Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Haupttermin 2021

Mathematik

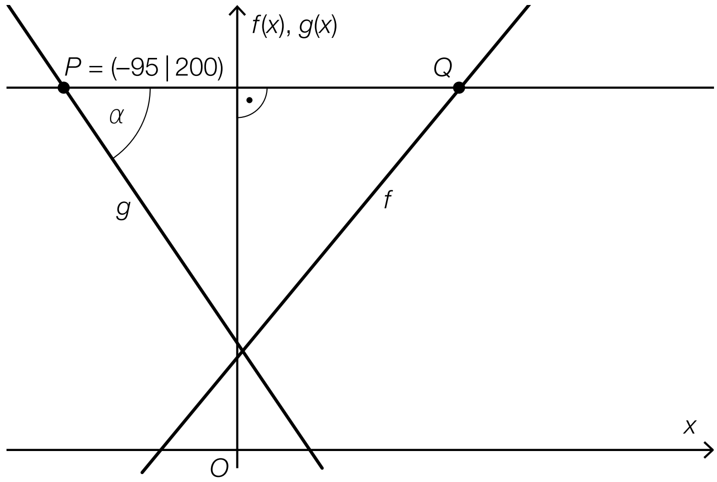
Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Aufgabe 1

Graphen linearer Funktionen

In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen von zwei linearen Funktionen *f* und *g* dargestellt sowie die Punkte *P* und *Q* eingezeichnet.



Aufgabenstellung:

Es gilt:
$f(x) = 1{,}22 \cdot x + 51{,}22$

– Ermitteln Sie mithilfe der Angaben aus der obigen Abbildung den horizontalen Abstand der Punkte *P* und *Q*.

Leitfrage:

Es gilt:
$\alpha = 56°$

– Stellen Sie eine Gleichung der linearen Funktion *g* auf.

Lösung zur Aufgabe 1

Graphen linearer Funktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$200 = 1{,}22 \cdot x + 51{,}22$
$x = 121{,}950...$

horizontaler Abstand der Punkte P und Q:
$95 + 121{,}950... = 216{,}950...$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der horizontale Abstand richtig ermittelt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$g(x) = k \cdot x + d$
$k = \tan(-56°) = -1{,}482...$

$-95 \cdot (-1{,}482...) + d = 200$
$d = 59{,}156...$

$g(x) = -1{,}48 \cdot x + 59{,}16$ *(Koeffizienten gerundet)*

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Gleichung richtig aufgestellt wird.

Aufgabe 2

Niagara-Wasserfälle

Die Niagara-Wasserfälle können mit einem Ausflugsschiff besucht werden.
Eine Fahrt mit dem Ausflugsschiff kostet für einen Erwachsenen 19,25 US-Dollar ($) und für ein Kind 11,20 $.

Aufgabenstellung:

Bei einer bestimmten Fahrt sind e Erwachsene und k Kinder als Passagiere an Bord. Das sind insgesamt 100 Passagiere.
Die Gesamteinnahmen bei dieser Fahrt betragen 1.707,65 $.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung von e und k.

Leitfrage:

Bei einer anderen Fahrt sind a Erwachsene und b Kinder als Passagiere an Bord.

Bei dieser Fahrt gilt:

$19{,}25 \cdot a = 2 \cdot 11{,}20 \cdot b$

Gegeben sind 3 Aussagen:

Aussage 1: Die Einnahmen durch die Erwachsenen sind doppelt so hoch wie die Einnahmen durch die Kinder.
Aussage 2: Die Einnahmen durch die Kinder sind um 50 % höher als die Einnahmen durch die Erwachsenen.
Aussage 3: Die Einnahmen durch die Erwachsenen sind um 200 % höher als die Einnahmen durch die Kinder.

– Geben Sie für jede der angeführten Aussagen an, ob sie für diese Fahrt wahr oder falsch ist.
Stellen Sie die falsche(n) Aussage(n) für den gegebenen Sachzusammenhang richtig.

Lösung zur Aufgabe 2

Niagara-Wasserfälle

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

I: $e + k = 100$
II: $19{,}25 \cdot e + 11{,}20 \cdot k = 1\,707{,}65$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn das Gleichungssystem richtig erstellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Aussage 1 ist wahr.

Aussage 2 ist falsch.
Richtig wäre: Die Einnahmen durch die Kinder sind um 50 % geringer als die Einnahmen durch die Erwachsenen.

Aussage 3 ist falsch.
Richtig wäre: Die Einnahmen durch die Erwachsenen sind um 100 % höher als die Einnahmen durch die Kinder.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn bei jeder der angeführten Aussagen die richtige Entscheidung getroffen wird und die falschen Aussagen für den gegebenen Sachzusammenhang richtiggestellt werden.

Aufgabe 3

Beschleunigung

Die lineare Funktion a beschreibt in Abhängigkeit von der Zeit t die Beschleunigung $a(t)$ eines Autos (t in s, $a(t)$ in m/s²). Die Beschleunigung hat für $t = 0$ den Wert 0 m/s² und für $t = 25$ den Wert 2,4 m/s².

Aufgabenstellung:

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung für a auf.

Leitfrage:

Die Geschwindigkeit dieses Autos zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt 0 m/s.

– Ermitteln Sie die Länge desjenigen Weges, den das Auto im Zeitintervall [0; 25] zurücklegt.

Lösung zur Aufgabe 3

Beschleunigung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$a(t) = 0{,}096 \cdot t$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Funktionsgleichung richtig aufgestellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$v(t) = 0{,}048 \cdot t^2$

$s(t) = 0{,}016 \cdot t^3$

$s(25) = 250$
Das Auto legt in diesem Zeitintervall 250 m zurück.

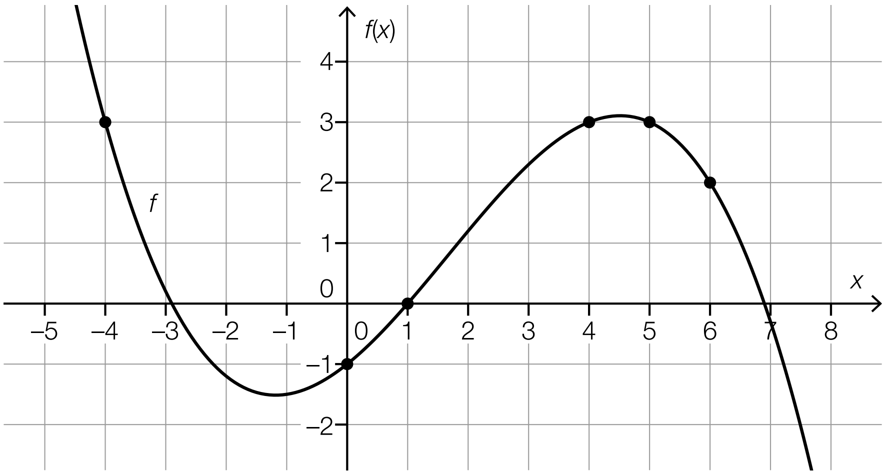
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Länge des zurückgelegten Weges richtig ermittelt wird.

Aufgabe 4

Differenzenquotient und Differenzialquotient

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Polynomfunktion f.
Die Koordinaten der markierten Punkte sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

– Geben Sie ein Intervall so an, dass der Differenzenquotient in diesem Intervall den Wert 1 annimmt.

Intervall: [_______ ; _______]

Leitfrage:

Der zur senkrechten Achse symmetrische Graph einer quadratischen Funktion g berührt den Graphen von f an der Stelle $x = 4$. Die Steigung der Funktion f an dieser Stelle beträgt 0,4.

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion g auf.

Lösung zur Aufgabe 4

Differenzenquotient und Differenzialquotient

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Intervall: [0; 4]

oder:

Intervall: [1; 4]

oder:

Intervall: [0; 1]

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein richtiges Intervall angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$g(x) = a \cdot x^2 + b$

$$\left.\begin{array}{l} g(4) = 3 \\ g'(4) = 0{,}4 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad g(x) = 0{,}05 \cdot x^2 + 2{,}2$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine Gleichung von *g* richtig aufgestellt wird.

Aufgabe 5

Fruchtsäfte

Bei einer Kinderparty werden Getränke gemischt. Dafür stehen 8 verschiedene Fruchtsäfte zur Verfügung.

Aufgabenstellung:

Aus diesen 8 Fruchtsäften werden 3 verschiedene Fruchtsäfte ausgewählt, die zu gleichen Teilen gemischt werden.

– Geben Sie an, wie viele verschiedene Getränke auf diese Art gemischt werden können.

Leitfrage:

Einer der 8 Fruchtsäfte, die ausgewählt werden können, ist Orangensaft. Im Zuge eines Spieles wählt jedes Kind unabhängig von den anderen Kindern mit verbundenen Augen 3 verschiedene Fruchtsäfte zufällig aus und mischt daraus ein Getränk. (Jede Auswahl von 3 Fruchtsäften hat die gleiche Wahrscheinlichkeit, ausgewählt zu werden.)

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass Orangensaft für das Getränk ausgewählt wird.

Es nehmen 10 Kinder an diesem Spiel teil.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 2 der 10 Kinder Orangensaft für ihr Getränk auswählen.

Lösung zur Aufgabe 5

Fruchtsäfte

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\binom{8}{3} = 56$
Es können 56 verschiedene Getränke gemischt werden.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Anzahl angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$p = \frac{1}{8} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{8}$

X ... Anzahl der Kinder, die Orangensaft für ihr Getränk auswählen
$P(X \geq 2) = 1 - ((1 - p)^{10} + 10 \cdot (1 - p)^9 \cdot p) = 0{,}9363...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 93,6 %.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden Wahrscheinlichkeiten richtig berechnet werden.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Haupttermin 2021

Mathematik

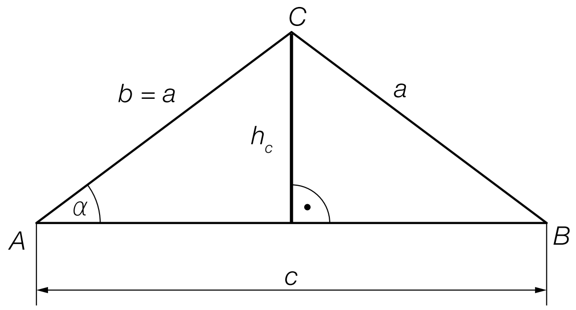
Kompensationsprüfung 2
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Aufgabe 1

Dreiecke

Von einem gleichschenkeligen Dreieck *ABC* sind die Seite $a = 3{,}8$ cm und der Winkel $\alpha = 30°$ gegeben (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze).



Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

Leitfrage:

Der Flächeninhalt des Dreiecks wird um 25 % verkleinert. Dazu wird der Eckpunkt *B* entlang der Seite *c* verschoben. Der neue Eckpunkt wird mit B_1 bezeichnet.
Die Eckpunkte *A* und *C* bleiben unverändert.

– Berechnen Sie die Seitenlängen c_1 und a_1 des verkleinerten Dreiecks AB_1C.

Lösung zur Aufgabe 1

Dreiecke

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \quad \Rightarrow \quad h_c = 1{,}9$

$\cos(\alpha) = \frac{c}{2 \cdot b} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{2} = 3{,}290...$

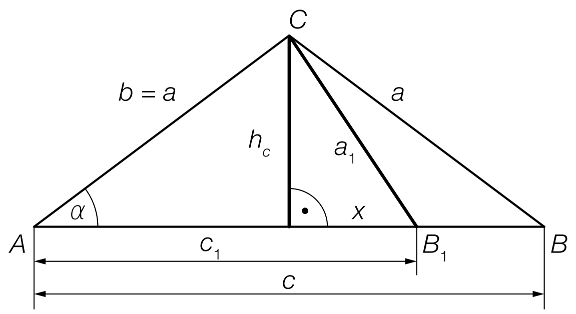
$h_c \cdot \frac{c}{2} = 6{,}252...$

Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt rund 6,25 cm^2.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Flächeninhalt richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:



$A_{neu} = \frac{c \cdot h_c}{2} \cdot 0{,}75$

Da die Höhe h_c unverändert bleibt, gilt:

$c_1 = 0{,}75 \cdot c = 4{,}936... \quad \Rightarrow \quad c_1 \approx 4{,}94 \text{ cm}$

$x = 0{,}25 \cdot c = 1{,}645...$

$a_1 = \sqrt{x^2 + h_c^2} = 2{,}513... \quad \Rightarrow \quad a_1 \approx 2{,}51 \text{ cm}$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Seitenlängen c_1 und a_1 richtig berechnet werden.

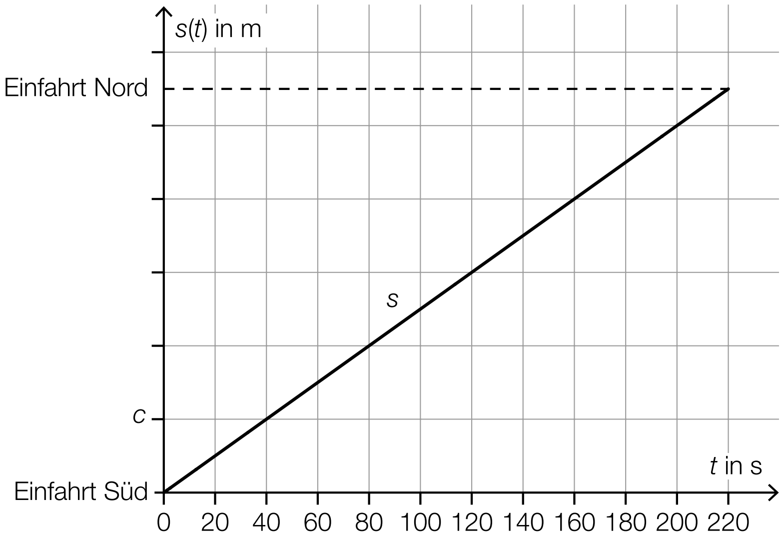
Aufgabe 2

Tunnel

Ein Auto fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 25 m/s durch einen Tunnel (der in Nord-Süd-Richtung verläuft). Die Fahrt durch den gesamten Tunnel dauert 220 s.

Die Entfernung des Autos von der Einfahrt Süd des Tunnels nach *t* Sekunden wird durch die Zeit-Weg-Funktion *s* modelliert.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion *s* dargestellt und die Entfernung *c* von der Einfahrt Süd auf der senkrechten Achse markiert.



Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie die Länge des Tunnels.

– Ermitteln Sie *c*.

Leitfrage:

Ein zweites Auto fährt *x* Sekunden nach dem ersten in den Tunnel ein und durchfährt diesen in entgegengesetzter Richtung (von Einfahrt Nord nach Einfahrt Süd) mit der konstanten Geschwindigkeit *v* (in m/s). Die beiden Autos begegnen einander in einer Entfernung von 3000 m von der Einfahrt Süd. Beide Autos verlassen den Tunnel zum selben Zeitpunkt.

– Ermitteln Sie *v* und *x*.

Lösung zur Aufgabe 2

Tunnel

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$s(220) = 25 \cdot 220 = 5\,500$
Länge des Tunnels: 5 500 m

$c = 1\,000$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Länge des Tunnels richtig berechnet und c richtig ermittelt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

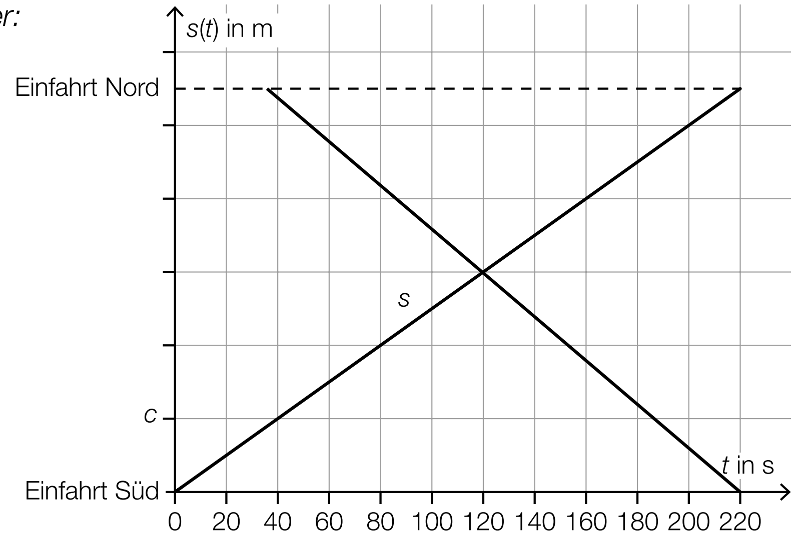
Beide Autos benötigen nach der Begegnung noch 100 s bis zur jeweiligen Ausfahrt.

$v = \frac{3\,000}{100} = 30$
Die Geschwindigkeit v des zweiten Autos beträgt 30 m/s.

Bis zur Begegnung benötigt das erste Auto 120 s.
Das zweite Auto hat bis zur Begegnung 2 500 m zurückgelegt und $\frac{2\,500}{30} = 83{,}3...$, also rund 83 s benötigt.

$\Rightarrow \quad x \approx 37$
Das zweite Auto fährt rund 37 s nach dem ersten Auto in den Tunnel hinein.

oder:



Ablesen aus der Abbildung
$\Rightarrow \quad v = 30$ m/s
$x \approx 37$ s

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn v und x richtig ermittelt werden.
Toleranzintervall für x bei grafischer Lösung: [33; 40]

Aufgabe 3

Freier Fall

Der Weg, den ein bestimmter Körper beim freien Fall zurücklegt, kann in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Funktion s modelliert werden.

$s(t) = 5 \cdot t^2$ mit t in s, $s(t)$ in m

Der freie Fall beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.

Aufgabenstellung:

Der Körper fällt aus einer Höhe von 320 m und trifft zum Zeitpunkt t_1 auf dem Boden auf.

– Ermitteln Sie den Zeitpunkt t_1 sowie die Aufprallgeschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt t_1.

Leitfrage:

– Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt t_2, zu dem die Momentangeschwindigkeit gleich hoch wie die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall [0; 5] ist.

Lösung zur Aufgabe 3

Freier Fall

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$320 = 5 \cdot t_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 8$

$s'(t) = 10 \cdot t$
$s'(8) = 80$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Zeitpunkt t_1 und die Aufprallgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1 richtig ermittelt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

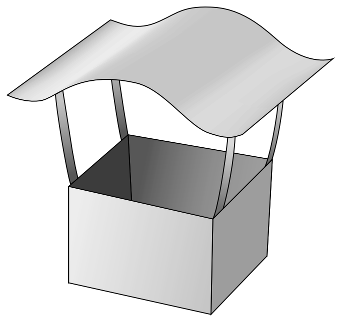
$\frac{s(5) - s(0)}{5 - 0} = 25 \quad \Rightarrow \quad s'(t_2) = 25 \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot t_2 = 25 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 2{,}5$
Zum Zeitpunkt $t_2 = 2{,}5$ ist die Momentangeschwindigkeit gleich der mittleren Geschwindigkeit im Zeitintervall [0; 5].

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn t_2 richtig berechnet wird.

Aufgabe 4

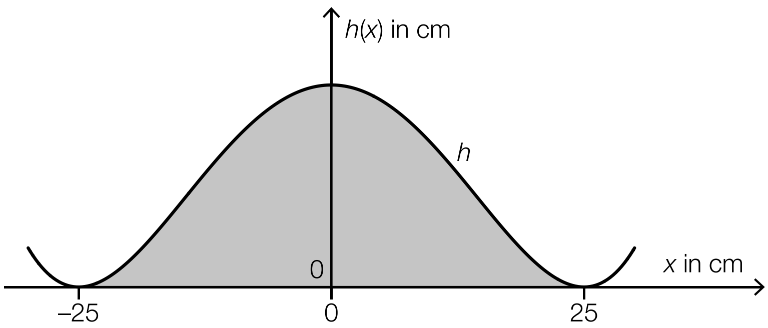
Kaminabdeckung



Die nebenstehende Abbildung zeigt eine Kaminabdeckung.

Aufgabenstellung:

In der nachstehenden Abbildung ist die Seitenansicht einer solchen Kaminabdeckung modellhaft dargestellt.



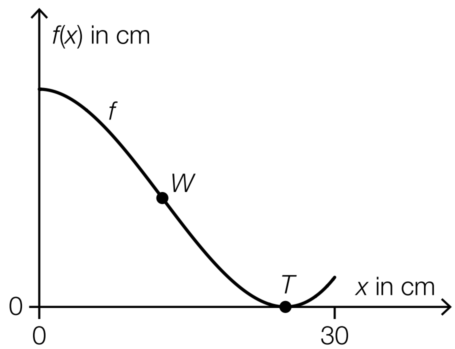
Die obere Begrenzungslinie wird durch den Graphen der Funktion h beschrieben.

