtig angegeben wird und ihre Bedeutung (sinngemäß) der Lösungserwartung entsprechend erklärt wird.

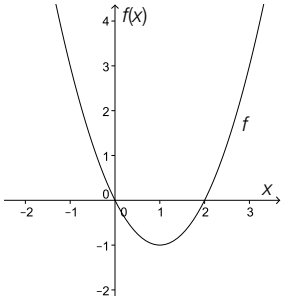
Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Anzahl der Schnittpunkte einer quadratischen Funktion mit der x-Achse entspricht genau der Anzahl der reellen Lösungen der dazugehörigen quadratischen Gleichung.



Die drei typischen Fälle:
- zwei Schnittpunkte: die quadratische Gleichung hat zwei verschiedene reelle Lösungen
- ein Berührpunkt: die quadratische Gleichung hat genau eine reelle (Doppel-)Lösung
- kein Schnittpunkt: die quadratische Gleichung hat keine reellen Lösungen

Aus $c = 0$ folgt jedenfalls, dass $x = 0$ eine Lösung der quadratischen Gleichung ist und der dazugehörige Funktionsgraph durch den Ursprung verläuft.



Lösungsschlüssel:

Ein Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Zusammenhang zwischen den Nullstellen des Graphen und der Anzahl der Lösungen (sinngemäß) richtig erläutert wird.
Weiters muss die Bedingung $c = 0$ genannt und ein entsprechender Graph richtig skizziert werden.

öffentliches Dokument

Aufgabe 3

Funktionen vergleichen

Gegeben sind vier reelle Funktionen f, g, h und i mit den nachstehenden Funktionsgleichungen:

$f(x) = 3x$ mit $x \in \mathbb{R}$

$g(x) = x^3$ mit $x \in \mathbb{R}$

$h(x) = 3^x$ mit $x \in \mathbb{R}$

$i(x) = \sin(3x)$ mit $x \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche dieser vier Funktionen im gesamten Definitionsbereich monoton steigend sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Leitfrage:

Skizzieren Sie jeweils in einem selbst angelegten Koordinatensystem (das nicht beschriftet oder skaliert sein muss) charakteristische Verläufe für die nachstehenden fünf Funktionstypen:

- lineare Funktion der Art $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k \neq 0$
- Polynomfunktion zweiten Grades der Art $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $a \neq 0$
- Polynomfunktion dritten Grades der Art $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a \neq 0$
- Exponentialfunktion der Art $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$
- Sinusfunktion der Art $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$; $a, b \neq 0$

Geben Sie an, welche dieser Funktionstypen auf ihrem Definitionsbereich auf jeden Fall lokale Extremstellen haben, welche auf jeden Fall keine lokalen Extremstellen haben und welche eventuell lokale Extremstellen haben!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 3

Funktionen vergleichen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

f, *g* und *h*

Die Begründung kann anhand entsprechender Skizzen erfolgen.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn genau diese drei Funktionen genannt und (sinngemäß) korrekte Begründungen angeführt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Kandidatinnen/Kandidaten sollen die Skizzen so zeichnen, dass die typischen Verläufe erkennbar sind.

- Lineare Funktion:
  Es muss eine Gerade sein, die weder senkrecht noch waagrecht sein darf.
- Polynomfunktion zweiten Grades:
  Der Graph muss als Parabel erkennbar sein.
- Polynomfunktion dritten Grades:
  Der charakteristische Verlauf des Graphen muss grundsätzlich erkennbar sein.
- Exponentialfunktion:
  Wichtig bei dieser Skizze ist hier die Darstellung der Monotonie, die Darstellung des asymptotischen Verhaltens und der sich ändernde Steigungsverlauf. Weiters darf die Funktion keine Nullstelle haben und der Graph der Funktion muss einen Schnittpunkt mit der senkrechten Achse aufweisen.
- Sinusfunktion:
  Die Periodizität sowie sin(0) = 0 müssen eindeutig erkennbar sein.

