Inhaltsverzeichnis:

1. Einführung

Die verpflichtende Einführung von Computeralgebrasystemen (CAS) entsprechend des weiterentwickelten Thüringer Lehrplans hat Einfluss auf die Aufgaben- und Unterrichtskultur. Dies spiegelt sich ebenfalls in den Aufgabenformaten der zentralen Leistungsfeststellungen und Prüfungen wider. Die Besondere Leistungsfeststellung und das Abitur enthalten einen hilfsmittelfreien Teil.
Verbindliche Grundlage für die Auswahl der Aufgaben im hilfsmittelfreien Teil ist der Thüringer Lehrplan für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife Mathematik 2018[1].
Die vorliegende Handreichung dient zur Unterstützung für Lernende und Lehrende und sie erhebt nicht den Anspruch der Vollständigkeit. Für die Lernenden beinhaltet sie eine Checkliste und zugehörige Aufgaben, für Lehrende dient sie als Anregung für Diskussionen innerhalb der Fachgruppe und als Anregung für die Gestaltung hilfsmittelfreier Leistungstests.

Bei der Konstruktion entsprechender hilfsmittelfreier Aufgaben sind u. a. folgende Kriterien zu beachten:

- Die Aufgaben sind nicht komplex, d. h. sie zielen i. Allg. nur auf die Überprüfung einzelner mathematischer Kompetenzen.
- Der Rechenaufwand soll möglichst gering und überschaubar sein.
- Die Aufgaben fordern das geistige Durchdringen grundlegender mathematischer Begriffe und Verfahren (siehe Checkliste für Lernende), sind aus verschiedenen Sichtweisen formuliert und erfordern die Anwendung der Kenntnisse und Fertigkeiten in ungewohnten Problemsituationen.
- Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen (K1 – K6)[2] werden an unterschiedlichen Inhalten in allen drei Anforderungsbereichen[3] [4] überprüft.

Die im Punkt 3 enthaltenen Aufgaben sind exemplarische Impulsbeispiele passend zum Thüringer Lehrplan.
Die Aufgaben in 3.1 entsprechen der Struktur der IQB-Aufgaben und der hilfsmittelfreien Aufgaben in der Besonderen Leistungsfeststellung (Pflicht 1) sowie im Abitur (Teil A).

Weitere hilfsmittelfreie Aufgaben sind enthalten:

- in den Orientierungsaufgaben für die Besondere Leistungsfeststellung ab 2019 (mit Arbeitsblatt) unter https://www.schulportal-thueringen.de/web/guest/media/detail?tspi=4556
- in den Orientierungsaufgaben für das Abitur ab 2014 unter https://www.schulportal-thueringen.de/web/guest/media/detail?tspi=3457
- in den Orientierungsaufgaben für das Abitur ab 2017 (mit Arbeitsblatt) unter https://www.schulportal-thueringen.de/web/guest/media/detail?tspi=6032
- auf den Seiten des IQB (Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen) unter https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur

[1] https://www.schulportal-thueringen.de/media/detail?tspi=1392

[2] Ebenda, S. 7 – 10.

[3] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der BRD (Hrsg.) (2004 b): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss – Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 4.12.2003, München, Wolters Kluwer, S. 17 ff.

[4] http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf, S. 14 ff.

2. Checkliste für Lernende

Grundlegend gelten die Kompetenzbeschreibungen im weiterentwickelten Thüringer Lehrplan[5]. Die Checkliste dient als Orientierung zu den im Lehrplan formulierten Kompetenzen. Vollständigkeit wird nicht angestrebt. Sie bietet Möglichkeiten zur Selbstkontrolle und zur Einschätzung des eigenen Lernstands.

2.1 Klassenstufe 10

Arithmetik/Algebra			
Ich kann	☹	😐	☺
- Grundrechenoperationen ausführen und Rechengesetze zum vorteilhaften Rechnen anwenden.			
- Prozentrechnung anwenden.			
- proportionale und umgekehrt proportionale Zuordnungen anwenden.			
- Potenzgesetze anwenden.			
- Potenz-, Wurzel- und Logarithmenschreibweise umwandeln.			
- Terme zusammenfassen und vereinfachen.			
- einfache Gleichungen lösen.			
- lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Variablen lösen.			

Funktionen			
Ich kann	☹	😐	☺
- Eigenschaften von linearen, quadratischen, Sinus- und Kosinusfunktionen, Potenz- und Exponentialfunktionen bestimmen.			
- einfache Funktionsgleichungen ermitteln.			
- Funktionen graphisch darstellen.			
- den Einfluss von Parametern auf Eigenschaften der Funktionen im Vergleich zu f(x) beschreiben und anwenden.			
- den Zusammenhang zwischen linearen bzw. quadratischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen erläutern.			

Geometrie			
Ich kann	☹	😐	☺
- Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren (ggf. Überschlag) ermitteln.			
- Volumen und Oberflächeninhalt von Körpern (ggf. Überschlag) ermitteln.			
- elementare geometrische Sätze (wie Strahlensätze, Satz des Pythagoras, Satz des Thales, Kongruenzsätze, Hauptähnlichkeitssatz) und Definitionen (wie Sinus, Kosinus, Tangens eines Winkels) anwenden.			
- ebene Figuren und Körper durch charakterisierende Eigenschaften beschreiben.			
- ebene Figuren darstellen.			
- Körper im Zweitafel- und Schrägbild sowie als Netz maßstäblich darstellen.			

[5] Lehrplan für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife Mathematik, 2018.
https://www.schulportal-thueringen.de/media/detail?tspi=1392

Stochastik			
Ich kann	☹	😐	☺
- Zufallsexperimente mit Hilfe von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen veranschaulichen.			
- Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen ein- und mehrstufiger Zufallsexperimente bestimmen.			
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsgrößen ermitteln, darstellen und interpretieren.			
- den Erwartungswert diskreter Zufallsgrößen berechnen und interpretieren.			

2.2 Klassenstufe 12 (erhöhtes Anforderungsniveau)

Analysis (erhöhtes Anforderungsniveau)			
Ich kann	☹	😐	☺
- einfache Funktionen und deren Verknüpfungen bzw. Verkettungen darstellen.			
- Funktionsgleichungen ermitteln.			
- Eigenschaften von einfachen Funktionen und deren Verknüpfungen und Verkettungen ermitteln und beschreiben.			
- In einfachen Fällen eine Schar von Funktionen auf Eigenschaften untersuchen.			
- ganzrationale Funktionen, Potenzfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, e-Funktionen und ln-Funktionen sowie deren Verknüpfungen und Verkettungen ableiten.			
- Zusammenhänge zwischen Funktionen und deren Ableitungsfunktionen beschreiben, begründen und darstellen.			
- Gleichungen von Sekanten, Tangenten und Normalen ermitteln.			
- einfache Extremwertprobleme lösen.			
- Stammfunktionen und Integrale von ganzrationalen Funktionen, Potenzfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, e-Funktionen ermitteln.			
- Zusammenhänge zwischen Funktionen und deren Stammfunktionen beschreiben, begründen und darstellen.			
- einfache inner- und außermathematische Problemstellungen mit Hilfe der Differenzial- und Integralrechnung bearbeiten.			

Vektorrechnung/Analytische Geometrie (erhöhtes Anforderungsniveau)			
Ich kann	☹	😐	☺
- Punkte, Strecken, Geraden, Flächen und Körper im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem beschreiben und darstellen.			
- Vektoren zeichnerisch und rechnerisch addieren, subtrahieren und vervielfachen.			
- den Betrag eines Vektors ermitteln.			
- Eigenschaften ebener und räumlicher Figuren mit Hilfe von Vektoren nachweisen.			
- Vektoren in einfachen Fällen auf lineare Abhängigkeit untersuchen.			
- prüfen, ob Punkte auf einer Geraden liegen.			
- die Orthogonalität von Vektoren mit Hilfe des Skalarproduktes nachweisen.			
- Geraden durch Gleichungen in der Parameterform angeben, die Bedeutung der Vektoren erläutern und anwenden.			
- die Lage zweier Geraden zueinander untersuchen.			
- Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden ermitteln.			
- Koordinaten der Schnittpunkte von Geraden und Koordinatenebenen bestimmen.			
- Ebenengleichungen angeben und interpretieren.			
- in einfachen Fällen Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen ermitteln.			
- in einfachen Fällen Abstände von Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen.			
- in einfachen Fällen die Eigenschaften einer Schar von Geraden bzw. Ebenen beschreiben.			
- einfache inner- und außermathematische Problemstellungen mit Hilfe der Vektorrechnung und analytischen Geometrie bearbeiten.			