$h(x) = \frac{4}{78175} \cdot x^4 - \frac{8}{125} \cdot x^2 + 20$

– Berechnen Sie den Inhalt der grau markierten Fläche.

Leitfrage:

Bei einer anderen Kaminabdeckung wird die obere Begrenzungslinie im Intervall [0; 30] durch den Graphen der Polynomfunktion f beschrieben (siehe nebenstehende Abbildung).



Es gilt:
$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Der Punkt $T = (25|0)$ ist ein Tiefpunkt des Graphen von f.
Der Punkt $W = (12{,}5|10)$ ist ein Wendepunkt des Graphen von f.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d.

Lösung zur Aufgabe 4

Kaminabdeckung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\int_{-25}^{25} h(x)\,\mathrm{d}x = 533{,}2...$

Der Inhalt der grau markierten Fläche beträgt rund 533 cm².

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Inhalt richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$
$f''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$

I: $f(12{,}5) = 10$
II: $f(25) = 0$
III: $f'(25) = 0$
IV: $f''(12{,}5) = 0$

oder:

I: $a \cdot 12{,}5^3 + b \cdot 12{,}5^2 + c \cdot 12{,}5 + d = 10$
II: $a \cdot 25^3 + b \cdot 25^2 + c \cdot 25 + d = 0$
III: $3 \cdot a \cdot 25^2 + 2 \cdot b \cdot 25 + c = 0$
IV: $6 \cdot a \cdot 12{,}5 + 2 \cdot b = 0$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn das Gleichungssystem richtig erstellt wird.

Aufgabe 5

Rubbellose

Auf einem Rubbellos gibt es 3 Felder. Jedes dieser Felder zeigt beim Aufrubbeln mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ein Pinguin-Symbol und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ein Fisch-Symbol.

Bei 3 Pinguin-Symbolen gewinnt man 9 Euro, bei 3 Fisch-Symbolen gewinnt man 3 Euro, in allen anderen Fällen gewinnt man nichts.

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man mit 2 Rubbellosen 18 Euro gewinnt.

Leitfrage:

Die Zufallsvariable X gibt den Geldbetrag (in Euro) an, den man mit 2 Rubbellosen gewinnen kann.

– Geben Sie alle Werte an, die die Zufallsvariable X annehmen kann.

Werte der Zufallsvariablen X: ____

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X = 0)$.

Lösung zur Aufgabe 5

Rubbellose

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{64} = 0{,}015625$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 1,6 %.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Werte der Zufallsvariablen X: 0, 3, 6, 9, 12, 18

Für 1 Rubbellos gilt: P(„drei Pinguine") = P(„drei Fische") = $\frac{1}{8}$

P(„anderes Ergebnis") = $\frac{6}{8}$

$P(X = 0) = \frac{6}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{36}{64} = 0{,}5625$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 56,25 %.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Werte der Zufallsvariablen X angegeben werden und die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet wird.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Haupttermin 2021

Mathematik

Kompensationsprüfung 3
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Aufgabe 1

Lagebeziehung von Geraden

Gegeben sind die drei Geraden

$f\colon X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$

$g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ a \\ -2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$

$h\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$

Es gilt: $a, b, c \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie a und b so, dass die Geraden f und g identisch sind.

Leitfrage:

Der Punkt $F = (-1|2|2)$ liegt auf der Geraden f. Der Punkt $H = (1|c|2)$ liegt auf der Geraden h. Die Geraden f und h schneiden einander, wenn $\overrightarrow{FH} = u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $u, v \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt.

– Ermitteln Sie c so, dass die Geraden f und h einander schneiden.

Lösung zur Aufgabe 1

Lagebeziehung von Geraden

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -4 \\ a \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad b = 3$$

oder:

Damit f und g identisch sind, müssen die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ a \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ b-2 \end{pmatrix}$ parallel sein.

$\Rightarrow \quad a = 2, \; b = 3$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn a und b richtig ermittelt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ c-2 \\ 0 \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$2 = 2 \cdot u + v$

$c - 2 = -u + 2 \cdot v$

$0 = u + v$

$\Rightarrow \quad u = 2, \; v = -2$

$\Rightarrow \quad c = -4$

Lösungsschlüssel:

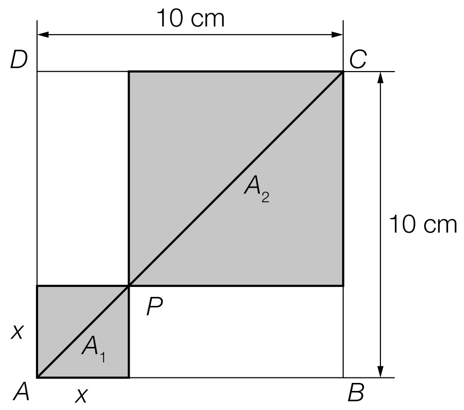
Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn c richtig ermittelt wird.

Aufgabe 2

Quadrate

Gegeben ist das Quadrat *ABCD* mit der Seitenlänge 10 cm. Auf der Diagonalen *AC* wird ein Punkt *P* gewählt. Durch *P* werden Parallele zu den Quadratseiten gelegt, wodurch zwei kleinere Quadrate mit den Flächeninhalten A_1 und A_2 entstehen. (Siehe nachstehende Abbildung.)

Eines dieser beiden kleineren Quadrate hat die Seitenlänge *x* (in cm).



Die Funktion $A: (0; 10) \to \mathbb{R}$ ordnet jeder Seitenlänge *x* die Summe $A_1 + A_2$ zu (*x* in cm, $A(x)$ in cm²).

Aufgabenstellung:

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung von *A* auf.

Leitfrage:

Die Funktion *A* hat die Minimumstelle x_{min}.

– Berechnen Sie x_{min} und bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}^+$ so, dass $A_2 = k \cdot A_1$ gilt.

Lösung zur Aufgabe 2

Quadrate

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$A(x) = x^2 + (10 - x)^2$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Funktionsgleichung von A richtig aufgestellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$A'(x) = 4 \cdot x - 20$
$A'(x_{min}) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{min} = 5$
$A_1 = 25, A_2 = 25 \quad \Rightarrow \quad k = 1$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn x_{min} richtig berechnet und k richtig bestimmt wird.

Aufgabe 3

Brücke

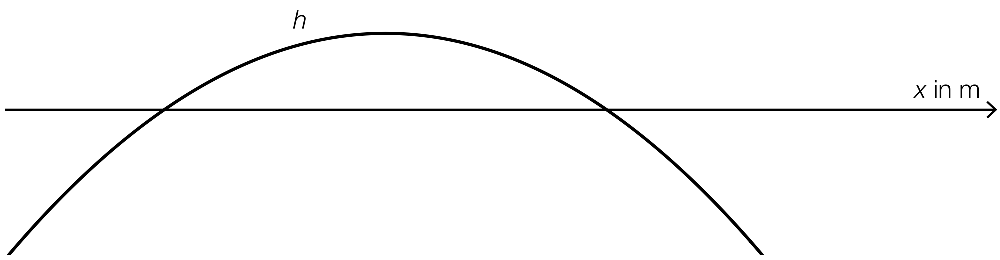
Zur Modellierung von Brückenbögen werden oft quadratische Funktionen verwendet.

Aufgabenstellung:

– Beschreiben Sie, was allgemein über die Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen von quadratischen Funktionen ausgesagt werden kann.

Leitfrage:

Der Brückenbogen einer bestimmten Autobahn-Brücke kann durch die Funktion h mit $h(x) = -\frac{1}{800} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x$ (x, $h(x)$ in m) modelliert werden. Dazu wird ein Koordinatensystem so festgelegt, dass die Fahrbahn durch die x-Achse dargestellt wird. (Siehe nachstehende Abbildung.)



– Berechnen Sie die Nullstellen von h.

– Zeichnen Sie die senkrechte Koordinatenachse in die obige Abbildung ein.

Für ein $x_1 \in \mathbb{R}$ gilt: $h'(x_1) = 0$.

– Interpretieren Sie $h(x_1)$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Lösung zur Aufgabe 3

Brücke

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

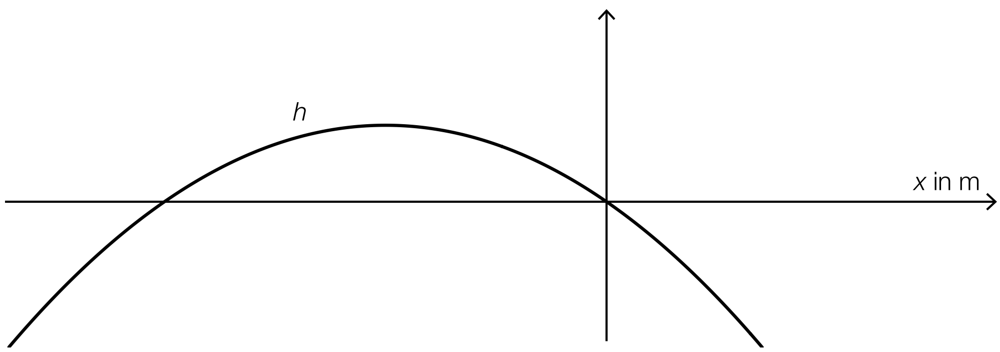
Quadratische Funktionen haben immer genau 1 Extremstelle und keine Wendestelle.
Die Anzahl der Nullstellen ist höchstens 2.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen richtig beschrieben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Lösungen der Gleichung $h(x) = 0$ sind: 0 und –400.



$h(x_1)$ beschreibt die größte Höhe des Brückenbogens (über dem Fahrbahnniveau).

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Nullstellen von h richtig berechnet werden, die senkrechte Koordinatenachse richtig eingezeichnet wird und $h(x_1)$ im gegebenen Sachzusammenhang richtig interpretiert wird.

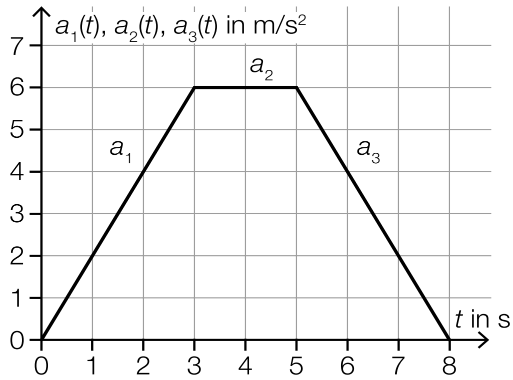
Aufgabe 4

Bewegung eines Fahrzeugs

Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt ein Fahrzeug aus dem Stillstand zu beschleunigen und bewegt sich anschließend auf einer geradlinigen Straße.