Extremstellen:

- Auf jeden Fall keine lokalen Extremstellen haben:
  Exponentialfunktion, lineare Funktion (mit $k \neq 0$)
- Auf jeden Fall lokale Extremstellen haben:
  Polynomfunktion zweiten Grades, Sinusfunktion
- Eventuell lokale Extremstellen haben:
  Polynomfunktion dritten Grades

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für alle fünf angeführten Funktionstypen ein typischer Funktionsverlauf richtig skizziert und die Frage nach den Extremstellen richtig beantwortet wird.

öffentliches Dokument

Aufgabe 4

Holzbestand

Der Holzbestand eines Waldes wird in Kubikmetern (m^3) angegeben. Zu Beginn eines bestimmten Jahres beträgt der Holzbestand 10 000 m^3. Jedes Jahr wächst der Holzbestand um 3 %. Am Jahresende werden jeweils 500 m^3 Holz geschlägert. Dabei gibt a_n die Holzmenge am Ende des n-ten Jahres an.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie die Entwicklung des Holzbestandes durch eine Differenzengleichung dar! Erläutern Sie die Bedeutung der auftretenden Größen!

Leitfrage:

Geben Sie an, bei welchen jährlichen prozentuellen Wachstumsraten der Holzbestand im Laufe der Zeit abnimmt, zunimmt bzw. konstant bleibt! Begründen Sie Ihre Antwort!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 4

Holzbestand

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$a_0 = 10\,000$
$a_{n+1} = 1{,}03 \cdot a_n - 500$

a_0 ... Holzbestand zu Beginn
n ... Jahre nach Beginn
a_{n+1} ... Holzbestand am Ende des $(n + 1)$-ten Jahres

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Differenzengleichung angegeben und die Bedeutung der auftretenden Größen (sinngemäß) korrekt erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

500 m³ sind 5 % von 10 000 m³. Daher gilt:

Ist die jährliche prozentuelle Wachstumsrate gleich 5 %, so bleibt der Holzbestand konstant (weil der Zuwachs gleich der geschlägerten Holzmenge ist).

Ist die jährliche prozentuelle Wachstumsrate kleiner als 5 %, so nimmt der Holzbestand ab (weil der Zuwachs kleiner als die geschlägerte Holzmenge ist).

Ist die jährliche prozentuelle Wachstumsrate größer als 5 %, so nimmt der Holzbestand zu (weil der Zuwachs größer als die geschlägerte Holzmenge ist).

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert der Zuwachsrate von 5 % angegeben wird. Darüber hinaus müssen alle drei Fälle korrekt angesprochen und (sinngemäß) der Lösungserwartung entsprechend begründet werden.

öffentliches Dokument

Aufgabe 5

Schießstand

Ein Sportschütze schießt innerhalb einer Minute 20-mal auf eine Scheibe. Dabei trifft er bei den ersten 17 Schüssen 4-mal den innersten Ring der Zielscheibe.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie aufgrund dieser Daten einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, dass unter der Annahme, dass sich die Voraussetzungen nicht ändern, der Sportschütze beim 18. Schuss wieder den innersten Ring der Zielscheibe trifft! Erklären Sie den von Ihnen gewählten Lösungsansatz!

Leitfrage:

Nehmen Sie an, dass der von Ihnen berechnete Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, den innersten Ring der Zielscheibe zu treffen, auch für die nächste Serie von 20 Schüssen gilt.

Lösen Sie die folgende Aufgabe unter Verwendung der Binominalverteilung und begründen Sie, warum die Verwendung dieser Verteilung in diesem Fall gerechtfertigt ist!

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Sportschütze in der nächsten Serie insgesamt nicht öfter als 2-mal den innersten Ring der Zielscheibe trifft!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 5

Schießstand

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Der Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{4}{17} \approx 0{,}2353 = 23{,}53\ \%$.

Mögliche Erklärungen:
– die relative Häufigkeit entspricht dem gesuchten Schätzwert
– die Anzahl der günstigen Fälle geteilt durch die Anzahl der möglichen Fälle

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der gesuchte Wert korrekt berechnet sowie eine der Lösungserwartung entsprechende Erklärung gegeben wird.

