

Name:	
Klasse:	



Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

9. Mai 2018

Mathematik

Teil-2-Aufgaben



Hinweise zur Aufgabenbearbeitung

Sehr geehrte Kandidatin! Sehr geehrter Kandidat!

Das vorliegende Aufgabenheft zu Teil 2 enthält vier Aufgaben mit je zwei bis vier Teilaufgaben, wobei alle Teilaufgaben unabhängig voneinander bearbeitbar sind. Ihnen stehen dafür insgesamt *150 Minuten* an reiner Arbeitszeit zur Verfügung.

Verwenden Sie einen nicht radierbaren, blau oder schwarz schreibenden Stift! Bei Konstruktionsaufgaben ist auch die Verwendung eines Bleistifts möglich.

Verwenden Sie zur Bearbeitung dieser Aufgaben dieses Aufgabenheft und die Ihnen zur Verfügung gestellten Blätter! Schreiben Sie Ihren Namen auf der ersten Seite des Aufgabenheftes in das dafür vorgesehene Feld und auf jedes verwendete Blatt! Geben Sie bei der Beantwortung jeder Teilaufgabe deren Bezeichnung an!

In die Beurteilung wird alles einbezogen, was nicht durchgestrichen ist. Die Lösung muss dabei klar ersichtlich sein. Wenn die Lösung nicht klar ersichtlich ist oder verschiedene Lösungen angegeben sind, gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Streichen Sie Ihre Notizen durch.

Sie dürfen die für diesen Klausurtermin freigegebene Formelsammlung sowie zugelassene elektronische Hilfsmittel verwenden.

Abzugeben sind das Aufgabenheft und alle von Ihnen verwendeten Blätter.

Beurteilung

Jede Aufgabe in Teil 1 wird mit 0 Punkten oder 1 Punkt bewertet, jede Teilaufgabe in Teil 2 mit 0, 1 oder 2 Punkten. Die mit **A** gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden mit 0 Punkten oder 1 Punkt bewertet.

- Werden im Teil 1 mindestens 16 von 24 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit positiv bewertet.
- Werden im Teil 1 weniger als 16 von 24 Aufgaben richtig gelöst, werden mit **A** markierte Aufgabenstellungen aus Teil 2 zum Ausgleich (für den laut LBVO „wesentlichen Bereich“) herangezogen.
Werden unter Berücksichtigung der mit **A** markierten Aufgabenstellungen aus Teil 2 mindestens 16 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit positiv bewertet.
Werden auch unter Berücksichtigung der mit **A** markierten Aufgabenstellungen aus Teil 2 weniger als 16 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit mit „Nicht genügend“ beurteilt.
- Werden im Teil 1 mindestens 16 Punkte (mit Berücksichtigung der Ausgleichspunkte **A**) erreicht, so gilt folgender Beurteilungsschlüssel:

Genügend	16–23 Punkte
Befriedigend	24–32 Punkte
Gut	33–40 Punkte
Sehr gut	41–48 Punkte

Erläuterung der Antwortformate

Die Aufgaben haben einerseits **freie Antwortformate**; dabei schreiben Sie Ihre Antwort direkt unter die jeweilige Aufgabenstellung in das Aufgabenheft oder auf die zur Verfügung gestellten Blätter. Weitere Antwortformate, die in der Klausur zum Einsatz kommen können, werden im Folgenden vorgestellt:

Zuordnungsformat: Dieses Antwortformat ist durch mehrere Aussagen (bzw. Tabellen oder Abbildungen) gekennzeichnet, denen mehrere Antwortmöglichkeiten gegenüberstehen. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die Antwortmöglichkeiten durch Eintragen der **entsprechenden Buchstaben** den jeweils zutreffenden Aussagen zuordnen!

Beispiel:
Gegeben sind zwei Gleichungen.

$1 + 1 = 2$	A
$2 \cdot 2 = 4$	C

A	Addition
B	Division
C	Multiplikation
D	Subtraktion

Aufgabenstellung:
Ordnen Sie den zwei Gleichungen jeweils die entsprechende Bezeichnung (aus A bis D) zu!