Die Beschleunigung dieses Fahrzeugs in Abhängigkeit von der Zeit t wird im Zeitintervall [0; 8] durch die linearen Funktionen $a_1: [0; 3] \to \mathbb{R}$, $a_2: [3; 5] \to \mathbb{R}$ und $a_3: [5; 8] \to \mathbb{R}$ modelliert (t in s; $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$ in m/s²).

In der nebenstehenden Abbildung sind die Graphen von a_1, a_2 und a_3 dargestellt.



Aufgabenstellung:

Die Graphen der Funktionen a_1, a_2, a_3 und die t-Achse schließen ein Flächenstück ein.

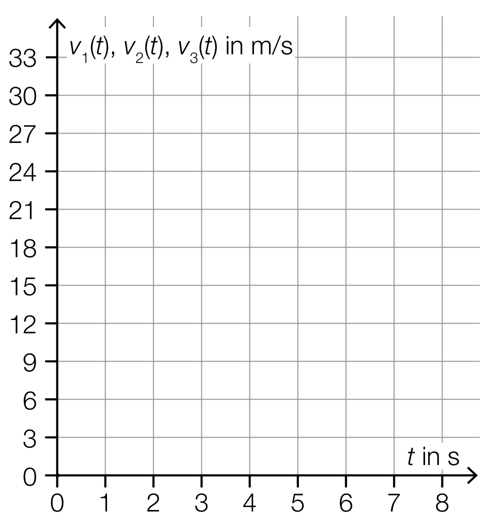
– Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.

– Interpretieren Sie den Inhalt dieses Flächenstücks im gegebenen Sachzusammenhang.

Leitfrage:

Die Geschwindigkeit dieses Fahrzeugs in Abhängigkeit von der Zeit t wird im Zeitintervall [0; 8] durch die Funktionen $v_1: [0; 3] \to \mathbb{R}$, $v_2: [3; 5] \to \mathbb{R}$ und $v_3: [5; 8] \to \mathbb{R}$ beschrieben (t in s; $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$ in m/s).

– Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem die Graphen von v_1, v_2 und v_3 unter Verwendung der Werte an den Intervallgrenzen.



Lösung zur Aufgabe 4

Bewegung eines Fahrzeugs

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Inhalt des Flächenstücks: $\frac{3 \cdot 6}{2} + 2 \cdot 6 + \frac{3 \cdot 6}{2} = 30$

oder:

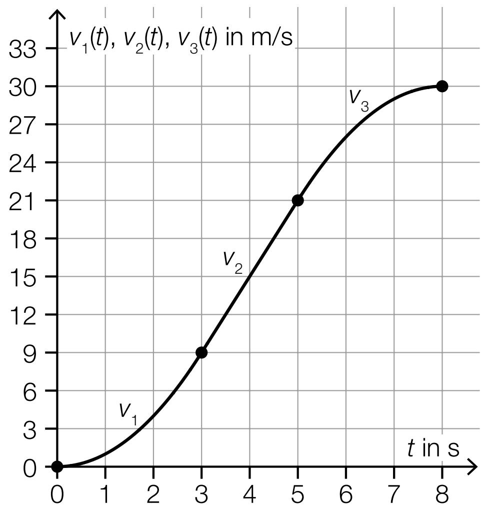
Inhalt des Flächenstücks: $\frac{2 + 8}{2} \cdot 6 = 30$

Nach 8 s beträgt die Geschwindigkeit des Fahrzeugs 30 m/s.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Inhalt des Flächenstücks richtig berechnet und interpretiert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:



Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Graphen richtig skizziert werden. Dabei muss klar erkennbar sein, dass

- v_1 vom Punkt (0|0) zum Punkt (3|9) verläuft und positiv gekrümmt ist,
- v_2 vom Punkt (3|9) zum Punkt (5|21) verläuft und linear ist,
- v_3 vom Punkt (5|21) zum Punkt (8|30) verläuft und negativ gekrümmt ist.

Aufgabe 5

Münzwurf

Bei einem Münzwurf zeigt eine Münze mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder „Kopf“ oder „Zahl“, unabhängig von anderen Würfen.

Aufgabenstellung:

Die Münze wird 2-mal hintereinander geworfen und es wird jeweils das Ergebnis („Kopf“ oder „Zahl“) notiert.

– Geben Sie alle möglichen Versuchsausgänge und deren jeweilige Wahrscheinlichkeit an.

Leitfrage:

Die Münze wird 5-mal hintereinander geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl derjenigen Würfe an, bei denen die Münze „Zahl“ zeigt.

– Begründen Sie, warum die Zufallsvariable X binomialverteilt ist.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Münze bei mehr als 3 Würfen „Zahl“ zeigt.

Lösung zur Aufgabe 5

Münzwurf

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Versuchsausgänge: („Kopf“, „Kopf“), („Kopf“, „Zahl“), („Zahl“, „Kopf“) und („Zahl“, „Zahl“)
Jeder dieser Versuchsausgänge hat eine Wahrscheinlichkeit von 25 %.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle möglichen Versuchsausgänge und deren jeweilige Wahrscheinlichkeit angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt, da gilt:

- Es gibt bei jedem Wurf genau zwei mögliche Versuchsausgänge.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze bei einem Wurf „Kopf“ bzw. „Zahl“ zeigt, ist konstant.
- Die 5 Würfe erfolgen unabhängig voneinander.

$P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0{,}1875 = 18{,}75\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn mindestens 2 der 3 Gründe genannt werden und die Wahrscheinlichkeit richtig ermittelt wird.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Haupttermin 2021

Mathematik

Kompensationsprüfung 4
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

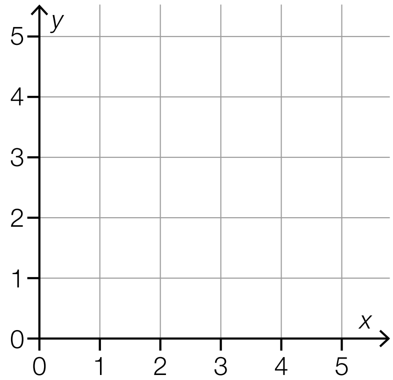
Aufgabe 1

Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabenstellung:

– Zeichnen Sie in der unten stehenden Abbildung $\vec{w}$, $\vec{s}$ sowie $\vec{v} = \vec{w} + \vec{s}$ ausgehend vom Koordinatenursprung ein und geben Sie die Koordinaten von $\vec{v}$ an.



Leitfrage:

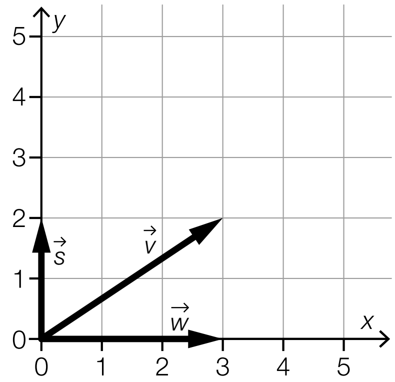
– Ermitteln Sie die Länge v des Vektors $\vec{v}$.

– Ermitteln Sie denjenigen Winkel α, den der Vektor $\vec{v}$ mit der x-Achse einschließt.

Lösung zur Aufgabe 1

Vektoren

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Vektoren richtig eingezeichnet werden und die richtigen Koordinaten von $\vec{v}$ angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$v = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3{,}605... \approx 3{,}61$

$\tan(\alpha) = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 33{,}69...°$

Der Vektor $\vec{v}$ schließt mit der x-Achse einen Winkel α von rund 33,7° ein.

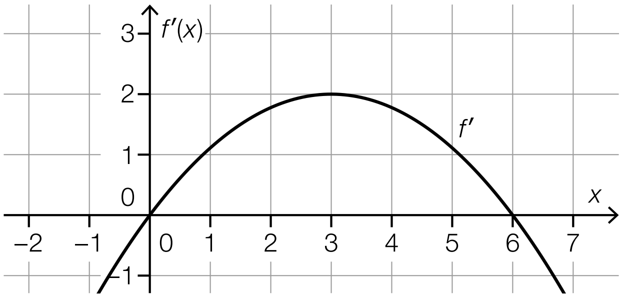
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Länge des Vektors $\vec{v}$ und der Winkel α richtig ermittelt werden.

Aufgabe 2

Eigenschaften eines Funktionsgraphen

Die Funktion f ist eine Polynomfunktion 3. Grades. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f'.



Aufgabenstellung:

Das Intervall $(m; n)$ ist das größtmögliche Intervall, in dem für alle $x \in (m; n)$ gilt:
$f'(x) > 0$
$f''(x) < 0$

– Geben Sie die Intervallgrenzen m und n an.

Leitfrage:

Es gilt:
$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \quad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

– Ermitteln Sie a und b.

Lösung zur Aufgabe 2

Eigenschaften eines Funktionsgraphen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$m = 3$; $n = 6$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden richtigen Werte angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x$

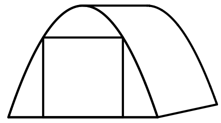
$$\left.\begin{array}{l} f'(3) = 2 \\ f'(6) = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{2}{27},\ b = \frac{2}{3}$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn a und b richtig ermittelt werden.

Aufgabe 3

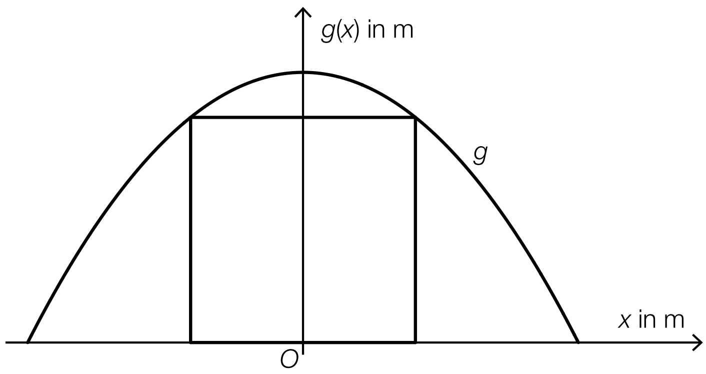
Tiny House



Ein *Tiny House* ist ein besonders kleines Haus.

Aufgabenstellung:

In der nachstehenden Abbildung ist das Modell *Eiche* in der Ansicht von vorne dargestellt. Die obere Begrenzungslinie kann durch die Funktion g beschrieben werden.