Toleranzintervall: [0,23; 0,24] bzw. [23 %; 24 %]

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Annahme der Binominalverteilung ist gerechtfertigt, da es immer nur zwei Möglichkeiten gibt (den innersten Ring zu treffen oder nicht) und die Schüsse unabhängig voneinander sind, die Treffwahrscheinlichkeit also annähernd konstant bleibt.

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$P(X = 0) = \left(\frac{13}{17}\right)^{20} \approx 0{,}0048$

$P(X = 1) = \binom{20}{1} \cdot \left(\frac{4}{17}\right)^{1} \cdot \left(\frac{13}{17}\right)^{19} \approx 0{,}0288$

$P(X = 2) = \binom{20}{2} \cdot \left(\frac{4}{17}\right)^{2} \cdot \left(\frac{13}{17}\right)^{18} \approx 0{,}0841$

$P(X \leq 2) \approx 0{,}1176$

Toleranzintervall: [0,108; 0,13] bzw. [10,8 %; 13 %]

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn (sinngemäß) korrekt argumentiert und die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet wird.

öffentliches Dokument

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2015

Mathematik

Kompensationsprüfung
Angabe für **Prüfer/innen**

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

öffentliches Dokument

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

öffentliches Dokument

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

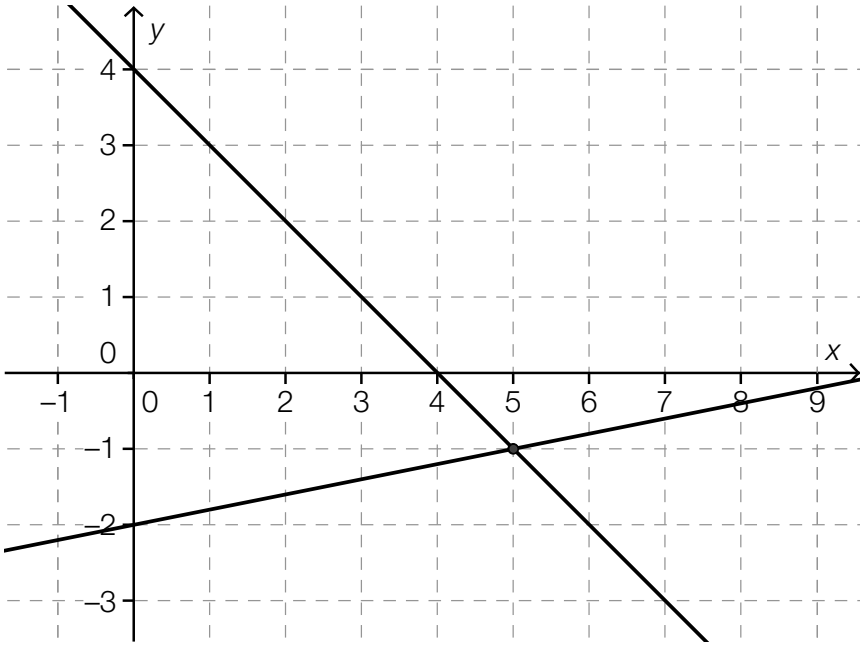
	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

öffentliches Dokument

Aufgabe 1

Gleichungssysteme und ihre Lösungsfälle

Gegeben ist folgende grafische Darstellung:



Aufgabenstellung:

Geben Sie ein dieser Grafik entsprechendes lineares Gleichungssystem mit den Variablen *x* und *y* sowie die Lösung des Gleichungssystems an!

Leitfrage:

Ändern Sie eine der beiden Gleichungen so, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat!
Begründen Sie Ihre Vorgehensweise und erklären Sie, welche Auswirkung diese Änderung auf die Lagebeziehung der beiden Geraden hat!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 1

Gleichungssysteme und ihre Lösungsfälle

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

I: $y = -x + 4$
II: $y = \frac{1}{5}x - 2$

oder:

I: $x + y = 4$
II: $x - 5y = 10$

Lösung: $x = 5$ und $y = -1$ bzw. $L = \{ (5|-1) \}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl ein richtiges Gleichungssystem als auch die richtige Lösung angegeben wird.
Äquivalente Gleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Änderung:
I: $x + y = 4$
II: $2x + 2y = 8$

Mögliche Begründung:
Die Gleichungen sind äquivalent.