Stochastik (erhöhtes Anforderungsniveau)			
Ich kann	☹	😐	☺
- Erhebungen anhand statistischer Kenngrößen beurteilen.			
- Wahrscheinlichkeiten berechnen.			
- Binomialverteilung mit ihren Kenngrößen als eine Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreiben, berechnen und darstellen.			
- graphische Darstellungen von Binomialverteilungen interpretieren.			
- in einfachen Fällen 95 %-Prognoseintervalle ermitteln und interpretieren.			
- in einfachen Fällen 95 %-Konfidenzintervalle ermitteln und interpretieren.			
- die Gaußsche Glockenkurve als Dichtefunktion der Normalverteilung interpretieren.			
- in einfachen Fällen die Normalverteilung mit ihren Kenngrößen als mathematisches Modell anwenden.			
- einfache inner- und außermathematische Problemstellungen mit Hilfe der Stochastik bearbeiten.			

2.3 Klassenstufe 12 (grundlegendes Anforderungsniveau)

Analysis (grundlegendes Anforderungsniveau)			
Ich kann	☹	😐	☺
- einfache Funktionen und deren Verknüpfungen bzw. Verkettungen darstellen.			
- Funktionsgleichungen ermitteln.			
- Eigenschaften von einfachen Potenzfunktionen, ganzrationalen Funktionen und e-Funktionen und deren Verknüpfungen und Verkettungen ermitteln und beschreiben.			
- den Einfluss eines reellen Parameters auf bestimmte Eigenschaften einfacher ganzrationaler Funktionen untersuchen.			
- ganzrationale Funktionen, Potenzfunktionen und e-Funktionen sowie deren Verknüpfungen und Verkettungen ableiten.			
- Zusammenhänge zwischen Funktionen und deren Ableitungsfunktionen beschreiben, begründen und darstellen.			
- Gleichungen von Tangenten ermitteln.			
- einfache Extremwertprobleme lösen.			
- Stammfunktionen und Integrale von ganzrationalen Funktionen, Potenzfunktionen und e-Funktionen ermitteln.			
- Zusammenhänge zwischen Funktionen und deren Stammfunktionen beschreiben, begründen und darstellen.			
- einfache inner- und außermathematische Problemstellungen mit Hilfe der Differenzial- und Integralrechnung bearbeiten.			

Vektorrechnung/Analytische Geometrie (grundlegendes Anforderungsniveau)			
Ich kann	☹	😐	☺
- Punkte, Strecken, Geraden, Flächen und Körper im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem beschreiben und darstellen.			
- Vektoren zeichnerisch und rechnerisch addieren, subtrahieren und vervielfachen.			
- den Betrag eines Vektors ermitteln.			
- Eigenschaften ebener und räumlicher Figuren mit Hilfe von Vektoren nachweisen.			
- Vektoren in einfachen Fällen auf lineare Abhängigkeit untersuchen.			
- prüfen, ob Punkte auf einer Geraden liegen.			
- die Orthogonalität von Vektoren mit Hilfe des Skalarproduktes nachweisen.			
- Geraden durch Gleichungen in der Parameterform angeben, die Bedeutung der Vektoren erläutern und anwenden.			
- die Lage zweier Geraden zueinander untersuchen.			
- Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden ermitteln.			
- Koordinaten der Schnittpunkte von Geraden und Koordinatenebenen bestimmen.			
- einfache inner- und außermathematische Problemstellungen mit Hilfe der Vektorrechnung und analytischen Geometrie bearbeiten.			

Stochastik (grundlegendes Anforderungsniveau)			
Ich kann	☹	😐	☺
- Erhebungen anhand statistischer Kenngrößen beurteilen.			
- Wahrscheinlichkeiten berechnen.			
- Binomialverteilung mit ihren Kenngrößen als eine Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreiben, berechnen und darstellen.			
- graphische Darstellungen von Binomialverteilungen interpretieren.			
- in einfachen Fällen 95 %-Prognoseintervalle ermitteln und interpretieren.			
- einfache inner- und außermathematische Problemstellungen mit Hilfe der Stochastik bearbeiten.			

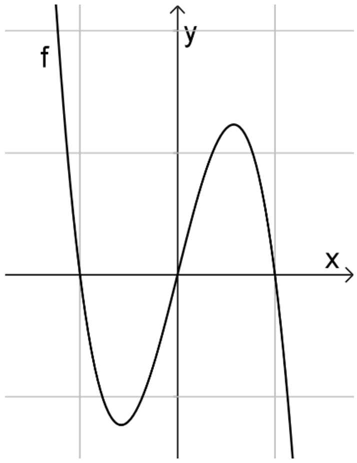
3. Aufgaben

3.1 Aufgaben entsprechend der Struktur der IQB-Aufgaben (5 BE)

3.1.1 Analysis

Aufgabe A 1

Gegeben ist der Graph der Funktion f mit
$f(x) = 2x \cdot (2 - x) \cdot (2 + x)$ mit $x \in \mathbb{R}$.



Die Punkte $O(0|0)$; $P(u|0)$ und $Q(u|f(u))$ mit $0 < u < 2$ bilden ein Dreieck.

Berechnen Sie u so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird.

5 BE

A 1	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
	Berechnen: $A(u) = 4u^2 - u^4$ $A'(u) = 0 = 8u - 4u^3$; $u = \sqrt{2}$ $A''(\sqrt{2}) = -16 < 0$	K4	K5		5

Aufgabe A 2

Gegeben ist für jede reelle Zahl a $(a \neq 0)$ die Funktion f_a durch
$f_a(x) = ax \cdot (2 - x) \cdot (2 + x)$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie, ob es eine Zahl a gibt, für die die Funktion f_a im Koordinatenursprung den Anstieg 1 hat.

2 BE

b) Begründen Sie, dass die Stammfunktion F_a von f_a drei mögliche Extremstellen hat.

2 BE

c) Erläutern Sie, dass die Wendestellen von F_a von a unabhängig sind.

1 BE

A 2	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Untersuchen: $a = \frac{1}{4}$		K5		2
b)	Begründen: f_a ist Ableitungsfunktion von F_a; Nullstellen von f_a sind mögliche Extremstellen von F_a; f_a hat die drei Nullstellen $x_1 = 0$; $x_{2/3} = \pm 2$			K1	2
c)	Erläutern: Wendestellen von F_a für $f_a{}'(x) = F_a{}''(x) = 0$; Lösung von $a \cdot (4 - 3x^2) = 0$ unabhängig von a			K6	1

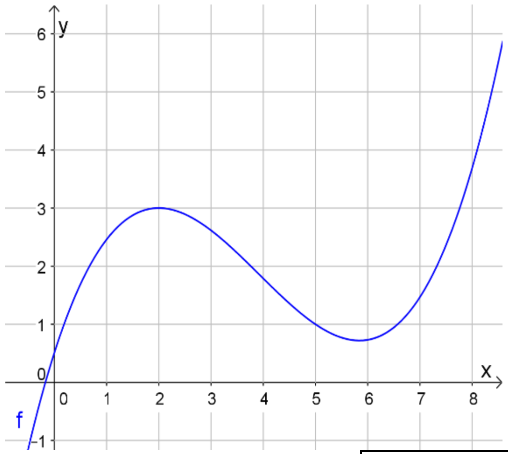
Aufgabe A 3

Dargestellt ist der Graph der Funktion f mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Veranschaulichen Sie:

$$\int_3^5 f(x)dx$$

und bestimmen Sie einen zugehörigen Näherungswert.



2 BE

b) Die Funktion F ist die für alle reellen Zahlen definierte Stammfunktion von f. Geben Sie mithilfe der Abbildung einen Wert für die zweite Ableitung von F an der Stelle 2 an.

1 BE

c) Begründen Sie, dass die Stammfunktion von f für $0 < x < 6$ keine Extrempunkte hat.