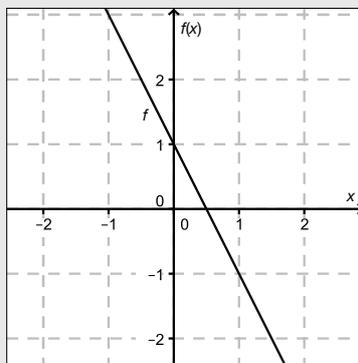
Konstruktionsformat: Eine Aufgabe und deren Aufgabenstellung sind vorgegeben. Die Aufgabe erfordert die Ergänzung von Punkten, Geraden und/oder Kurven im Aufgabenheft.

Beispiel:

Gegeben ist eine lineare Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$.

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie den Graphen einer linearen Funktion mit den Bedingungen $k = -2$ und $d > 0$ in das vorgegebene Koordinatensystem ein!



Multiple-Choice-Format in der Variante „1 aus 6“: Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und sechs Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **eine Antwortmöglichkeit** auszuwählen ist. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die einzige zutreffende Antwortmöglichkeit ankreuzen!

Beispiel:

Welche Gleichung ist korrekt?

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an!

$1 + 1 = 1$	<input type="checkbox"/>
$2 + 2 = 2$	<input type="checkbox"/>
$3 + 3 = 3$	<input type="checkbox"/>
$4 + 4 = 8$	<input checked="" type="checkbox"/>
$5 + 5 = 5$	<input type="checkbox"/>
$6 + 6 = 6$	<input type="checkbox"/>

Multiple-Choice-Format in der Variante „2 aus 5“: Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und fünf Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **zwei Antwortmöglichkeiten** auszuwählen sind. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten ankreuzen!

Beispiel:

Welche Gleichungen sind korrekt?

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

$1 + 1 = 1$	<input type="checkbox"/>
$2 + 2 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$3 + 3 = 3$	<input type="checkbox"/>
$4 + 4 = 8$	<input checked="" type="checkbox"/>
$5 + 5 = 5$	<input type="checkbox"/>

Multiple-Choice-Format in der Variante „x aus 5“: Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und fünf Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **eine, zwei, drei, vier oder fünf Antwortmöglichkeiten** auszuwählen sind. In der Aufgabenstellung finden Sie stets die Aufforderung „Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n)/ Gleichung(en)/... an!“. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die zutreffende Antwortmöglichkeit/die zutreffenden Antwortmöglichkeiten ankreuzen!

Beispiel:
Welche der gegebenen Gleichungen ist/sind korrekt?

$1 + 1 = 2$	<input checked="" type="checkbox"/>
$2 + 2 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$3 + 3 = 6$	<input checked="" type="checkbox"/>
$4 + 4 = 4$	<input type="checkbox"/>
$5 + 5 = 10$	<input checked="" type="checkbox"/>

Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Gleichung(en) an!

Lückentext: Dieses Antwortformat ist durch einen Satz mit zwei Lücken gekennzeichnet, das heißt, im Aufgabentext sind zwei Stellen ausgewiesen, die ergänzt werden müssen. Für jede Lücke werden je drei Antwortmöglichkeiten vorgegeben. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die Lücken durch Ankreuzen der **beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten** füllen!

Beispiel:
Gegeben sind 3 Gleichungen.

Aufgabenstellung:
Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Die Gleichung _____^①_____ wird als Zusammenzählung oder _____^②_____ bezeichnet.

①	
$1 - 1 = 0$	<input type="checkbox"/>
$1 + 1 = 2$	<input checked="" type="checkbox"/>
$1 \cdot 1 = 1$	<input type="checkbox"/>

②	
Multiplikation	<input type="checkbox"/>
Subtraktion	<input type="checkbox"/>
Addition	<input checked="" type="checkbox"/>

So ändern Sie Ihre Antwort bei Aufgaben zum Ankreuzen:

- Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
- Kreuzen Sie dann das gewünschte Kästchen an.

$1 + 1 = 3$	<input type="checkbox"/>
$2 + 2 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$3 + 3 = 5$	<input type="checkbox"/>
$4 + 4 = 4$	<input type="checkbox"/>
$5 + 5 = 9$	<input checked="" type="checkbox"/>

Hier wurde zuerst die Antwort „ $5 + 5 = 9$ “ gewählt und dann auf „ $2 + 2 = 4$ “ geändert.

So wählen Sie eine bereits übermalte Antwort:

- Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
- Kreisen Sie das gewünschte übermalte Kästchen ein.