Die Geraden sind dann ident.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine Gleichung entsprechend geändert, die Vorgehensweise (sinngemäß) korrekt begründet und die Identität angegeben wird.

Aufgabe 2

Formel als Funktion interpretieren

Gegeben ist folgende Formel:

$F = \frac{5 \cdot a^2 \cdot b}{3}$ mit $F, a, b \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie sowohl

- F in Abhängigkeit von a bei konstantem b mit $b < 0$

als auch

- F in Abhängigkeit von b bei konstantem a mit $a \neq 0$

als Funktion und geben Sie jeweils an, um welchen Funktionstyp es sich dabei handelt!

Skizzieren Sie den Verlauf des jeweiligen Graphen!

Leitfrage:

Beschreiben Sie für die obigen zwei Funktionen die folgenden Eigenschaften:

- Monotonieverhalten
- Achsensymmetrie
- Achsenschnittpunkte

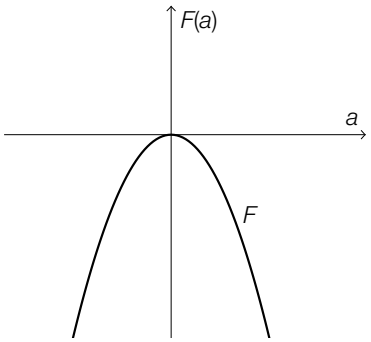
öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 2

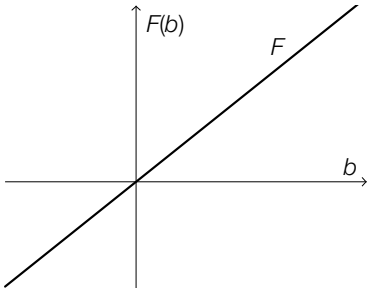
Formel als Funktion interpretieren

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

- *F* in Abhängigkeit von *a* beschreibt eine quadratische Funktion (bei konstantem *b*).



- *F* in Abhängigkeit von *b* beschreibt eine lineare Funktion (bei konstantem *a*).



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Funktionstypen richtig erkannt und skizziert werden.
Der Graph von *F* muss im ersten Fall als eine zur senkrechten Achse symmetrische, nach unten offene Parabel durch den Ursprung erkennbar sein.
Der Graph von *F* muss im zweiten Fall als eine Gerade durch den Ursprung mit positiver Steigung erkennbar sein.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Für *F* in Abhängigkeit von *a* gilt:
- Die Funktion wechselt an der Stelle $a = 0$ das Monotonieverhalten von streng monoton steigend auf streng monoton fallend.
- Der Graph der Funktion ist symmetrisch zur senkrechten Achse.
- Der Graph der Funktion schneidet beide Achsen im Punkt $(0|0)$.

Für *F* in Abhängigkeit von *b* gilt:
- Die Funktion ist streng monoton steigend.
- Der Graph der Funktion ist nicht achsensymmetrisch.
- Der Graph der Funktion schneidet beide Achsen im Punkt $(0|0)$.

Lösungsschlüssel:

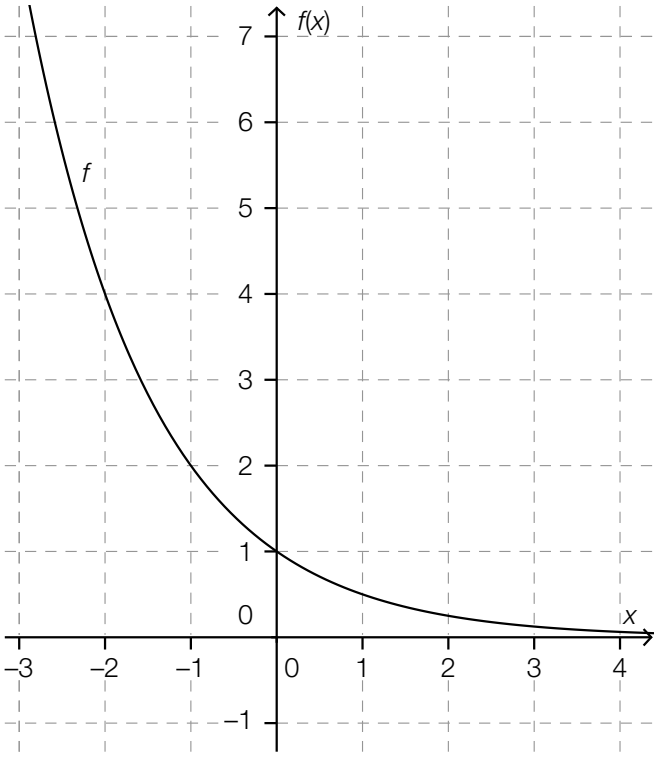
Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle drei Eigenschaften für beide Funktionen beschrieben werden und (sinngemäß) der Lösungserwartung entsprechen.

öffentliches Dokument

Aufgabe 3

Exponentialfunktion

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie den Parameter a und begründen Sie, warum Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a^x$ jedenfalls den Punkt $P = (0|1)$ enthalten!

$a =$ _____

Leitfrage:

Erklären Sie, wie der Parameter a zu ändern ist, damit die Funktion streng monoton steigend ist! Geben Sie an, wie sich eine Spiegelung des Graphen der Funktion f an der senkrechten Achse auf den Funktionsterm auswirkt!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 3

Exponentialfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$a = 0{,}5$

Diese Funktionen gehen durch $P = (0|1)$, da $a^0 = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$ gilt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl ein korrekter Wert für a als auch eine (sinngemäß) korrekte Begründung angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Für Werte $a > 1$ ist die Funktion streng monoton steigend.

Eine Spiegelung an der senkrechten Achse erzeugt man, wenn der Exponent mit (–1) multipliziert wird oder statt a der Kehrwert $\frac{1}{a}$ als Basis verwendet wird.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn $a > 1$ und die Auswirkung der Spiegelung auf den Funktionsterm genannt werden.

öffentliches Dokument

Aufgabe 4

Bremsweg

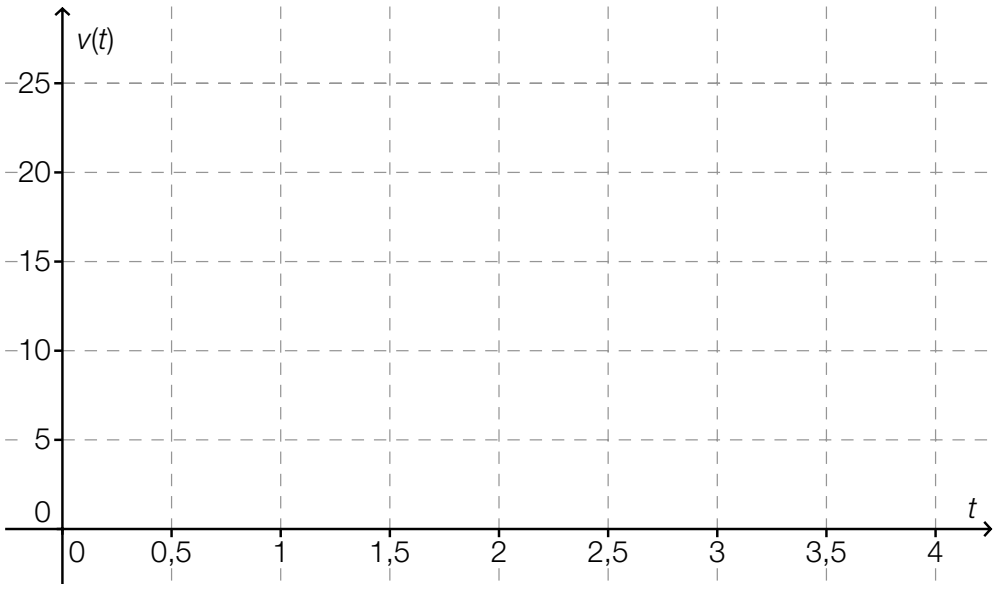
Ein PKW beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ gleichmäßig zu bremsen.
Die Funktion v beschreibt die Geschwindigkeit $v(t)$ des PKW zum Zeitpunkt t ($v(t)$ in Metern pro Sekunde, t in Sekunden).
Es gilt: $v(t) = 20 - 8t$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Länge desjenigen Weges, den der PKW während des gleichmäßigen Bremsvorgangs bis zum Stillstand zurücklegt, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Stellen Sie den Graphen der Funktion v und die Länge des berechneten Bremsweges im nachstehenden Koordinatensystem grafisch dar!