An einer bestimmten Stelle x_0 gilt: $g(x_0) = 0$ und $g'(x_0) < 0$.

– Markieren Sie die Stelle x_0 in der obigen Abbildung.

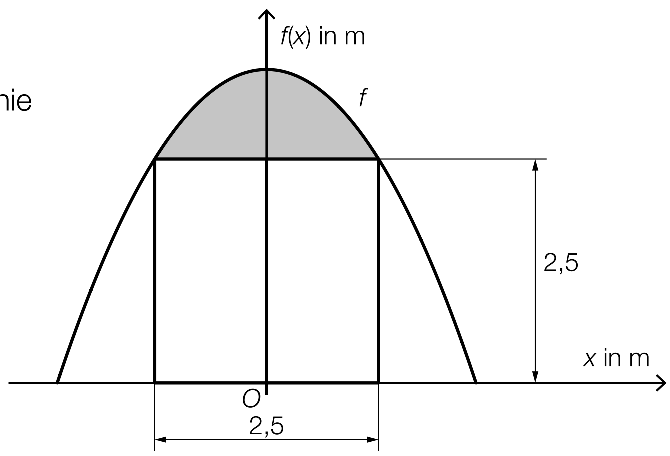
Leitfrage:

In der nebenstehenden nicht maßstabgetreuen Abbildung ist das Modell *Buche* in der Ansicht von vorne dargestellt. Die obere Begrenzungslinie kann durch die Funktion f beschrieben werden.

Für die Funktion f gilt:

$f(x) = a \cdot x^2 + 3{,}5$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

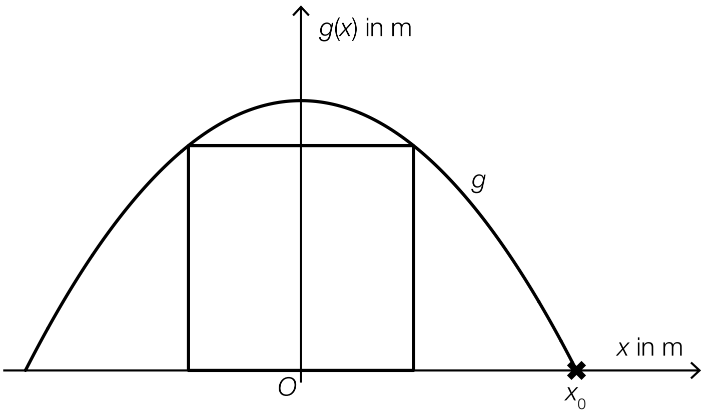


– Berechnen Sie den Inhalt A der grau markierten Fläche (A in m^2).

Lösung zur Aufgabe 3

Tiny House

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Stelle markiert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$f(1{,}25) = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad a = -0{,}64$
$f(x) = -0{,}64 \cdot x^2 + 3{,}5$

$$A = \int_{-1{,}25}^{1{,}25} (f(x) - 2{,}5)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Inhalt der Fläche richtig berechnet wird.

Aufgabe 4

Parameterbestimmung

Im Folgenden werden quadratische Funktionen mit jeweils einem Parameter betrachtet.

Aufgabenstellung:

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^2 + 2 \cdot x + a^2$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

– Ermitteln Sie a so, dass die absolute Änderung von f im Intervall [1; 7] den Wert 30 hat.

Leitfrage:

Gegeben ist die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = c \cdot x^2 + 2 \cdot x + c^2$ mit $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

– Ermitteln Sie c so, dass das bestimmte Integral $\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x$ den kleinstmöglichen Wert liefert.

Lösung zur Aufgabe 4

Parameterbestimmung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$f(7) - f(1) = 30 \quad \Rightarrow \quad 49 \cdot a + 14 + a^2 - a - 2 - a^2 = 30 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{8}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn *a* richtig ermittelt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x = \left(c \cdot \frac{x^3}{3} + x^2 + c^2 \cdot x\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3} \cdot c + 4 + 2 \cdot c^2 = W(c)$

$W'(c) = \frac{8}{3} + 4 \cdot c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{2}{3}$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn *c* richtig ermittelt wird.

Aufgabe 5

Schweizer Zahlenlotto

Beim Schweizer Zahlenlotto werden aus den Zahlen von 1 bis 42 sechs verschiedene Zahlen zufällig und ohne Zurücklegen gezogen. Die Reihenfolge, in der die Zahlen gezogen werden, spielt dabei keine Rolle.

Lara wählt die Zahlen 2, 4, 6, 8, 10 und 12 aus.

Aufgabenstellung:

– Geben Sie an, wie viele verschiedene Möglichkeiten es dafür gibt, dass <u>keine einzige</u> der gezogenen Zahlen mit den von Lara ausgewählten Zahlen übereinstimmt.

Leitfrage:

Zu Beginn werden die Zahlen 2 und 4 gezogen.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine weitere der gezogenen Zahlen mit den von Lara ausgewählten Zahlen übereinstimmt.

Lösung zur Aufgabe 5

Schweizer Zahlenlotto

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\binom{36}{6} = 1\,947\,792$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Anzahl der Möglichkeiten angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$1 - \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{34}{38} \cdot \frac{33}{37} = 0{,}3554...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 35,5 %.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet wird.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Haupttermin 2021

Mathematik

Kompensationsprüfung 5
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Aufgabe 1

Normale Geraden

Gegeben sind die Geraden $g: X = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$ und $h: X = \begin{pmatrix} a \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ b \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie b so, dass die Richtungsvektoren der beiden Geraden normal aufeinander stehen.

Leitfrage:

Die beiden aufeinander normal stehenden Geraden g und h schneiden einander im Punkt S.

– Ermitteln Sie a.

– Ermitteln Sie die Koordinaten von S.

Lösung zur Aufgabe 1

Normale Geraden

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -10 - 2 + 3 \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 4$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn b richtig ermittelt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$-1 - 2 \cdot s = a + 5 \cdot t$
$4 + s = 5 - 2 \cdot t$
$5 + 3 \cdot s = -2 + 4 \cdot t$
$\Rightarrow \quad s = -1;\ t = 1;\ a = -4$
Durch Einsetzen von $s = -1$ in g (bzw. $t = 1$ in h) erhält man $S = (1|3|2)$.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn a und S richtig ermittelt werden.

Aufgabe 2

Baldwin Street

Die steilste Straße der Welt ist laut dem *Guinness-Buch der Rekorde* die Baldwin Street in Neuseeland. In einem bestimmten geradlinig verlaufenden Straßenabschnitt beträgt die Steigung 35 %.

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie den Steigungswinkel α dieses Straßenabschnitts.

Leitfrage:

Der Höhenunterschied dieses Straßenabschnitts beträgt h Meter.

– Interpretieren Sie $h \cdot \tan(90° - \alpha)$ im gegebenen Sachzusammenhang und erläutern Sie Ihre Interpretation anhand einer Skizze.

Lösung zur Aufgabe 2

Baldwin Street

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

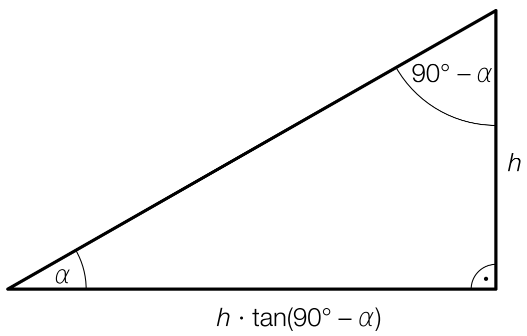
$\tan(\alpha) = \frac{35}{100} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 19{,}29...° \approx 19{,}3°$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn α richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Durch $h \cdot \tan(90° - \alpha)$ wird die horizontale Entfernung für den Straßenabschnitt mit der maximalen Steigung angegeben.



Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn $h \cdot \tan(90° - \alpha)$ im gegebenen Sachzusammenhang richtig interpretiert und diese Interpretation anhand einer Skizze richtig erläutert wird.

Aufgabe 3

Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion f mit $f(t) = a \cdot b^t$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}^+$ verläuft durch den Punkt $P = (1 \mid 1{,}125)$.
Es gilt: $f(3) = 0{,}5625 \cdot f(1)$.

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie a und b.

Leitfrage:

Die Funktion mit den in der Aufgabenstellung ermittelten Parametern a und b beschreibt die Masse $f(t)$ einer radioaktiven Substanz in Abhängigkeit von der Zeit t.
Es gilt: t in h, $f(t)$ in mg.

– Geben Sie an, wie viel Prozent der Masse a nach 15 min noch vorhanden sind.

– Berechnen Sie die Halbwertszeit dieser radioaktiven Substanz.

Lösung zur Aufgabe 3

Exponentialfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$f(3) = b^2 \cdot f(1) \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}75$

$f(1) = a \cdot 0{,}75 = 1{,}125 \quad \Rightarrow \quad a = 1{,}5$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn *a* und *b* richtig berechnet werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$f(t) = 1{,}5 \cdot 0{,}75^t$

$0{,}75^{\frac{15}{60}} = 0{,}930...$
Nach 15 Minuten sind noch rund 93 % der Masse *a* vorhanden.

$0{,}5 = 0{,}75^{\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = 2{,}40...$
Die Halbwertszeit beträgt rund 2,4 Stunden.

Lösungsschlüssel:

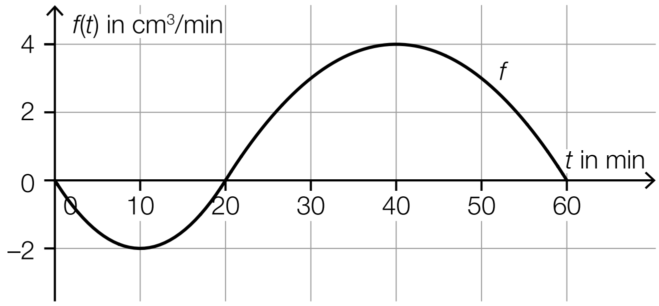
Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Prozentsatz angegeben und die Halbwertszeit richtig berechnet wird.

Aufgabe 4

Regenwasser

Die Funktion f gibt die momentane Änderungsrate der Regenwassermenge in einem bestimmten Gefäß in Abhängigkeit von der Zeit t im Verlauf von 60 Minuten an.

Der Graph dieser Funktion f ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Aufgabenstellung:

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden sich in diesem Gefäß R_0 cm³ Regenwasser.