$1 + 1 = 3$	<input type="checkbox"/>
$2 + 2 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$3 + 3 = 5$	<input type="checkbox"/>
$4 + 4 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>
$5 + 5 = 9$	<input type="checkbox"/>

Hier wurde zuerst die Antwort „ $2 + 2 = 4$ “ übermalte und dann wieder gewählt.

Wenn Sie jetzt noch Fragen haben, wenden Sie sich bitte an Ihre Lehrerin/Ihren Lehrer!

Viel Erfolg bei der Bearbeitung!

Aufgabe 1

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$, wobei die Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind.

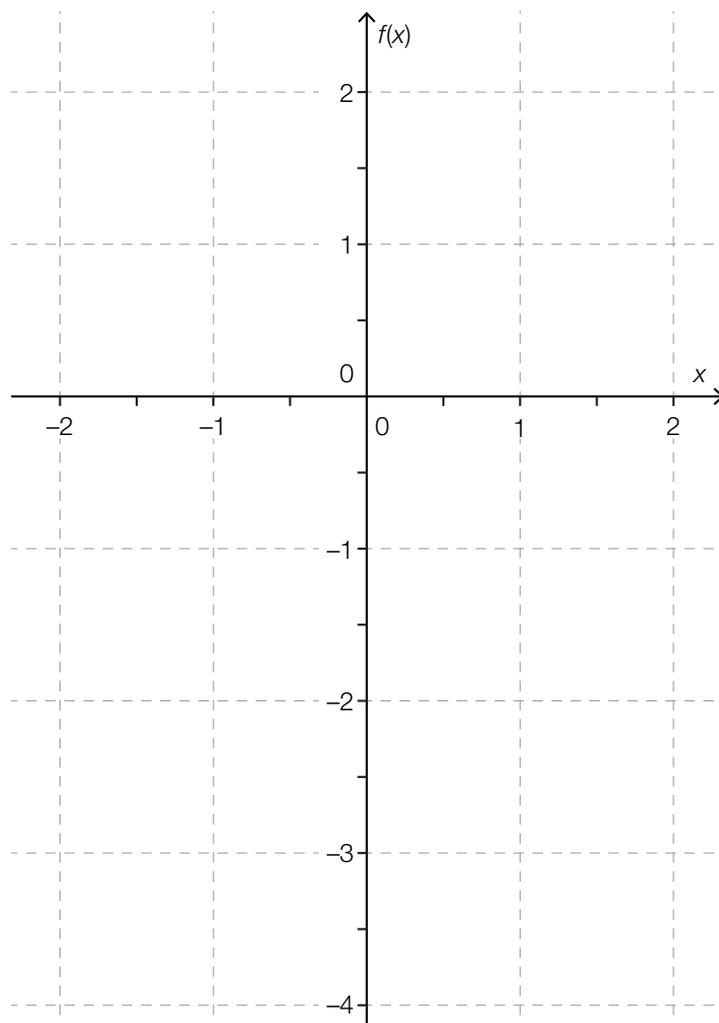
Aufgabenstellung:

- a) Begründen Sie, warum die Funktion f genau drei verschiedene reelle Nullstellen hat, wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben!

A Die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 0$ entspricht dem Wert des Koeffizienten b . Begründen Sie, warum diese Aussage wahr ist!

- b) Geben Sie eine Beziehung zwischen den Koeffizienten a und b an, sodass $\int_0^1 f(x) dx = 0$ gilt!

Begründen Sie, warum aus der Annahme $\int_0^1 f(x) dx = 0$ folgt, dass f eine Nullstelle im Intervall $(0; 1)$ hat, und skizzieren Sie einen möglichen Graphen einer solchen Funktion f im nachstehenden Koordinatensystem!



Aufgabe 2

Hopfen

Hopfen ist eine schnell wachsende Kletterpflanze. Die Modellfunktion $h: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{k \cdot t}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}^-$ gibt näherungsweise die Pflanzhöhe einer bestimmten Hopfensorte zum Zeitpunkt t an, wobei $h(t)$ in Metern und t in Wochen angegeben wird.

In der nachstehenden Tabelle sind die gemessenen Höhen einer Hopfenpflanze ab Anfang April ($t = 0$) zusammengefasst.