Erklären Sie, wie sich der Graph von v und die Länge des Bremsweges verändern, wenn

- die Geschwindigkeit am Beginn des Bremsvorgangs höher ist und die Geschwindigkeitsänderung bei diesem gleichmäßigen Bremsvorgang gleich bleibt,
- die Geschwindigkeit am Beginn des Bremsvorgangs gleich ist und die Geschwindigkeitsänderung bei diesem gleichmäßigen Bremsvorgang geringer ist!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 4

Bremsweg

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Berechnung:
$v(t) = 0 \Rightarrow t = 2{,}5$
$\int_0^{2{,}5} (20 - 8t)\,\mathrm{d}t = (20t - 4t^2) \Big|_0^{2{,}5} = 25$

Die Länge des Bremsweges beträgt 25 m.

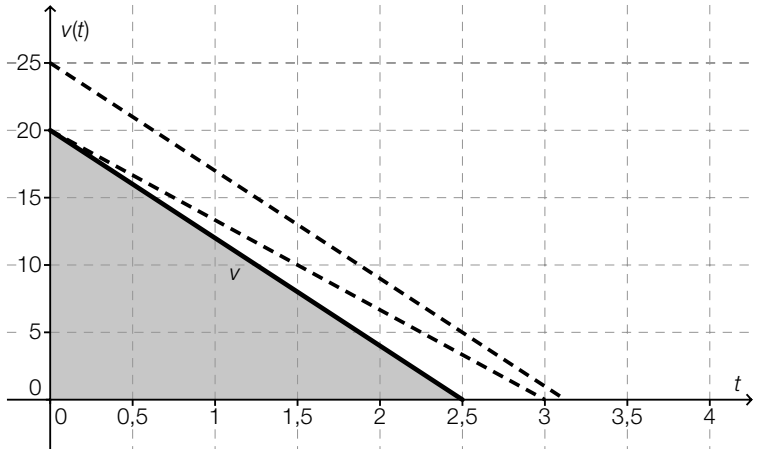
Mögliche Erklärung:
$s(t)$ ist eine Stammfunktion von $v(t)$, daher muss $v(t)$ integriert werden.
Der Bremsvorgang ist nach 2,5 s beendet, da $v(2{,}5) = 0$, daher ist 2,5 die obere Grenze des bestimmten Integrals.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Länge des Bremsweges richtig berechnet und die Vorgehensweise (sinngemäß) richtig erklärt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Länge des Bremsweges ist der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von v und der t-Achse.



- Bei höherer Anfangsgeschwindigkeit und gleichbleibender Geschwindigkeitsänderung verläuft der Graph von v parallel zum ursprünglichen Fall und die Länge des Bremsweges nimmt zu.
- Bei gleicher Geschwindigkeit und geringerer Geschwindigkeitsänderung ist der Graph von v flacher und die Länge des Bremsweges nimmt zu.