– Stellen Sie einen Term zur Berechnung der Regenwassermenge (in cm³) in diesem Gefäß zum Zeitpunkt $t = 60$ auf.

Leitfrage:

Jemand behauptet, dass sich zum Zeitpunkt $t = 0$ höchstens 10 cm³ Regenwasser in dem Gefäß befunden haben können.

– Erklären Sie anhand der Abbildung, warum diese Behauptung falsch sein muss.

Lösung zur Aufgabe 4

Regenwasser

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$R_0 + \int_0^{60} f(t)\,\mathrm{d}t$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Term richtig aufgestellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Diese Behauptung ist falsch, da der Inhalt des vom Graphen der Funktion f und der waagrechten Achse eingeschlossenen Flächenstücks größer als 10 ist.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn anhand der Abbildung richtig erklärt wird.

Aufgabe 5

Zufallsversuch

Ein bestimmter Zufallsversuch wird n-mal durchgeführt ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). Bei jeder Durchführung tritt „Erfolg" (unabhängig von den anderen Durchführungen) mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 auf.

Aufgabenstellung:

Die Wahrscheinlichkeit P dafür, dass „Erfolg" höchstens 1-mal auftritt, soll berechnet werden.

– Geben Sie diese Wahrscheinlichkeit P in Abhängigkeit von n an.

$P =$ ____

Leitfrage:

Es gilt: $n = 10$.
Bei der zehnten Durchführung (und nur bei dieser) erhöht sich aufgrund geänderter Bedingungen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass „Erfolg" auftritt, auf 0,3.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass „Erfolg" genau 1-mal auftritt.

Lösung zur Aufgabe 5

Zufallsversuch

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$P = 0{,}8^n + n \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{n-1}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn P richtig angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$0{,}8^9 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}7 = 0{,}2516...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 25,2 %.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet wird.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Haupttermin 2021

Mathematik

Kompensationsprüfung 6
Angabe für **Prüfer/innen**

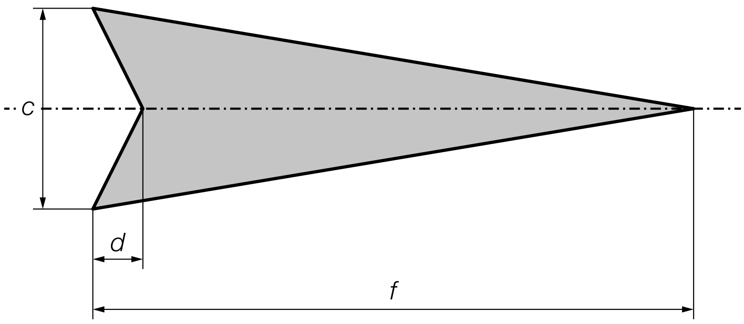
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Aufgabe 1

Pfeil

Aufgabenstellung:

In der nachstehenden Abbildung ist ein Pfeil in der Ebene modellhaft dargestellt. Die strichpunktiert dargestellte Linie ist die Symmetrieachse dieses Pfeiles.

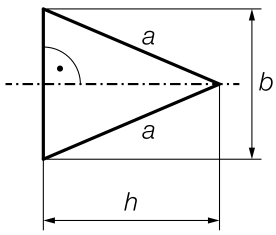


– Stellen Sie mithilfe von c, d und f eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche auf.

$A =$ ____

Leitfrage:

In der nachstehenden Abbildung ist die Spitze eines Pfeiles in der Ebene modellhaft dargestellt. Die strichpunktiert dargestellte Linie ist die Symmetrieachse der Spitze des Pfeiles.



Das in der obigen Abbildung dargestellte gleichschenkelige Dreieck hat die Basis $b = 6$ cm, die Schenkellänge a cm und die Höhe $h = 7$ cm. Der Flächeninhalt des Dreiecks soll bei gleich langer Basis um 20 % vergrößert werden.

– Berechnen Sie, wie lang die beiden Schenkel dieses Dreiecks nach der Vergrößerung sind.

Lösung zur Aufgabe 1

Pfeil

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$A = \frac{1}{2} \cdot (c \cdot f - c \cdot d)$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Formel richtig aufgestellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$A_{\text{vorher}} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$
$A_{\text{nachher}} = 21 \cdot 1{,}2 = 25{,}2$
$A_{\text{nachher}} = \frac{h_{\text{nachher}} \cdot 6}{2} \quad \Rightarrow \quad h_{\text{nachher}} = 8{,}4 \text{ cm}$
$a_{\text{nachher}} = \sqrt{8{,}4^2 + 3^2} = 8{,}91...$
Die Schenkel des Dreiecks haben nach der Vergrößerung eine Länge von rund 8,9 cm.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Länge richtig berechnet wird.

Aufgabe 2

Bergbahn

Die Talstation einer Bergbahn befindet sich in 1000 m Seehöhe. Die horizontale Entfernung zwischen der Talstation und der Bergstation beträgt 2500 m. Der Verlauf der Bahntrasse wird im Folgenden geradlinig modelliert und hat eine konstante Steigung von 41 %.

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie den Steigungswinkel der Bahntrasse.

– Berechnen Sie die Seehöhe der Bergstation.

Leitfrage:

Die Fahrzeit dieser Bergbahn von der Talstation zur Bergstation beträgt 5 min.

Die Funktion p mit $p(h) = 1000 \cdot e^{-0{,}000126 \cdot h}$ gibt näherungsweise den Luftdruck in der Seehöhe h an (h in m, $p(h)$ in mbar).

– Berechnen Sie die durchschnittliche absolute Abnahme des Luftdrucks pro Minute während einer Fahrt mit dieser Bergbahn von der Talstation zur Bergstation.

Lösung zur Aufgabe 2

Bergbahn

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

α ... Steigungswinkel der Bahntrasse
x ... Differenz zwischen der Seehöhe der Bergstation und der Seehöhe der Talstation

$\tan(\alpha) = 0{,}41 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 22{,}29...°$

$0{,}41 = \frac{x}{2\,500} \quad \Rightarrow \quad x = 1\,025$

Die Bergstation befindet sich in 2 025 m Seehöhe.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Steigungswinkel und die Seehöhe der Bergstation richtig berechnet werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\frac{p(2\,025) - p(1\,000)}{5} = -21{,}3...$
Die durchschnittliche absolute Abnahme des Luftdrucks beträgt rund 21 mbar/min.

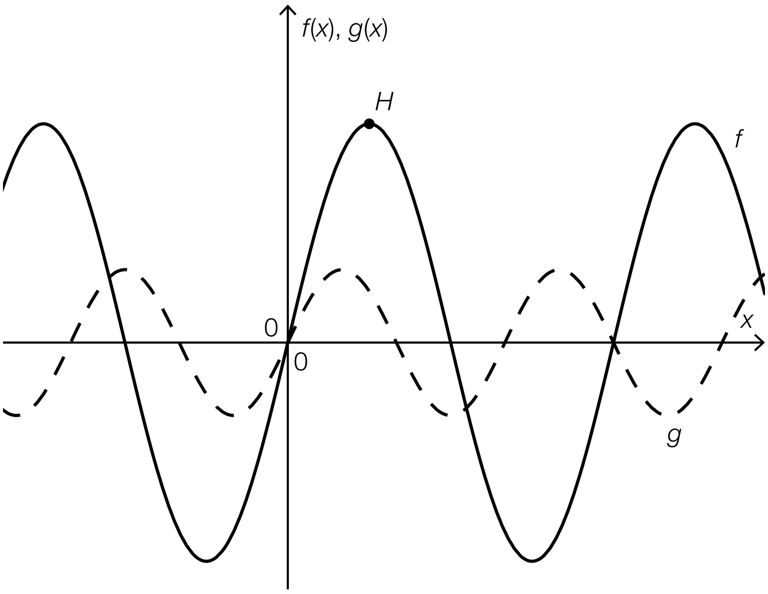
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die durchschnittliche absolute Abnahme des Luftdrucks richtig berechnet wird, wobei die Einheit „mbar/min“ nicht angegeben werden muss.

Aufgabe 3

Winkelfunktionen

In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ und $g(x) = c \cdot \sin(d \cdot x)$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ dargestellt.



Aufgabenstellung:

– Setzen Sie jeweils das passende Zeichen „<“, „>“ oder „=“ ein und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

a _____ c

b _____ d

Leitfrage:

Der in der obigen Abbildung mit H gekennzeichnete Hochpunkt des Graphen von f hat die Koordinaten $H = \left(\frac{\pi}{4} \middle| 3\right)$.

– Ermitteln Sie a und b.

Lösung zur Aufgabe 3

Winkelfunktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$a > c$
Die Funktion f hat einen größeren Maximalwert als die Funktion g.

$b < d$
Die Funktion f hat eine größere Periodenlänge als die Funktion g.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Zeichen eingesetzt werden und richtige Begründungen (auch unter Verwendung der Ausdrücke „Amplitude" und „Frequenz") angeführt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$a = 3$

$$b = \frac{2 \cdot \pi}{\frac{\pi}{4} \cdot 4} = 2$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn a und b richtig ermittelt werden.

Aufgabe 4

Beschleunigungsrennen

Jan und Tom nehmen an einem Beschleunigungsrennen teil. Sie starten gleichzeitig zur Zeit $t = 0$. Die Geschwindigkeiten ihrer Fahrzeuge in den ersten Sekunden können durch die beiden Funktionen v_J und v_T beschrieben werden.

t ... Zeit in s
$v_J(t)$ ... Geschwindigkeit von Jans Fahrzeug zum Zeitpunkt t in m/s
$v_T(t)$ ... Geschwindigkeit von Toms Fahrzeug zum Zeitpunkt t in m/s

Aufgabenstellung:

Für die Zeit-Geschwindigkeit-Funktion v_J gilt:

$v_J(t) = 0{,}6 \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}09 \cdot t}$

– Ermitteln Sie die Beschleunigung von Jans Fahrzeug zur Zeit $t = 10$.

Leitfrage:

Zur Zeit t_1 befindet sich Toms Fahrzeug vor Jans Fahrzeug. Die Entfernung der beiden Fahrzeuge zur Zeit t_1 beträgt d Meter.

– Stellen Sie mithilfe von v_J und v_T eine Formel zur Berechnung von d auf.

$d =$ ____

Lösung zur Aufgabe 4

Beschleunigungsrennen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$v_J'(10) = 2{,}68...$
Die Beschleunigung beträgt rund 2,7 m/s^2.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Beschleunigung richtig ermittelt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$d = \int_0^{t_1} v_T(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{t_1} v_J(t)\,\mathrm{d}t$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Formel richtig aufgestellt wird.