Zeit (in Wochen)	0	2	4	6	8	10	12
Höhe (in m)	0,6	1,2	2,3	4,2	5,9	7,0	7,6

Anhand dieser Messwerte wurden für die Modellfunktion h die Parameterwerte $a = 8$, $b = 15$ und $k = -0,46$ ermittelt.

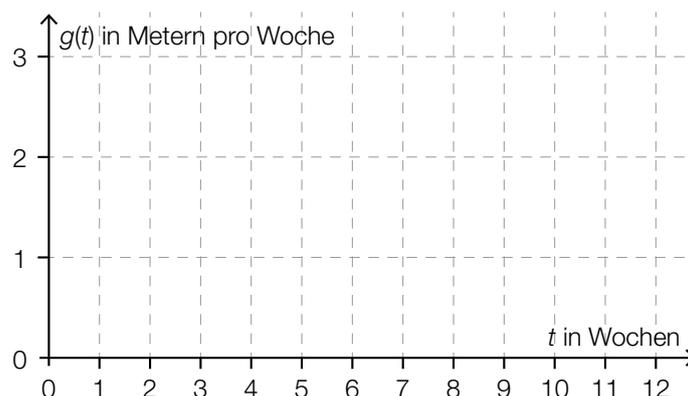
Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie unter Verwendung der Modellfunktion h einen Ausdruck an, mit dem berechnet werden kann, um wie viele Meter die Hopfenpflanze im Zeitintervall $[0; t_1]$ gewachsen ist!

Berechnen Sie unter Verwendung der Modellfunktion h mithilfe Ihres Ausdrucks, wie viele Meter die Pflanze in den ersten 10 Wochen gewachsen ist, und geben Sie die prozentuelle Abweichung vom tatsächlich gemessenen Wert an!

- b) Wird das Wachstum der Pflanze mithilfe der Funktion h modelliert, gibt es einen Zeitpunkt t_2 , zu dem sie am schnellsten wächst. Geben Sie eine Gleichung an, mit der dieser Zeitpunkt berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

Berechnen Sie die zugehörige maximale Wachstumsgeschwindigkeit und skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem unter Berücksichtigung des von Ihnen ermittelten Maximums den Verlauf des Graphen derjenigen Funktion g , die basierend auf der Modellfunktion h die Wachstumsgeschwindigkeit der Hopfenpflanze in Abhängigkeit von t beschreibt!



- c) Ermitteln Sie eine lineare Funktion h_1 , deren Werte bei $t = 0$ und $t = 12$ mit den gemessenen Höhen aus der angegebenen Tabelle übereinstimmen, und interpretieren Sie die Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Kontext!

$$h_1(t) = \underline{\hspace{15em}}$$

Begründen Sie anhand des Verlaufs der Graphen von h und h_1 , warum es mindestens zwei Zeitpunkte gibt, in denen die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze denselben Wert hat wie die Steigung von h_1 !

- d) Für größer werdende t nähert sich $h(t)$ einem Wert an, der als h_{\max} bezeichnet wird. Weisen Sie anhand der gegebenen Funktionsgleichung der Modellfunktion h rechnerisch nach, dass der Parameter k (mit $k < 0$) keinen Einfluss auf h_{\max} hat, und geben Sie h_{\max} an!

Günstige Witterungsverhältnisse können dazu führen, dass die Hopfenpflanze schneller und höher wächst, d. h., dass sie sich früher einem größeren Wert von h_{\max} annähert. Geben Sie für ein derartiges Pflanzenwachstum an, wie a und k verändert werden müssen!

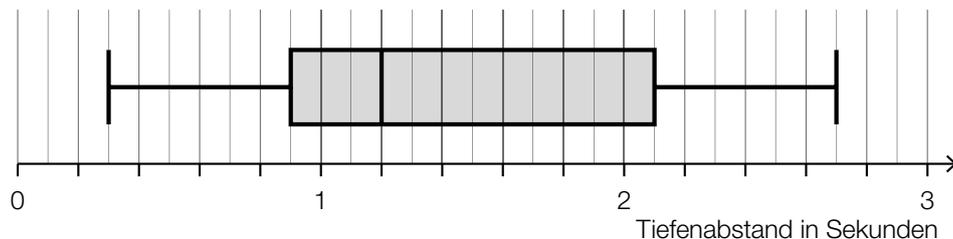
Aufgabe 3

Abstandsmessung

Im Rahmen der polizeilichen Kontrollmaßnahmen des öffentlichen Verkehrs werden Abstandsmessungen vorgenommen. Im Folgenden beschreibt der Begriff *Abstand* eine Streckenlänge und der Begriff *Tiefenabstand* eine Zeitspanne.