Lösungsschlüssel:

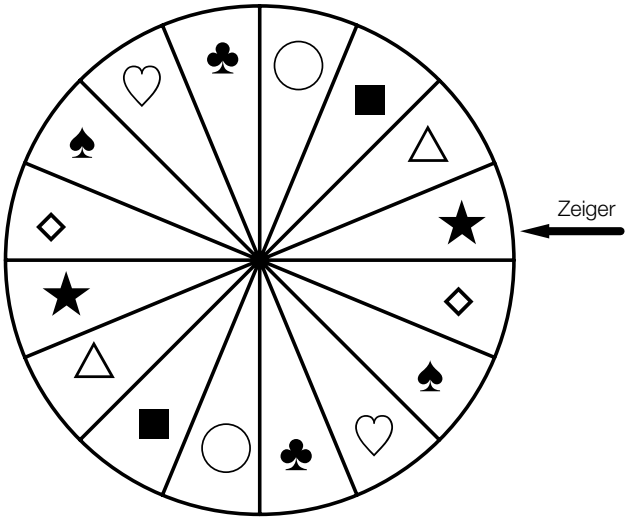
Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Graph von v und die Länge des Bremsweges richtig dargestellt werden. Beide Veränderungen müssen anhand des Graphen von v (sinngemäß) richtig erklärt werden.

öffentliches Dokument

Aufgabe 5

Glücksrad

Die nachstehende Abbildung zeigt ein Glücksrad mit 16 gleich großen Sektoren. Wenn das Glücksrad zum Stillstand gekommen ist und der Zeiger auf ein Sternsymbol zeigt (siehe nachstehende Abbildung), hat man gewonnen.
Das Glücksrad wird bei einem Glücksspiel genau dreimal gedreht.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten und erklären Sie den von Ihnen verwendeten rechnerischen Ansatz!

- Bei dreimaligem Drehen gewinnt man genau dreimal.
- Bei dreimaligem Drehen gewinnt man genau zweimal.

Leitfrage:

Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, beim dreimaligen Drehen des Glücksrades immer zu gewinnen, wenn anstatt des abgebildeten Glücksrades Glücksräder mit folgenden Veränderungen verwendet werden?

- Glücksrad *A*: 12 zusätzliche Sektoren mit einem zusätzlichen Sternsymbol; alle Sektoren des Glücksrades sind gleich groß.
- Glücksrad *B*: 16 Sektoren; die Größe der Sektoren mit dem Sternsymbol ist unverändert so wie in obiger Abbildung, die restlichen Sektoren sind unterschiedlich groß.

Begründen Sie Ihre Antworten!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 5

Glücksrad

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Gewinnwahrscheinlichkeit beim einmaligen Drehen: $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$, Verlustwahrscheinlichkeit: $\frac{7}{8}$

- Wahrscheinlichkeiten werden multipliziert („und"-Verknüpfung): $\left(\frac{1}{8}\right)^3 \approx 0{,}00195$
- Es gibt drei Möglichkeiten, bei welchen zwei der drei Versuche der Gewinn erzielt wird: $\left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right) \cdot 3 \approx 0{,}041$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Wahrscheinlichkeiten korrekt berechnet werden und der jeweilige Rechenansatz (auch über Baumdiagramm oder Binominalverteilung) korrekt erklärt wird.
Toleranzintervalle: [0,0019; 0,002] bzw. [0,04; 0,0411]

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Glücksrad *A*: Die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einmaligem Drehen beträgt $\frac{3}{28}$.
Da $\frac{3}{28} < \frac{1}{8}$, ist auch $\left(\frac{3}{28}\right)^3 < \left(\frac{1}{8}\right)^3$ und daher nimmt die Wahrscheinlichkeit, bei dreimaligem Drehen jedes Mal zu gewinnen, ab.

Glücksrad *B*: Die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einmaligem Drehen beträgt unverändert $\frac{1}{8}$.
Das Ergebnis bei dreimaligem Drehen bleibt daher unverändert $\left(\frac{1}{8}\right)^3$.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für beide Fälle die Auswirkung auf die Wahrscheinlichkeit, jedes Mal zu gewinnen, (sinngemäß) richtig begründet wird.

öffentliches Dokument