2 BE

A 3	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Veranschaulichen und bestimmen: $\int_3^5 f(x)dx \approx 3{,}5$	K2 K4			2
b)	Angeben: $F''(2) = f'(2) = 0$		K5		1
c)	Begründen: notwendige Bedingung für Extrempunkt $F'(x) = 0$ nicht erfüllt, weil $F'(x) = f(x) > 0$ für $0 < x < 6$			K1	2

Aufgabe A 4

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr sind. Korrigieren Sie falsche Aussagen.

	Aussage	wahr		Korrektur
		ja	nein	
a)	Die Gleichung $(x-3)^2 = 0$ hat genau eine Lösung.			
b)	Der größtmögliche Definitionsbereich von f mit $f(x) = \sqrt{3-x}$ ist $x < 3$ mit $x \in \mathbb{R}$.			
c)	Die Lösungsmenge der Gleichung $x^4 - 81x^2 = 0$ ist: $L = \{0; 9\}$.			
d)	Jede Gleichung der Form $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ hat maximal drei Lösungen für x mit $a, b, c, d, x \in \mathbb{R}$.			
e)	Potenzen mit gleichen Basen werden addiert, indem die Basis beibehalten wird und die Exponenten addiert werden.			

5 BE

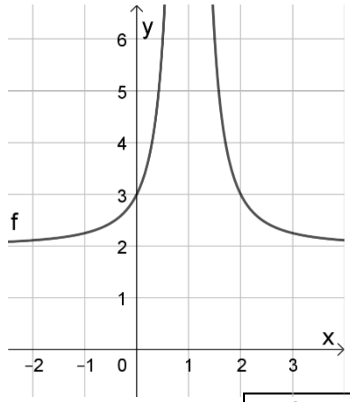
<table>
<tr><th rowspan="2">A 4</th><th rowspan="2">Lösung</th><th colspan="3">Kompetenzen/
Anforderungsbereiche</th><th rowspan="2">BE</th></tr>
<tr><th>AB I</th><th>AB II</th><th>AB III</th></tr>
<tr><td></td><td>Entscheiden und korrigieren:
<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th colspan="2">wahr</th><th rowspan="2">Korrektur</th></tr>
<tr><th>ja</th><th>nein</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>x</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td></td><td>x</td><td>$x \leq 3$</td></tr>
<tr><td>c)</td><td></td><td>x</td><td>$L = \{-9;\ 0; 9\}$.</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>x</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td></td><td>x</td><td>z. B.: Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem die Basis beibehalten wird und die Exponenten addiert werden.</td></tr>
</table>
</td><td>K1
K5
K6</td><td>K5</td><td></td><td>5</td></tr>
</table>

Aufgabe A 5

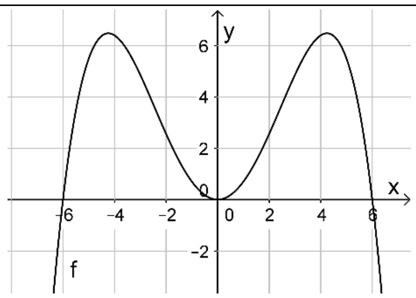
a) Der Graph einer Funktion ist zur y-Achse symmetrisch. Er hat drei Extrempunkte und für $-5 \leq x \leq 5$ genau eine Nullstelle.
Skizzieren Sie einen solchen Graphen.

2 BE

b) Geben Sie drei wesentliche Eigenschaften der dargestellten Funktion an.



3 BE

<table>
<tr><th rowspan="2">A 5</th><th rowspan="2">Lösung</th><th colspan="3">Kompetenzen/
Anforderungsbereiche</th><th rowspan="2">BE</th></tr>
<tr><th>AB I</th><th>AB II</th><th>AB III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Skizzieren, z. B.:

</td><td></td><td>K4
K6</td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Angeben: drei Eigenschaften, z. B.
keine Nullstelle; Wertebereich $y > 2$;
Schnittpunkt mit der y-Achse $P_y(0|3)$;
eine waagerechte Asymptote (y = 2);
eine senkrechte Asymptote (x = 1); $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$</td><td>K6</td><td>K4</td><td></td><td>3</td></tr>
</table>

Aufgabe A 6

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x + 2$ mit $x \in \mathbb{R}$.
Ermitteln Sie Werte für a und b ($a \neq b$) so, dass

- $\int_a^b f(x)dx > 0$
- $\int_a^b f(x)dx < 0$
- $\int_a^b f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = 35$

5 BE

A6	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
	Ermitteln, z. B.: $\int_a^b f(x)dx = 35$ mit $a = 0; b = 5$		(K4) K5	K2	5

Aufgabe A 7

Der Graph einer quadratischen Funktion mit dem Scheitelpunkt $S(2|-4)$ besitzt bei $x_0 = -2$ eine Nullstelle.

a) Geben Sie die andere Nullstelle des Graphen der Funktion an.

1 BE

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse.

4 BE

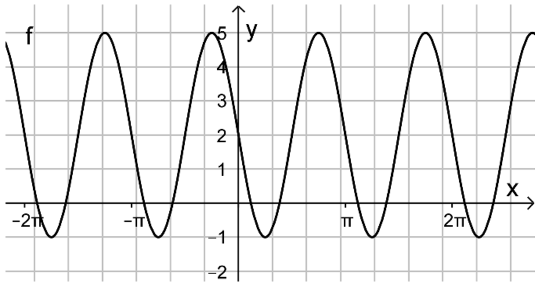
A 7	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Angeben: $x_0 = 6$	K2 K4			1
b)	Bestimmen: $f(x) = a(x-2)^2 - 4$; $a = \frac{1}{4}$ $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 4$; $P_y(0\|-3)$		K2 K5		4

Aufgabe A 8

a) Beschreiben Sie, wie der Graph von g mit $g(x) = \frac{2}{5} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ aus dem Graphen f mit $f(x) = \sin(x)$ hervorgeht.

2 BE

b) Geben Sie zu dem folgenden Schaubild eine mögliche Funktionsgleichung einer allgemeinen Sinusfunktion an.

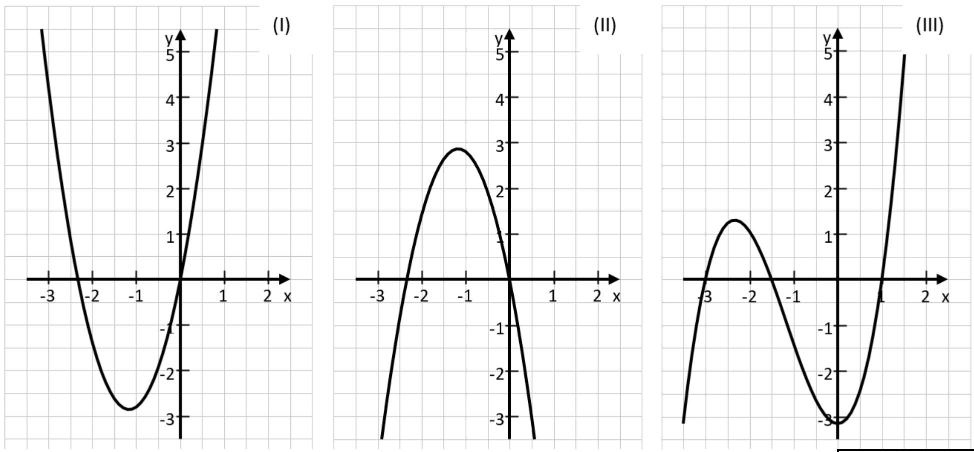


3 BE

A 8	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Beschreiben: - Stauchung in y-Richtung y-Achse um den Faktor $\frac{2}{5}$ - Verschiebung in x-Richtung x-Achse um $\frac{\pi}{3}$		K4 K6		2
b)	Angeben: $h(x) = -3 \cdot \sin(2x) + 2$		K4		3

Aufgabe A 9

Entscheiden Sie, welche Abbildungen die Graphen der Funktionen f und f´ sind.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.