Beträgt der Abstand zwischen dem hinteren Ende des voranfahrenden Fahrzeugs und dem vorderen Ende des nachfahrenden Fahrzeugs Δs Meter, so versteht man unter dem Tiefenabstand diejenige Zeit t in Sekunden, in der das nachfahrende Fahrzeug die Strecke der Länge Δs zurücklegt.

Nachstehend sind Tiefenabstände, die im Rahmen einer Schwerpunktkontrolle von 1 000 Fahrzeugen ermittelt wurden, in einem Kastenschaubild (Boxplot) dargestellt. Alle kontrollierten Fahrzeuge waren mit einer Geschwindigkeit von ca. 130 km/h unterwegs.



Aufgabenstellung:

- a) A Geben Sie das erste Quartil q_1 und das dritte Quartil q_3 der Tiefenabstände an und deuten Sie den Bereich von q_1 bis q_3 im gegebenen Kontext!

Nach den Erfahrungswerten eines österreichischen Autofahrerclubs halten ungefähr drei Viertel der Kraftfahrer/innen bei einer mittleren Fahrgeschwindigkeit von ca. 130 km/h einen Abstand von mindestens 30 Metern zum voranfahrenden Fahrzeug ein. Geben Sie an, ob die im Kastenschaubild dargestellten Daten in etwa diese Erfahrungswerte bestätigen oder nicht, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

- b) Einer üblichen Faustregel zufolge wird auf Autobahnen generell ein Tiefenabstand von mindestens zwei Sekunden empfohlen. Jemand behauptet, dass aus dem dargestellten Kastenschaubild ablesbar ist, dass mindestens 20 % der Kraftfahrer/innen diesen Tiefenabstand eingehalten haben. Geben Sie einen größeren Prozentsatz an, der aus dem Kastenschaubild mit Sicherheit abgelesen werden kann, und begründen Sie Ihre Wahl!

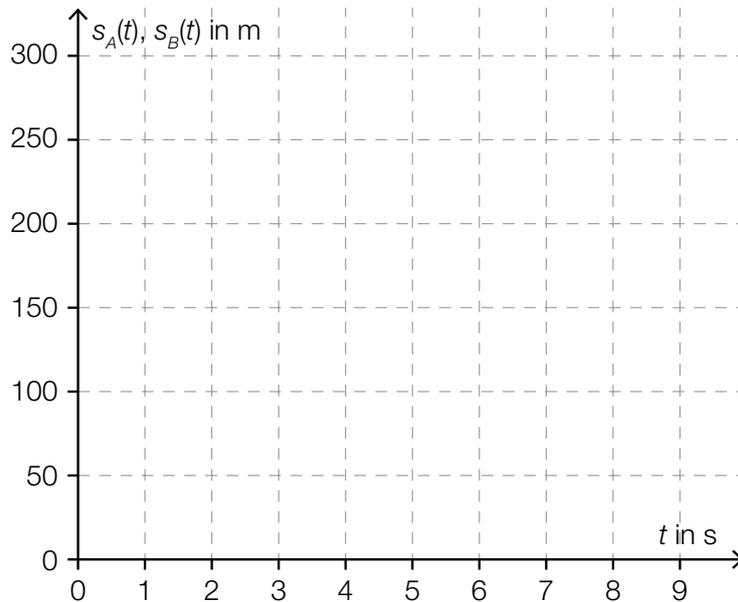
Nehmen Sie den von Ihnen ermittelten Prozentsatz als Wahrscheinlichkeit an, dass der empfohlene Tiefenabstand eingehalten wird.

Geben Sie an, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei zehn zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Messungen dieser Schwerpunktkontrolle zumindest sechs Mal der empfohlene Tiefenabstand von mindestens zwei Sekunden eingehalten wurde!

