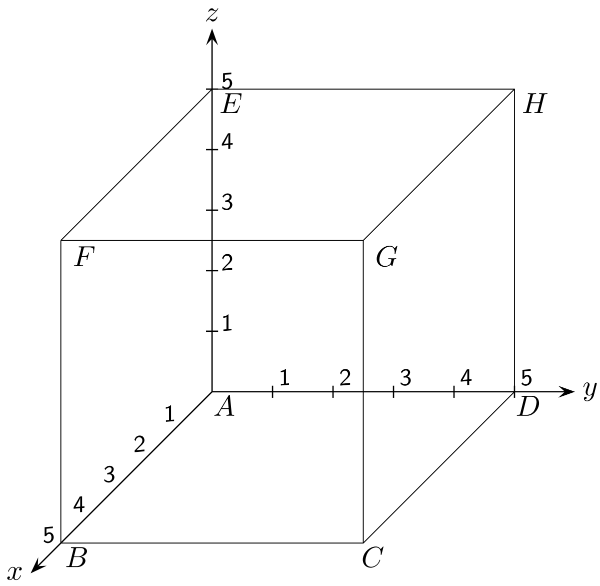
Würfel Bayern 2019

Die Abbildung zeigt den Würfel $ABCDEFGH$ mit $A(0\,|\,0\,|\,0)$ und $G(5\,|\,5\,|\,5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Ebene T schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten $I(5\,|\,0\,|\,1)$, $J(2\,|\,5\,|\,0)$, $K(0\,|\,5\,|\,2)$ und $L(1\,|\,0\,|\,5)$.



a) Zeichnen Sie das Viereck $IJKL$ in die Abbildung ein und zeigen Sie, dass es sich um ein Trapez handelt, bei dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene T in Normalenform. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Ebene T die yz-Ebene schneidet.

[zur Kontrolle: $T\colon\ 5x + 4y + 5z = 30$]

Für $a \in \mathbb{R}^+$ ist die Gerade g_a: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ 2/a \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

c) Bestimmen Sie den Wert von a, sodass die Gerade g_a die Würfelfläche $CDHG$ in ihrem Mittelpunkt schneidet.

Für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ liegt die Gerade g_a in der Ebene U mit der Gleichung $x = 2{,}5$.

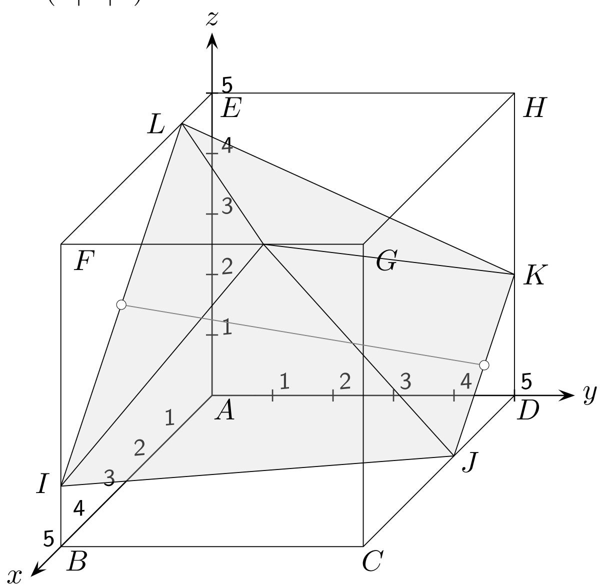
d) Ein beliebiger Punkt $P(p_1\,|\,p_2\,|\,p_3)$ des Raums wird an der Ebene U gespiegelt. Geben Sie die Koordinaten des Bildpunkts P' in Abhängigkeit von p_1, p_2 und p_3 an.

e) Spiegelt man die Ebene T an U, so erhält man die von T verschiedene Ebene T'. Zeigen Sie, dass für einen bestimmten Wert von a die Gerade g_a in der Ebene T liegt, und begründen Sie, dass diese Gerade g_a die Schnittgerade von T und T' ist.

f) Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche $IJKL$ liegt auf der Kante $[FG]$. Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide 2 betragen kann.

Würfel

Die Abbildung zeigt den Würfel $ABCDEFGH$ mit $A(0\,|\,0\,|\,0)$ und $G(5\,|\,5\,|\,5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Ebene T schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten $I(5\,|\,0\,|\,1)$, $J(2\,|\,5\,|\,0)$, $K(0\,|\,5\,|\,2)$ und $L(1\,|\,0\,|\,5)$.



a) Zeichnen Sie das Viereck $IJKL$ in die Abbildung ein und zeigen Sie, dass es sich um ein Trapez handelt, bei dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

Viereck $IJKL$ ist symmetrisch zur Ebene $ADGF$ ... $\left(\,|\overrightarrow{IJ}\,| = |\overrightarrow{LK}\,| = \sqrt{35}\,\right)$

b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene T in Normalenform. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Ebene T die yz-Ebene schneidet.

[zur Kontrolle: $T\colon\; 5x + 4y + 5z = 30$] $\quad \alpha = 52{,}0°$

Für $a \in \mathbb{R}^+$ ist die Gerade g_a: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ 2/a \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

c) Bestimmen Sie den Wert von a, sodass die Gerade g_a die Würfelfläche $CDHG$ in ihrem Mittelpunkt schneidet. $\quad M(2{,}5\,|\,5\,|\,2{,}5),\quad \lambda = -a/2,\quad a^2 = 1,\quad a = 1,$ da $a \in \mathbb{R}^+$

Für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ liegt die Gerade g_a in der Ebene U mit der Gleichung $x = 2{,}5$.

d) Ein beliebiger Punkt $P(p_1\,|\,p_2\,|\,p_3)$ des Raums wird an der Ebene U gespiegelt. Geben Sie die Koordinaten des Bildpunkts P' in Abhängigkeit von p_1, p_2 und p_3 an.

$2{,}5 - (p_1 - 2{,}5) = 5 - p_1,\quad P'(5 - p_1\,|\,p_2\,|\,p_3)$

e) Spiegelt man die Ebene T an U, so erhält man die von T verschiedene Ebene T'. Zeigen Sie, dass für einen bestimmten Wert von a die Gerade g_a in der Ebene T liegt, und begründen Sie, dass diese Gerade g_a die Schnittgerade von T und T' ist. $g_a \subset T \implies a = 1/2$, da $a \in \mathbb{R}^+$
Nachweis $g_a \subset T$ mit Schnitt unabhängig von λ oder mit Hilfe $\vec{u} \perp \vec{n}$ und $A(2{,}5\,|\,0\,|\,3{,}5) \in T$.

f) Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche $IJKL$ liegt auf der Kante $[FG]$. Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide 2 betragen kann. $\quad h = 2$ nicht möglich, da $d(F,T) \approx 2{,}46$.