5 BE

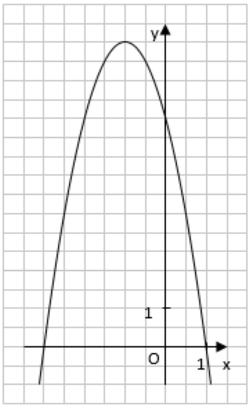
9	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
	Entscheiden und begründen: Graph von f Abb. (III); Graph von f' Abb.(I) Extremstellen von f sind Nullstellen von f' z. B.: für x > 0 Graph von f monoton steigend, also ist für x > 0 $f'(x) > 0$		K1 K4		5

Aufgabe A 10

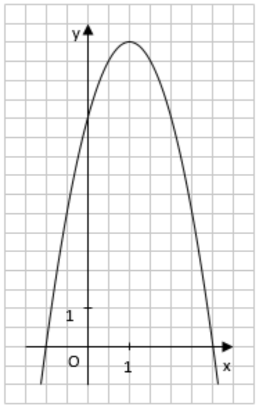
Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $f(x) = -2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 1)$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie den Graphen (A), (B), (C) oder (D) an, der zur Funktion f gehört.
Geben Sie zwei Gründe für Ihre Entscheidung an.

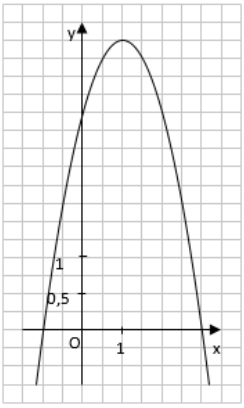
(A)



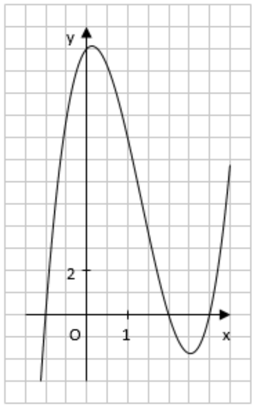
(B)



(C)



(D)



3 BE

b) Zeigen Sie, dass $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$ gilt.

2 BE

A 10	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Angeben: Graph (B) ; Begründung (zwei Gründe)		K1 K4		3
b)	Zeigen:	K5			2

Aufgabe A 11

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = -2 \cdot (x-3) \cdot (x+1)$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Im Punkt $Q(3|0)$ wird die Tangente h an den Graphen der Funktion f gelegt.
Ermitteln Sie die Gleichung dieser Tangente.
Geben Sie eine Gleichung einer Geraden g an, die senkrecht zur Tangente h verläuft.

3 BE

b) Der Graph von f schließt mit den Koordinatenachsen im Intervall $-1 \le x \le 0$ eine Fläche ein.
Prüfen Sie, ob die Fläche kleiner als 3 Flächeneinheiten ist.

2 BE

A 11	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Ermitteln: $f'(x) = -4x + 4$ $f'(3) = -8 = m$ Gleichung von h: $y = -8x + 24$ Angeben: Gleichung von g, z. B.: $y = \frac{1}{8}x - \frac{3}{8}$		K2 K5 K6		3
b)	Prüfen: $\int_{-1}^{0} \left(-2(x^2 - 2x - 3)\right) dx = \frac{10}{3} > 3$ Die Fläche ist nicht kleiner als 3 FE.		K1 K2 K5		2

Aufgabe A 12

Geben Sie jeweils die erste Ableitung an.

$f_1(x) = \frac{\sqrt{x}}{4}$; $f_2(x) = 5 - \frac{17}{x}$; $f_3(x) = x \cdot e^x$; $f_4(z) = (6z-2)^2$; $f_5(t) = 4x^5 + t$

5 BE

A 12	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
	Angeben: $f_1{}'(x) = \frac{1}{8\sqrt{x}}$ $f_2{}'(x) = \frac{17}{x^2}$ $f_3{}'(x) = e^x + x \cdot e^x$ $f_4{}'(z) = 12 \cdot (6z-2)$ $f_5{}'(t) = 1$		K5		5

Aufgabe A 13

Berechnen Sie die Integrale.

$$\int_{1}^{1} x^2 dx$$

$$\int_{-1}^{2} (4x - 3) dx$$

$$\int_{0}^{1} e^{2x-1} dx$$

5 BE

A 13	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
	$\int_{1}^{1} x^2 dx = 0$ $\int_{-1}^{2} (4x - 3) dx = [2x^2 - 3x]_{-1}^{2} = -3$ $\int_{0}^{1} e^{2x-1} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x-1}\right]_{0}^{1} = \frac{e - e^{-1}}{2}$		K5		5

Aufgabe A 14

Aus einem Draht der Länge 9 m wird ein quaderförmiges Kantenmodell für ein Aquarium hergestellt. Eine Seite der Grundfläche ist doppelt so lang wie die andere.
Ermitteln Sie die Kantenlängen dieses Modells so, dass das Fassungsvermögen des Aquariums möglichst groß wird. (Auf den Nachweis des Maximums wird verzichtet.)

5 BE

A 14	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
	Ermitteln: $v(a) = a \cdot 2a \cdot (\frac{9}{4} - a - 2a) \quad ; \quad 0 < a < \frac{3}{4}$ $v'(a) = -9a(2a - 1) = 0$ $a_1 = 0$ entfällt $a_2 = \frac{1}{2}m$ $b = 1m$ $c = \frac{3}{4}m$		K5	K2	5

Aufgabe A 15

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^2 - 4x + 8$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie den Scheitelpunkt der Funktion f.

1 BE

b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f in ein Koordinatensystem.

1 BE

c) Der Graph der Funktion f wird an der x-Achse gespiegelt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der gespiegelten Funktion.

1 BE

d) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Gerade g mit der Gleichung $g(x) = -2x + 7$ Tangente an den Graphen der Funktion f ist.

2 BE

A 15	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Bestimmen: $S(2\|4)$	K5			1
b)	Skizzieren	K4			1
c)	Ermitteln, z.B.: $y = -x^2 + 4x - 8$		K2		1
d)	Nachweisen: $g(1) = f(1) = 5$ $f'(1) = -2$		K1 K5		2

Aufgabe A 16

Kinder wollen aus vier Stangen von jeweils zwei Meter Länge das Gerüst eines Zeltes bauen, welches die Form einer geraden quadratischen Pyramide mit größtmöglichem Volumen hat.

a) Lani sagt: „Lass uns für die Länge der Grundseite ebenfalls 2 m wählen, dann haben wir die meiste Luft im Zelt."
Berechnen Sie für diesen Fall das Volumen.

3 BE

b) Paul hat für die Bestimmung des Volumens eine Zielfunktion gefunden.
Beschreiben Sie ohne konkrete Rechnung, wie er damit das maximale Volumen berechnen kann.

2 BE

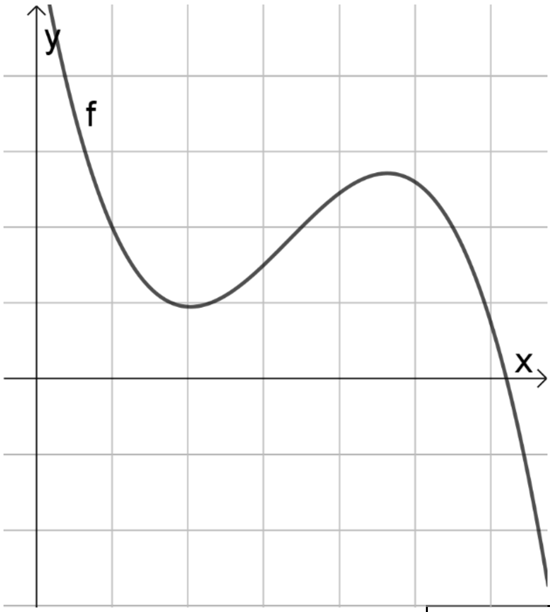
A 16	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Berechnen: $h^2 = 2\,m^2$; $V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{2}\,m^3$		K2 K5		3
b)	Beschreiben: Paul setzt den Term der ersten Ableitung der Zielfunktion gleich null. Die Lösungen dieser Gleichung sind die möglichen Extremstellen. Mithilfe eines hinreichenden Kriteriums muss das maximale Volumen nachgewiesen werden.		K6		2

Aufgabe A 17

Fügen Sie dem abgebildeten Graphen Punkte A, B und C mit folgenden Eigenschaften hinzu:

- Im Punkt A ist die erste Ableitung negativ.
- Im Punkt B ist die erste Ableitung am größten.
- Im Punkt C ist die erste Ableitung null.

Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf der Ableitungsfunktion in das Koordinatensystem.



5 BE

A 17	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
	Hinzufügen: Punkte A, B, C mit den Eigenschaften Skizzieren: Ableitungsfunktion		K2	K4	5

Aufgabe A 18

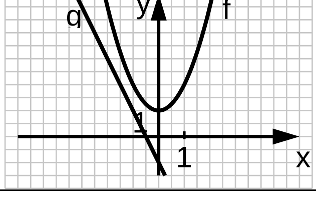
Gegeben sind die Funktionen f durch $f(x) = x^2 + 1$ und g durch $g(x) = -2x - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g in ein gemeinsames Koordinatensystem.

2 BE

b) Berechnen Sie die Stelle, an der die Differenz der Funktionswerte von f und g am kleinsten ist.

3 BE

A 18	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Zeichnen: 	K4			2
b)	Berechnen: $d(x) = x^2 + 2x + 2$ $d'(x) = 2x + 2 = 0$ $x = -1$ mit $d''(-1) > 0$		K2 K5		3

3.1.2 Geometrie

Aufgabe G 1

In einem Koordinatensystem sind die Punkte $A(-4|0)$, $B(0|-2)$ und $C(3|4)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ zueinander senkrecht sind.

2 BE

b) Die Punkte ABCD sind Eckpunkte eines Rechtecks.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes D an.

1 BE

c) Die Gerade g ist eine Symmetrieachse im Rechteck ABCD.
Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von g.

2 BE

G 1	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Zeigen: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} = 0$	K5			2
b)	Angeben: $D(-1|6)$		K4 (K5)		1
c)	Ermitteln: $f(x) = 2x + 3$ oder $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$		K2 K5		2

Aufgabe G 2

Gegeben ist ein Viereck ABCD mit
$A(-3|1|-4)$; $B(0|5|-2)$; $C(2|3|-1)$ und $D(-1|-1|-3)$.

a) Weisen Sie nach, dass es sich bei diesem Viereck um ein Rechteck handelt.

2 BE

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks ABCD.

2 BE

c) Der Punkt S ist der Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks ABCD.
Geben Sie die Koordinaten von S an.

1 BE

G 2	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Nachweisen, z. B.: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$	K1 K5			2
b)	Flächeninhalt: $A = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| = 3\sqrt{29}$ FE		K5		2
c)	Angeben: $S(-0{,}5|2|-2{,}5)$	K5			1

Aufgabe G 3

Gegeben sind die Gerade g durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $a, b, t \in \mathbb{R}$ und die Ebene E durch $6x + 4y - 3z = 9$.

a) Bestimmen Sie den Wert für b, so dass die Gerade g parallel zur Ebene E verläuft.

2 BE

b) Ermitteln Sie je einen Wert für a und b so, dass die Gerade g die Ebene E in genau einem Punkt senkrecht durchstößt.

3 BE

G 3	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Bestimmen: $\begin{pmatrix} 4 \\ b \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0; b = -7{,}5$		K2 K5		2
b)	Ermitteln, z. B.: $a = -3; b = \frac{8}{3}$			K2 K5	3

Aufgabe G 4

Die Punkte $A(3|4|1)$, $B(6|3|2)$, $C(3|0|3)$ und $D(0|1|2)$ sind die Eckpunkte eines ebenen Vierecks ABCD.

a) Weisen Sie nach, dass ABCD ein Parallelogramm ist.

2 BE

b) Prüfen Sie, ob dieses Viereck sogar ein Rechteck ist.

2 BE

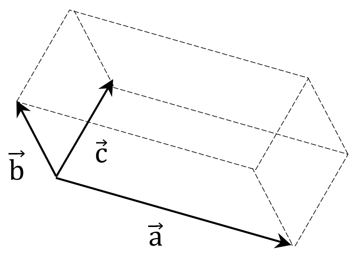
c) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Diagonalen an.

1 BE

G 4	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Nachweisen: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$	K5	K1		2
b)	Prüfen: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$ Das Parallelogramm ist kein Rechteck.	K2			2
c)	$S(3|2|2)$		K5		1

Aufgabe G 5

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ spannen, wie in der Abbildung dargestellt, einen Körper auf.



a) Zeigen Sie, dass der aufgespannte Körper ein Quader ist.

3 BE

b) Bestimmen Sie das Volumen des Quaders.

2 BE

G 5	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 2 = 0$ und $\vec{b} \cdot \vec{c} = -4 + 4 = 0$ und $\vec{a} \cdot \vec{c} = 8 + 2 - 10 = 0$	K4 K5			3
b)	$V = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \lvert\vec{c}\rvert = \sqrt{9}\mathrm{LE} \cdot \sqrt{5}\mathrm{LE} \cdot \sqrt{45}\mathrm{LE} = 45\mathrm{VE}$		K5		2

Aufgabe G 6

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -3 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Untersuchen Sie, ob eine reelle Zahl t so existiert, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

a) zueinander parallel sind.

2 BE

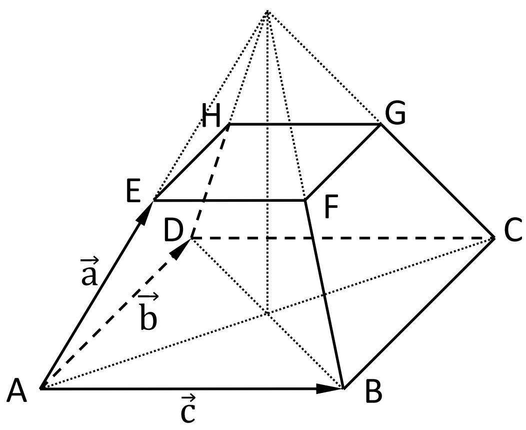
b) zueinander orthogonal sind.

3 BE

G 6	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Untersuchen: $\vec{a} = k \cdot \vec{c}$ $k = -2,\ t = -2$	K5			**2**
b)	Untersuchen: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4t - 20 = 0$ $t = 5$		K5		**3**

Aufgabe G 7

Eine gerade Pyramide, wird auf halber Höhe von einer zur Grundfläche parallelen Schnittfläche geschnitten. Dabei entsteht der Pyramidenstumpf ABCDEFGH.
Die Grundfläche ABCD ist ein Parallelogramm.



a) Begründen Sie, dass $|\overline{AB}| = 2 \cdot |\overline{EF}|$ gilt.

1 BE

b) Geben Sie die Vektoren $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EC}$ und $\overrightarrow{GC}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ dar.

3 BE

c) Geben Sie zwei Bedingungen mit Hilfe der Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ an, unter denen die Grundfläche ABCD ein Quadrat ist.

1 BE

G 7	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Begründen: Nach dem Strahlensatz ist das Verhältnis der Strecken $|\overline{AB}|:|\overline{EF}| = 2:1$ gleich dem Verhältnis der Längen der zugehörigen Höhen.		K1 K4		1
b)	Angeben: $\overrightarrow{DB} = \vec{c} - \vec{b}$ $\overrightarrow{EC} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ $\overrightarrow{GC} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$	K4	K4		3
c)	Angeben: $|\vec{b}| = |\vec{c}|$ und $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$		K5		1

Aufgabe G 8

Berechnen Sie a und b so, dass die Vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Quadrat aufspannen.

5 BE

G 8	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
	Berechnen: (I) $\vec{r} \cdot \vec{s} = -a + 2b + 2 = 0.$ und (II) $a^2 + 5 = b^2 + 5$; $|a| = |b|$ für $a = -2$; $b = -2$ oder $a = \frac{2}{3}$; $b = -\frac{2}{3}$		K2 K5		5

Aufgabe G 9

Gegeben sind die Geraden g_1 und g_2 durch

$g_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad g_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (r, s \in \mathbb{R}).$

a) Begründen Sie, dass sich die beiden Geraden senkrecht schneiden.

2 BE

b) Beschreiben Sie die besondere Lage von g_1 im Raum.

1 BE

c) Die Gerade g_1 wird an der x-y-Ebene gespiegelt.
Geben Sie eine Gleichung für das Spiegelbild an.