Aufgabe 5

Bälle

Aufgabenstellung:

In einer Kiste mit 30 Bällen befinden sich 14 rote und 16 gelbe Bälle.

Marie zieht zufällig und ohne Zurücklegen nacheinander 2 Bälle aus der Kiste.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Marie dabei 2 Bälle gleicher Farbe zieht.

Leitfrage:

In einer anderen Kiste mit 4 Bällen befinden sich 3 weiße Bälle und 1 grüner Ball.
Eva zieht zufällig und ohne Zurücklegen, bis sie den grünen Ball zieht.

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gezogenen Bälle an. Nimmt X den Wert 2 an, so bedeutet das, dass der erste Ball weiß und der zweite Ball grün ist.

– Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Lösung zur Aufgabe 5

Bälle

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\frac{14}{30} \cdot \frac{13}{29} + \frac{16}{30} \cdot \frac{15}{29} = \frac{211}{435} = 0{,}4850... \approx 48{,}5\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit richtig ermittelt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Erwartungswert: $1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + 4 \cdot P(X = 4)$

$= 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Erwartungswert richtig berechnet wird.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Haupttermin 2021

Mathematik

Kompensationsprüfung 7
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Aufgabe 1

Geraden

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A = (x_A | y_A)$ und $B = (x_B | y_B)$ mit $x_A < x_B$ und $y_A < y_B$ ($x_A, y_A, x_B, y_B \in \mathbb{R}$). Sie schließt mit der x-Achse den Winkel α ein.

Aufgabenstellung:

– Stellen Sie eine Gleichung auf, die den Zusammenhang zwischen α und den Koordinaten von A und B beschreibt.

Leitfrage:

Die Gleichung der Geraden g lautet: $3 \cdot x - 4 \cdot y = 13$.

– Berechnen Sie α.

– Stellen Sie mithilfe von x_A eine Formel zur Berechnung von y_A auf.

$y_A =$ ____

Lösung zur Aufgabe 1

Geraden

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\tan(\alpha) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Gleichung richtig aufgestellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\tan(\alpha) = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 36{,}86...°$

$y_A = \frac{3 \cdot x_A - 13}{4}$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn α richtig berechnet und die Formel richtig aufgestellt wird.

Aufgabe 2

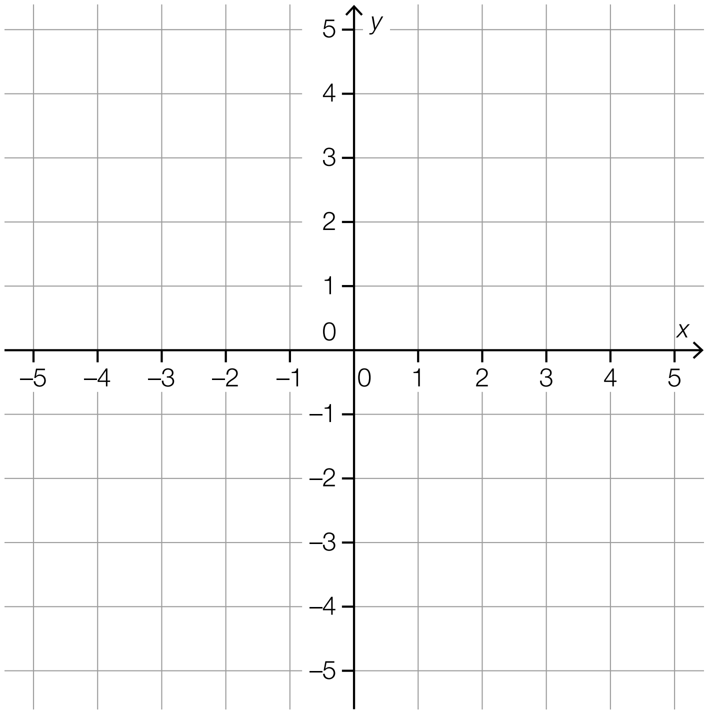
Polynomfunktion 3. Grades

Von der Polynomfunktion 3. Grades *f* ist Folgendes bekannt:

- –4 ist eine Nullstelle von *f*.
- 0 ist eine Wendestelle von *f*.
- 2 ist eine lokale Minimumstelle von *f*.

Aufgabenstellung:

– Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen einer solchen Polynomfunktion *f* und markieren Sie alle Extrem- und Wendepunkte auf dem Graphen.



Leitfrage:

Von einer Polynomfunktion *g* ist Folgendes bekannt:

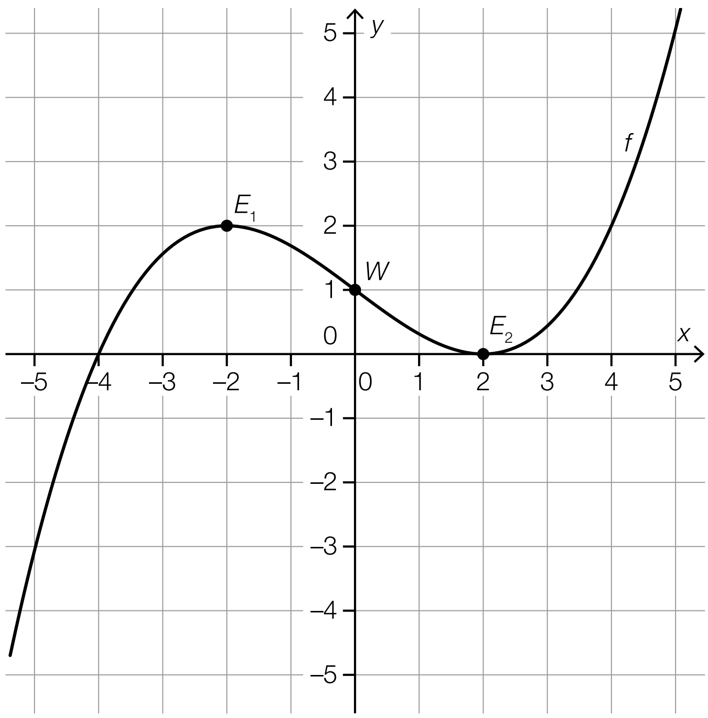
- 0 ist eine lokale Minimumstelle von *g*.
- 2 ist eine lokale Maximumstelle von *g*.
- 3 ist eine Wendestelle von *g*.

– Begründen Sie, warum es sich bei *g* <u>nicht</u> um eine Polynomfunktion 3. Grades handeln kann.

Lösung zur Aufgabe 2

Polynomfunktion 3. Grades

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Graph richtig skizziert wird und alle Extrem- und Wendepunkte markiert werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Eine Polynomfunktion 3. Grades hat genau eine Wendestelle. Diese Wendestelle liegt zwischen den beiden lokalen Extremstellen (falls vorhanden). Außerhalb des Intervalls [0; 2] kann daher keine weitere Wendestelle liegen.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn richtig begründet wird.

Aufgabe 3

Rechtecke und Umkreise

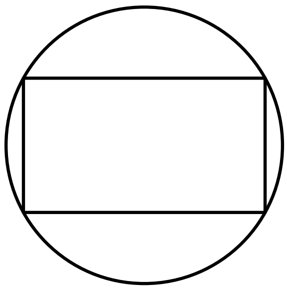
Betrachtet werden Rechtecke mit der Länge a und der Breite $a - 4$ mit $a > 4$.
Die Funktion A ordnet jeder Länge a den Flächeninhalt $A(a)$ des Rechtecks zu (a in cm, $A(a)$ in cm²).

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie $A(7) - A(5)$ und interpretieren Sie diesen Wert im gegebenen Sachzusammenhang.

Leitfrage:

Den Rechtecken wird jeweils ein Kreis, der sogenannte Umkreis, umschrieben (siehe nachstehende Abbildung).



Die Funktion K ordnet jeder Länge a eines solchen Rechtecks den Flächeninhalt $K(a)$ des zugehörigen Umkreises zu (a in cm, $K(a)$ in cm²).

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung von K auf.

Für alle $a > 4$ gilt: $K(a) > 1{,}5 \cdot A(a)$.

– Interpretieren Sie diese Ungleichung im gegebenen Sachzusammenhang.

Lösung zur Aufgabe 3

Rechtecke und Umkreise

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$A(7) - A(5) = 21 - 5 = 16$

Ein solches Rechteck mit einer Länge von 7 cm hat einen um 16 cm² größeren Flächeninhalt als ein solches Rechteck mit einer Länge von 5 cm.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert richtig berechnet und interpretiert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Für den Durchmesser d des Umkreises gilt: $d^2 = a^2 + (a - 4)^2$

$K(a) = \left(\frac{a^2}{2} - 2 \cdot a + 4\right) \cdot \pi$

Der Flächeninhalt des Umkreises ist für $a > 4$ mehr als 1,5-mal so groß wie der Flächeninhalt des Rechtecks.

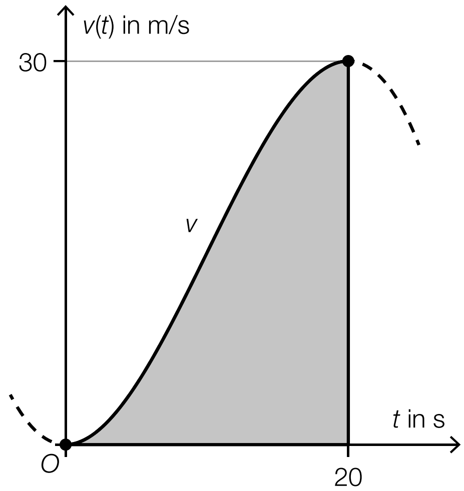
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Funktionsgleichung richtig aufgestellt und die Ungleichung richtig interpretiert wird.

Aufgabe 4

Autofahrt

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Zeit-Geschwindigkeit-Funktion v für die ersten 20 s einer bestimmten Autofahrt dargestellt.



t ... Fahrzeit des Autos in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit des Autos zur Zeit t in m/s

Aufgabenstellung:

– Interpretieren Sie den Inhalt der grau markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

Leitfrage:

Für die Funktion v gilt:
$v(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ mit $0 \leq t \leq 20$

An den Stellen $t = 0$ und $t = 20$ hat der Graph der Funktion v jeweils eine waagrechte Tangente.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d.