- c) Bei einer anderen Abstandsmessung wird ein kontrolliertes Fahrzeug auf den letzten 300 Metern vor der Messung zusätzlich gefilmt, damit die Messung nicht verfälscht wird, wenn sich ein anderes Fahrzeug vor das kontrollierte Fahrzeug drängt.

Fahrzeug A fährt während des Messvorgangs mit konstanter Geschwindigkeit und benötigt für die gefilmten 300 Meter eine Zeit von neun Sekunden. Stellen Sie den zurückgelegten Weg $s_A(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t im unten stehenden Zeit-Weg-Diagramm dar ($s_A(t)$ in Metern, t in Sekunden) und geben Sie an, mit welcher Geschwindigkeit in km/h das Fahrzeug unterwegs ist!

Ein Fahrzeug B legt die 300 Meter ebenfalls in neun Sekunden zurück, verringert dabei aber kontinuierlich seine Geschwindigkeit. Skizzieren Sie ausgehend vom Ursprung einen möglichen Graphen der entsprechenden Zeit-Weg-Funktion s_B in das unten stehende Zeit-Weg-Diagramm!



Aufgabe 4

Bitcoin

Bitcoin (Währungskürzel: BTC) ist eine digitale Kunstwährung. Der Marktwert des Bitcoin ergibt sich aufgrund von Angebot und Nachfrage.

Nutzer/innen des Bitcoin werden in dieser Aufgabe als Bitcoin-User bezeichnet.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Bitcoin-Euro-Kurs vom 11. März 2015 bis zum 11. März 2016. Die linke Skala zeigt dabei den absoluten Wert eines Bitcoins in Euro, die rechte Skala zeigt die Veränderung in Prozent bezogen auf den 11. März 2015.

Bitcoin-Euro-Kurs (BTC – EUR)



Datenquelle: <http://www.finanzen.net/devisen/bitcoin-euro-kurs> [11.03.2017] (adaptiert).

Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie an, in welchem der Monate von April 2015 bis Dezember 2015 der Bitcoin-Euro-Kurs jeweils vom Monatsanfang bis zum Monatsende absolut am stärksten gefallen ist, und geben Sie diesen Kursverlust in Euro an!

Monat: _____

Kursverlust: _____

Es sei K_1 der Bitcoin-Euro-Kurs zum Beginn des betreffenden Monats, K_2 der Bitcoin-Euro-Kurs am Ende des betreffenden Monats sowie AT die Anzahl der Tage des betreffenden Monats.

Berechnen Sie den ungefähren Wert des Ausdrucks $\frac{K_2 - K_1}{AT}$ und interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Kontext!

- b) Anfang Jänner 2016 waren ca. 15 Millionen Bitcoins im Umlauf. Die t Jahre nach dem Jahr 2009 im Umlauf befindliche Menge an Bitcoins ist annähernd $f(t) = 21 \cdot 10^6 - 21 \cdot 10^6 \cdot e^{-0,18 \cdot t}$. Damit ist $f(0)$ die zu Anfang Jänner 2009 im Umlauf befindliche Menge an Bitcoins.

Bestimmen und interpretieren Sie die relative (prozentuelle) Änderung der im Umlauf befindlichen Menge an Bitcoins im Zeitintervall $[7; 8]$!

Geben Sie eine Gleichung an, mit der derjenige Zeitpunkt berechnet werden kann, ab dem nur mehr eine Million Bitcoins in Umlauf gebracht werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

- c) Eine Untersuchung der Demografie von Bitcoin-Usern hat ergeben, dass weltweit 88 % der Bitcoin-User männlich sind. Es soll festgestellt werden, wie hoch dieser Prozentsatz in Österreich ist. Dazu wird eine große Anzahl an Personen befragt. Diese Befragung ergibt, dass 171 der befragten Personen Bitcoin-User sind, und von diesen 171 Personen sind 138 männlich.

A) Geben Sie aufgrund dieser Daten ein symmetrisches 95-%-Konfidenzintervall für den unbekanntem Anteil der männlichen Bitcoin-User unter allen Bitcoin-Usern in Österreich an!

Geben Sie an, welches Konfidenzniveau zur Berechnung eines solchen Intervalls mindestens angenommen werden muss, damit der weltweit ermittelte Anteil von 88 % in diesem Intervall enthalten ist!