2 BE

G 9	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Begründen: Der Punkt $S(2\|-1\|1)$ gehört zu beiden Geraden. Die Geraden liegen senkrecht zueinander, denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$		K1 K5		2
b)	Beschreiben: Die Gerade g_1 verläuft parallel zur xz – Ebene.		K1		1
c)	Angeben: $g_S\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$		K2 K5		2

Aufgabe G 10

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $A(12|14|5)$, $B(6|6|5)$, $C(4|20|5)$ und einem rechten Innenwinkel bei A.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC einen Flächeninhalt von 50 FE besitzt.

2 BE

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes S so, dass die entstehende Pyramide ABCS ein Volumen von 75 VE besitzt.

3 BE

G 10	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Zeigen: $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{AC}\rvert = 10\ \text{LE};\ A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 50\ \text{FE}$	K4 K5			2
b)	Bestimmen: $V = \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot h = 75\ \text{VE} \ \rightarrow h = 4{,}5\ \text{LE}$ z.B.: $S(12\|14\|9{,}5)$		K2 K5		3

Aufgabe G 11

Für jede reelle Zahl b ist eine Gerade g_b gegeben, die durch den Punkt $A_b(1|-b|5)$ mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{w_b} = \begin{pmatrix} 2b \\ b^2 \\ b-1 \end{pmatrix}$ verläuft. Der Punkt D hat die Koordinaten $D(-5|-12|3)$.

Ermitteln Sie den Wert des Parameters b so, dass der Punkt D auf der Geraden g_b liegt.

5 BE

G 11	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche AB I	AB II	AB III	BE
	Ermitteln: $g_b: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -b \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2b \\ b^2 \\ b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\text{I} \quad 1 + 2b \cdot t = -5 \qquad b \cdot t = -3$ $\text{II} \quad -b + b^2 \cdot t = -12 \qquad b^2 \cdot t - b + 12 = 0$ $\text{III} \quad 5 + (b-1) \cdot t = 3 \qquad (b-1) \cdot t = -2$ $\underline{t = -1}$ $\underline{\underline{b = 3}}$		K2 K5		**5**

Aufgabe G 12

Gegeben sind die Punkte $E(0|0|0)$, $F(0|0|9)$, $G(4|-2|4)$ und $H(-2|4|4)$.

a) Zeigen Sie, dass $|\overrightarrow{EG}| = |\overrightarrow{EH}|$ ist.

1 BE

b) Zeigen Sie, dass die Dreiecke EFG und EFH bei Punkt E die gleiche Winkelgröße haben.

2 BE

c) Begründen Sie, dass die Dreiecke EFG und EFH in ihrem Flächeninhalt übereinstimmen.

2 BE

G 12	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche AB I	AB II	AB III	BE
a)	Zeigen: $\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|$ $\rightarrow \sqrt{16+4+16}\ \text{LE} = \sqrt{4+16+16}\ \text{LE}$ $\rightarrow$ gleiche Beträge	K4 K5			**1**
b)	Zeigen: $\cos\sphericalangle FEG = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}}{9 \cdot 6} = \frac{2}{3}$ $\cos\sphericalangle FEH = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}}{9 \cdot 6} = \frac{2}{3}$ → gleiche Winkelgröße		K4		**2**
c)	Begründen: Dreiecke sind kongruent, da sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.		K6		**2**

Aufgabe G 13

Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ -12 \end{pmatrix}$.

Ermitteln Sie c für:

a) $\vec{u} \parallel \vec{v}$ — 1 BE

b) $\vec{u} \perp \vec{v}$ — 1 BE

c) $|\vec{v}| = 13$ — 2 BE

d) $2 \cdot \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix}$ — 1 BE

G 13	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche AB I	AB II	AB III	BE
a)	Ermitteln: c = 48	K4 K5			1
b)	Ermitteln: c = -3	K4 K5			1
c)	Ermitteln: c = 5 und c = -5		K4 K5		2
d)	Ermitteln: c = -21		K4 K5		1

3.1.3 Stochastik

Aufgabe S 1

Beurteilen Sie, ob die beschriebene Zufallsgröße als binomialverteilt, normalverteilt oder anders verteilt betrachtet werden kann.

a) Die Körpergröße eines 16-jährigen Jugendlichen, der in Deutschland lebt, soll durch eine Stichprobe ermittelt werden.

b) In einer Socke befinden sich fünf gleiche Bälle.
Nur in zwei Bällen befindet sich ein Gewinn. Es wird dreimal mit Zurücklegen gezogen. Die Anzahl der Gewinne wird bestimmt.

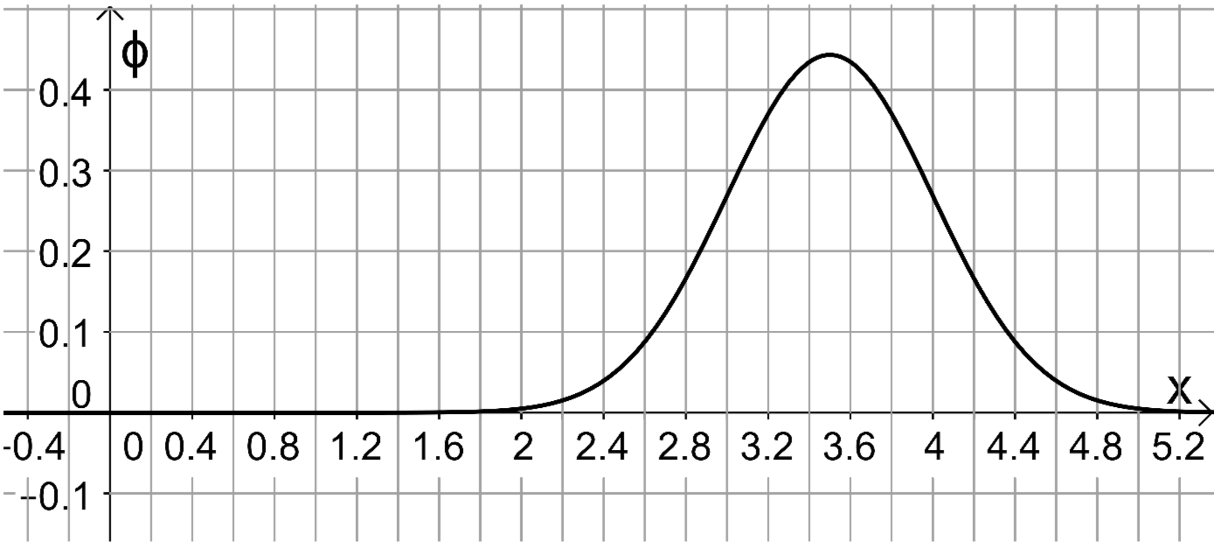
c) In einem Automat befinden sich 23 Kaugummikugeln. Nur zwei Kaugummikugeln sind gelb. Es werden drei Kaugummikugeln entnommen. Die Anzahl der gelben Kaugummikugeln wird bestimmt.

5 BE

<table>
<tr><th rowspan="2">S 1</th><th rowspan="2">Lösung</th><th colspan="3">Kompetenzen/
Anforderungsbereiche</th><th rowspan="2">BE</th></tr>
<tr><th>AB I</th><th>AB II</th><th>AB III</th></tr>
<tr><td></td><td>Beurteilen:</td><td rowspan="4">K5</td><td rowspan="4">K3
K6</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">5</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>Wenn die Körpergröße von einer repräsentativen und ausreichend großen Anzahl von Personen bestimmt wird, ist die Körpergröße normalverteilt.</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Die Anzahl der Gewinne ist binomialverteilt $(n = 3; p = \frac{2}{5})$, wenn es zwei Ausgänge gibt und die Trefferwahrscheinlichkeit p für einen Gewinn konstant bleibt. Das gilt, wenn der Ball zurückgelegt wird.</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Die Wahrscheinlichkeit beim ersten, zweiten und dritten Ziehen einer gelben Kaugummikugel bleibt nicht konstant (Ziehen ohne Zurücklegen – andere Verteilung).</td></tr>
</table>

Aufgabe S 2

Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße X.



a) Geben Sie den Erwartungswert von X an.