Lösung zur Aufgabe 4

Autofahrt

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Der Inhalt der grau markierten Fläche entspricht dem zurückgelegten Weg des Autos in Metern während der ersten 20 s dieser Autofahrt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Inhalt im gegebenen Sachzusammenhang richtig interpretiert und die richtige Einheit angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$v'(t) = 3 \cdot a \cdot t^2 + 2 \cdot b \cdot t + c$

I: $v(0) = 0$
II: $v(20) = 30$
III: $v'(0) = 0$
IV: $v'(20) = 0$

oder:

I: $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$
II: $a \cdot 20^3 + b \cdot 20^2 + c \cdot 20 + d = 30$
III: $3 \cdot a \cdot 0^2 + 2 \cdot b \cdot 0 + c = 0$
IV: $3 \cdot a \cdot 20^2 + 2 \cdot b \cdot 20 + c = 0$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn das Gleichungssystem richtig erstellt wird.

Aufgabe 5

TAN-Codes

Beim Onlinebanking wird für die Freigabe von Transaktionen häufig durch einen Zufallsgenerator ein 5 Zeichen langer TAN-Code erzeugt. An jeder der 5 Stellen kann dabei eine der 10 Ziffern (0 bis 9) oder einer von 25 Großbuchstaben (A bis Z mit Ausnahme von O) stehen. Für jede Stelle wird jedes der 35 möglichen Zeichen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ausgewählt (unabhängig von den anderen Stellen). Es kann daher ein Zeichen auch öfter als einmal im TAN-Code vorkommen.

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein so erzeugter TAN-Code aus 2 Ziffern und 3 Buchstaben (in beliebiger Reihenfolge) besteht.

Leitfrage:

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p, dass ein TAN-Code mindestens ein Zeichen mehrfach enthält.

Es werden unabhängig voneinander 6 000 TAN-Codes erzeugt.

– Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl an TAN-Codes, die mindestens ein Zeichen mehrfach enthalten.

Lösung zur Aufgabe 5

TAN-Codes

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{10}{35}\right)^2 \cdot \left(\frac{25}{35}\right)^3 = 0{,}2974...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 29,7 %.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$p = 1 - P(\text{„kein Zeichen mehrfach“})$
$p = 1 - \frac{35}{35} \cdot \frac{34}{35} \cdot \frac{33}{35} \cdot \frac{32}{35} \cdot \frac{31}{35} = 0{,}2582...$

Die Wahrscheinlichkeit p beträgt rund 25,8 %.

Erwartungswert: $6\,000 \cdot p = 1\,549{,}7...$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit p und der Erwartungswert richtig berechnet werden.

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Haupttermin 2021

Mathematik

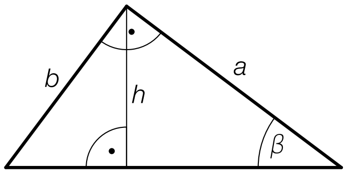
Kompensationsprüfung 8
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Aufgabe 1

Sonnensegel

Ein Sonnensegel hat die Form eines rechtwinkeligen Dreiecks (siehe nachstehende Abbildung).



Aufgabenstellung:

– Stellen Sie mithilfe von h und β eine Formel zur Berechnung von b auf.

b = ____

Leitfrage:

Es soll ein neues Sonnensegel montiert werden, bei dem alle Seitenlängen doppelt so groß wie beim bisherigen Sonnensegel sind.

– Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Flächeninhalt des neuen Sonnensegels 4-mal so groß wie jener des bisherigen Sonnensegels ist.
– Begründen Sie, warum der Winkel β gleich groß bleibt.

Lösung zur Aufgabe 1

Sonnensegel

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$b = \frac{h}{\cos(\beta)}$

oder:

$b = \frac{h}{\sin(90° - \beta)}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Formel richtig aufgestellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$A_{\text{alt}} = \frac{a \cdot b}{2}$

$A_{\text{neu}} = \frac{2 \cdot a \cdot 2 \cdot b}{2} = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = 4 \cdot A_{\text{alt}}$

Der Flächeninhalt ist also 4-mal so groß.

$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2 \cdot b}{2 \cdot a}\right)$

oder:

In ähnlichen Dreiecken sind einander entsprechende Winkel gleich groß.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn richtig nachgewiesen wird, dass der Flächeninhalt 4-mal so groß ist, und richtig begründet wird, warum der Winkel β gleich groß bleibt.

Aufgabe 2

Zwei Flugzeuge

Zwei Flugzeuge fliegen mit jeweils konstanter Geschwindigkeit.
Ihre Flugstrecken können in einem 3-dimensionalen Koordinatensystem dargestellt werden.

Das erste Flugzeug bewegt sich zwischen 10:00 Uhr und 10:30 Uhr entlang der Geraden g_1.
Um 10:00 Uhr befindet es sich im Punkt $(-100|100|6)$.
Um 10:30 Uhr befindet es sich im Punkt $(200|-80|6)$.

Aufgabenstellung:

– Stellen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g_1 der Form $g_1\colon X = P + t \cdot \vec{g}_1,\ t \in \mathbb{R}$ auf.
Dabei gibt $t \in [0; 30]$ die Anzahl der Minuten an, die seit 10:00 Uhr vergangen sind.

Leitfrage:

Das zweite Flugzeug bewegt sich zwischen 10:00 Uhr und 10:30 Uhr entlang der Geraden g_2 mit $g_2\colon X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$. Dabei gibt $s \in [0; 30]$ die Anzahl der Minuten an, die seit 10:00 Uhr vergangen sind.

– Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der beiden Geraden und begründen Sie, warum es zu keinem Zusammenstoß der beiden Flugzeuge kommt.

Lösung zur Aufgabe 2

Zwei Flugzeuge

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$g_1: X = \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Parameterdarstellung richtig aufgestellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$\begin{pmatrix} -100 \\ 100 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$s = 5,\ t = 15 \quad \Rightarrow \quad S = (50|10|6)$

Das erste Flugzeug ist um 10:15 Uhr im Punkt S, das zweite Flugzeug um 10:05 Uhr.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Koordinaten des Schnittpunkts S richtig berechnet werden und eine richtige Begründung angegeben wird.

Aufgabe 3

Bakterien

Die Anzahl bestimmter Bakterien kann in Abhängigkeit von der Zeit t im Zeitintervall [70; 140] durch eine Exponentialfunktion B modellhaft beschrieben werden (t in min).
In der nachstehenden Tabelle ist für zwei Zeitpunkte die jeweilige Anzahl dieser Bakterien angegeben.

t	70	140
$B(t)$	80	320

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Bakterien im Zeitintervall [70; 140]. Geben Sie die zugehörige Einheit an.

Leitfrage:

– Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt t_1, zu dem die momentane Änderungsrate gleich hoch wie die mittlere Änderungsrate im Zeitintervall [70; 140] ist.

Lösung zur Aufgabe 3

Bakterien

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\frac{B(140) - B(70)}{140 - 70} = \frac{320 - 80}{70} = \frac{24}{7} = 3{,}42...$

Die mittlere Änderungsrate beträgt rund 3,4 Bakterien pro Minute.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die mittlere Änderungsrate richtig berechnet und die richtige Einheit angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$B(t) = 20... \cdot e^{0{,}01980... \cdot t}$

$B'(t_1) = 0{,}396... \cdot e^{0{,}01980... \cdot t_1} = \frac{24}{7} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 108{,}9...$

$t_1 \approx 109$ min

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn t_1 richtig ermittelt wird.

Aufgabe 4

Wertetabelle

Für eine Polynomfunktion f gilt:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	–4	0	–10
1	–8	–6	2

Aufgabenstellung:

– Geben Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x$ an.

Leitfrage:

Nachstehend sind drei Aussagen über die Funktion f angeführt.

- Aussage 1: Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ eine lokale Minimumstelle.
- Aussage 2: Die Funktion f ist an der Stelle $x = 1$ linksgekrümmt (positiv gekrümmt).
- Aussage 3: Die Funktion f hat im Intervall $(0; 1)$ zumindest eine Wendestelle.

– Geben Sie für jede der angeführten Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

Lösung zur Aufgabe 4

Wertetabelle

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(0) = -4$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert des bestimmten Integrals angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Aussage 1 ist falsch, da $f''(0) < 0$ gilt.

Aussage 2 ist wahr, da die 2. Ableitung von f an der Stelle $x = 1$ positiv ist ($f''(1) = 2$).

Aussage 3 ist wahr, da im Intervall $(0;1)$ der Graph der Funktion f (mindestens einmal) sein Krümmungsverhalten ändert ($f''(0) < 0$, $f''(1) > 0$).

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn bei jeder der drei Aussagen die richtige Entscheidung getroffen und eine richtige Begründung angegeben wird.

Aufgabe 5

Highspeed-Internetzugang

In einer bestimmten Region haben 15 % aller Haushalte einen Highspeed-Internetzugang.
Für eine Studie werden Haushalte dieser Region zufällig ausgewählt. Dabei wird die Anzahl der untersuchten Haushalte, die einen Highspeed-Internetzugang haben, als binomialverteilt angenommen.

Im Rahmen der Studie wurde folgende Wahrscheinlichkeit mithilfe der Formel für die Binomialverteilung berechnet:

$$\binom{10}{a} \cdot 0{,}15^{a} \cdot b^{6} + \binom{10}{c} \cdot 0{,}15^{c} \cdot b^{c} \approx 0{,}049 \quad \text{mit} \quad a, c \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R}^{+}$$

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie a, b und c.
– Interpretieren Sie die Wahrscheinlichkeit 0,049 im gegebenen Sachzusammenhang.

Leitfrage:

– Ermitteln Sie, wie viele Haushalte in dieser Region mindestens überprüft werden müssen, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens 1 Haushalt mit Highspeed-Internetzugang befindet.

Lösung zur Aufgabe 5

Highspeed-Internetzugang

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$a = 4$
$b = 0{,}85$
$c = 5$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 4,9 % befinden sich in einer Gruppe von 10 (zufällig ausgewählten) Haushalten 4 oder 5 Haushalte mit Highspeed-Internetzugang.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn *a*, *b* und *c* richtig ermittelt werden und die Wahrscheinlichkeit 0,049 richtig interpretiert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

X ... Anzahl der Haushalte mit Highspeed-Internetzugang
$P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad 1 - P(X = 0) \geq 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad 1 - 0{,}85^n \geq 0{,}99$
$\Rightarrow \quad n \geq 28{,}3...$

Es müssten mindestens 29 Haushalte überprüft werden, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens 1 Haushalt mit Highspeed-Internetzugang befindet.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Anzahl der Haushalte richtig ermittelt wird.