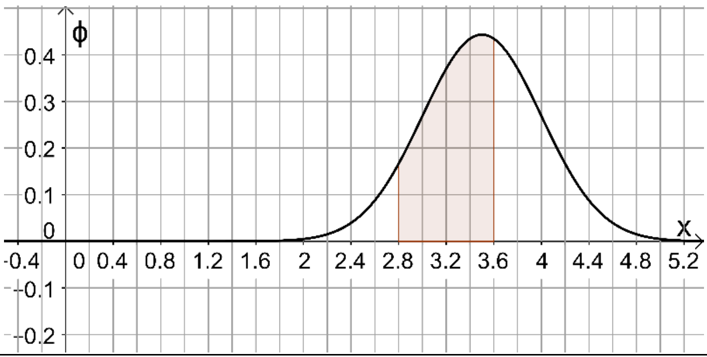
1 BE

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass X den Wert 4 annimmt.

1 BE

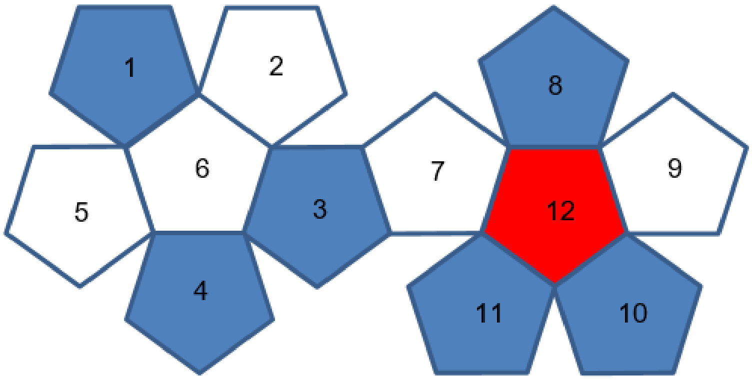
c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X einen Wert von 2,8 bis 3,6 annimmt. Veranschaulichen Sie diesen Wert in der Darstellung.

3 BE

S 2	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Angeben: $\mathrm{E(X)} = 3{,}5$	K4 K5			1
b)	Angeben: $\mathrm{P(X = 4)} = 0$	K5			1
c)	Bestimmen: $\mathrm{P}(2{,}8 \leq \mathrm{X} \leq 3{,}6\,) \approx 0,3$ 		K2 K4 K5		3

Aufgabe S 3

Dargestellt ist das Netz eines Dodekaeders.



a) Das Dodekaeder wird einmal geworfen. Überprüfen Sie, ob die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Es wird eine ungerade Zahl oder Blau gewürfelt.“ 75 % ist.

2 BE

b) Das Dodekaeder wird zweimal geworfen.
Für zweimal Rot erhält der Spieler 20 €, ansonsten nichts.
Entscheiden Sie, ob das Spiel fair ist, wenn der Spieleinsatz 2 € beträgt.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

3 BE

S 3	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Überprüfen: $\mathrm{P(b)} + \mathrm{P}(5,7,9) = \frac{3}{4} = 75\ \%$	K3 K5			2
b)	Entscheiden und begründen, z. B.: $\frac{1}{144} \cdot 18 + \frac{143}{144} \cdot 1(-2) < 0$; kein faires Spiel, Verlust auf lange Sicht	K6	K3 K5		3

Aufgabe S 4

In einer Urne befinden sich drei rote, zwei blaue, sechs grüne und vier schwarze Kugeln.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim zweimaligen Ziehen mit Zurücklegen eine rote und eine grüne Kugel entnommen werden.

2 BE

b) Franz behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
A: = „Ziehen höchstens einer blauen Kugel“
beim zweimaligen Ziehen einer Kugel ohne Zurücklegen durch $1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \frac{104}{105}$ bestimmt werden kann.
Erläutern Sie diesen Lösungsweg.

2 BE

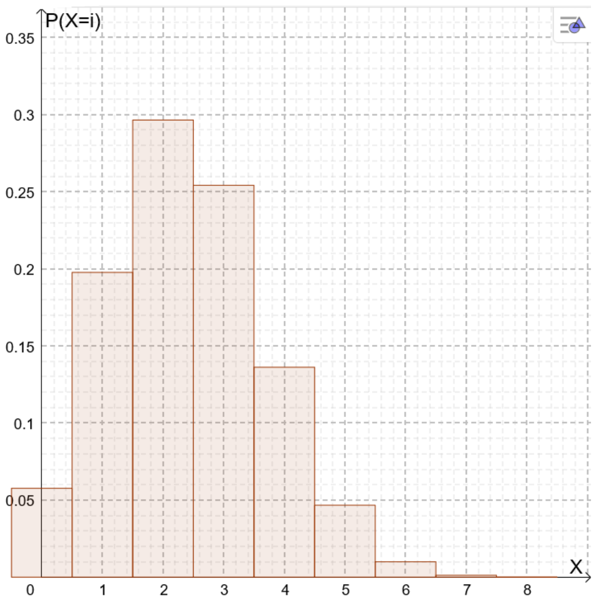
c) Geben Sie an, wie viele schwarze Kugeln in die Urne dazugelegt werden müssen, so dass die Wahrscheinlichkeit beim einmaligen Ziehen einer Kugel eine grüne Kugel zu ziehen 0,25 beträgt.

1 BE

S 4	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Bestimmen: P(„rote und grüne Kugel gezogen“) = P(rg;gr) $= \frac{3}{15} \cdot \frac{6}{15} + \frac{6}{15} \cdot \frac{3}{15} = \frac{4}{25} = 0{,}16$	K2 K5			2
b)	Erläutern: ((Bitte beim Lehrer kontrollieren)) Bestimmen der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses		K1 K6		2
c)	Angeben: Es müssen noch 9 schwarze Kugeln dazugelegt werden.	K5	K2 K6		1

Aufgabe S 5

In einem Ziehungsgefäß befinden sich 1000 Kugeln, davon sind 300 rot, der Rest ist weiß.
Es werden nacheinander 8 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der roten Kugeln unter den gezogenen.
Die Abbildung stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dar.



a) Begründen Sie, dass X binomialverteilt ist.

2 BE

b) Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der weißen Kugeln unter den gezogenen. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y.

3 BE

S 5	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Begründen: n = 1000, p = $\frac{300}{1000}$, zwei Ausgänge ziehen mit Zurücklegen	K3 K5			2
b)	Skizzieren: Wahrscheinlichkeitsverteilung mit p = $\frac{700}{1000}$, n = 1000	K6	K3 K5		3

Aufgabe S 6

Eine Reederei verwendet für Ausflüge Schiffe mit jeweils 300 Plätzen, die vor Antritt der Reise gebucht und bezahlt werden. Vereinfachend wird davon ausgegangen, dass jeder Platz einzeln gebucht wird, alle Plätze stets ausgebucht sind und dass das Modell der Binomialverteilung Anwendung findet.
Im Mittel werden 5 % der gebuchten Plätze kurzfristig storniert.
Erläutern Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung der folgenden Terme.

$$\mathrm{P(A)} = \binom{300}{10} \cdot 0{,}05^{10} \cdot 0{,}95^{290}$$

$$\mathrm{P(B)} = \binom{300}{299} \cdot 0{,}95^{299} \cdot 0{,}05^{1} + 0{,}95^{300}$$

$$\mathrm{P(C)} = 1 - \sum_{i=0}^{20} \binom{300}{i} \cdot 0{,}05^{i} \cdot 0{,}95^{300-i}$$

5 BE

S 6	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
	Erläutern: Die Terme geben die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass bei einer Reise A: genau 10 Plätze storniert werden B: höchstens ein Platz storniert wird C: mindestens 21 Plätze storniert werden		K2 K5		5

Aufgabe S 7

Ein Glücksrad hat drei unterschiedlich große Sektoren, einen grünen, einen weißen und einen schwarzen. Beim einmaligen Drehen wird der grüne Sektor mit der Wahrscheinlichkeit p getroffen, der weiße mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 %.

a) Interpretieren Sie den Term $(1-\mathrm{p})^5$ im Sachzusammenhang.

2 BE

b) Das Glücksrad wird achtmal gedreht. Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass der grüne Sektor genau dreimal getroffen wird, an.

1 BE

c) Anna hat das Glücksrad 80mal gedreht und festgestellt, dass der weiße Sektor bei deutlich weniger als 60 % der Drehungen getroffen wurde. Sie folgert: „Bei den nächsten 80 Drehungen muss der Anteil der Drehungen, bei denen der weiße Sektor getroffen wird deutlich mehr als 60 % betragen." Beurteilen Sie Annas Aussage.

2 BE

S 7	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche			BE
		AB I	AB II	AB III	
a)	Interpretieren: Das Glücksrad wird fünfmal gedreht, dabei wird der grüne Sektor nicht getroffen.	K6			2
b)	Angeben: $\binom{8}{3} \cdot \mathrm{p}^3 \cdot (1-\mathrm{p})^5$	K4 K5			1
c)	Beurteilen: Annas Aussage ist falsch, da die Wahrscheinlichkeit, dass der grüne Sektor getroffen wird, bei allen Drehungen gleich groß ist.		K1 K2		2

Aufgabe S 8

In einer Studie wurde ein Medikament getestet. Die Ergebnisse sind in der Tabelle dargestellt. Dabei bedeuten:

$\mathbf{M}$: Medikament genommen
$\overline{\mathbf{M}}$: Placebo genommen

$\mathbf{G}$: gesundet
$\overline{\mathbf{G}}$: nicht gesundet

	$\mathbf{G}$	$\overline{\mathbf{G}}$	
$\mathbf{M}$	5000	1000	6000
$\overline{\mathbf{M}}$	1500	2500	4000
Gesamt	6500	3500	10000

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Person, die das Medikament genommen hat, gesundet ist.

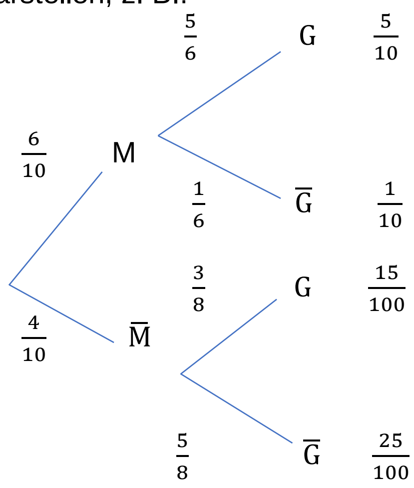
1 BE

b) Stellen Sie den Sachverhalt in einem vollständig beschrifteten Baumdiagramm dar.

3 BE

c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Person, die das Placebo genommen hat, nicht gesundet ist.

1 BE

<table>
<tr><td rowspan="2">S 8</td><td rowspan="2">Lösung</td><td colspan="3">Kompetenzen/ Anforderungsbereiche</td><td rowspan="2">BE</td></tr>
<tr><td>AB I</td><td>AB II</td><td>AB III</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>Angeben: P (Person ist gesundet) = $\frac{5000}{6000} = \frac{5}{6}$</td><td>K5</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Darstellen, z. B.:

</td><td></td><td>K4
K6</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Angeben:
P(Person ist nicht gesundet) = $\frac{5}{8}$</td><td>K6</td><td>K4</td><td></td><td>1</td></tr>
</table>

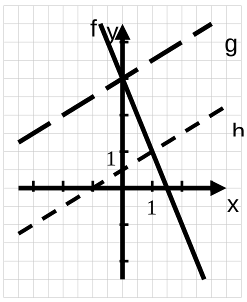
3.2 Zusätzliche Aufgaben

3.2.1 Analysis

Aufgabe AZ 1

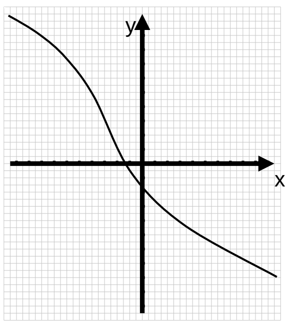
Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x) = -2x + 3$. Gesucht sind lineare Funktionen, deren Graphen zum Graphen von f senkrecht verlaufen.

a) Geben Sie zwei Gleichungen von verschiedenen Funktionen an, die diese Bedingung erfüllen.
b) Stellen Sie Ihre Lösung graphisch dar.

AZ 1	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
a)	z. B. $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ $h(x) = \frac{1}{2}x + 3$		K2 K5	
b)		K4		

Aufgabe AZ 2

Skizzieren Sie den Graphen einer streng monoton fallenden Funktion mit einer Nullstelle und einer Wendestelle.

AZ 2	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	z. B.: 	K4		

Aufgabe AZ 3

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(3) = 0$, $f'(3) = 0$ und $f''(3) = 2$.
Formulieren Sie zwei Eigenschaften der Funktion f, die aus den gegebenen Angaben geschlussfolgert werden können.

AZ 3	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	z. B. Die Funktion f hat bei $x = 3$ eine Nullstelle. Die Funktion f hat bei $x = 3$ einen lokalen Tiefpunkt.		K6 K2	

Aufgabe AZ 4

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit dem Wendepunkt $W(2|f(2))$.
Geben Sie die Aussagen an, die in jedem Fall zutreffend sind.

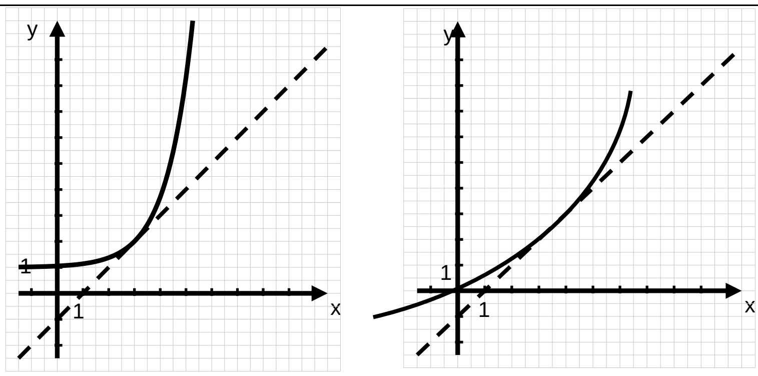
(I) $f'(2) = 0$ (II) $f''(2) = 0$
(III) $f'''(2) = 0$ (IV) Die Funktionswerte von f'' haben bei $x = 2$ einen Vorzeichenwechsel.

AZ 4	Hinweise zur Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	(II) (IV)	K1 K5		

Aufgabe AZ 5

Gegeben ist für $x \in \mathbb{R}$ eine stetige und differenzierbare Funktion f mit den Eigenschaften:
- f ist im gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend.
- f hat keinen Wendepunkt.
- $f(3) = 2$ und $f'(3) = 1$

a) Skizzieren Sie einen möglichen Graphen.
b) Geben Sie die Anzahl der möglichen Nullstellen von f an.

AZ 5	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
a)			K6 K4	
b)	keine eine Nullstelle	K2		

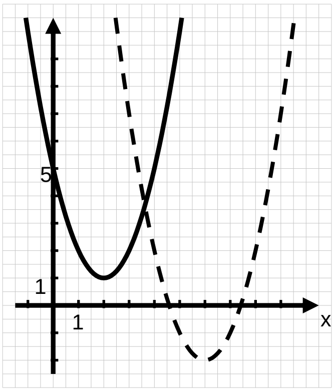
Aufgabe AZ 6

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = (x-2)^2 + 1$.

a) Zeichnen Sie den Graphen von f in einem geeigneten Intervall.

b) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle 1.

c) Der Graph wird um $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ verschoben. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung des neuen Graphen an.

AZ 6	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
a)		K4		
b)	$y = -2x + 4$		K2 K5	
c)	$f(x) = (x-6)^2 - 2$		K4 K5	

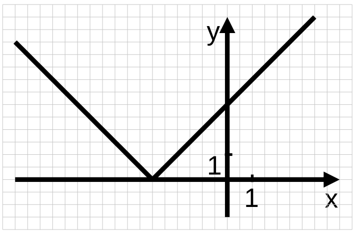
Aufgabe AZ 7

Gegeben sind die Funktionen ($x \in \mathbb{R}$)

(I) $y = -2(1 + x)$ (II) $y = 3 - 2x$ (III) $y = |x + 3|$

(IV) $y = 3 + \frac{1}{2}x$ (V) $y = -\frac{1}{2}(-6 + 4x)$

a) Geben Sie die Funktion an, die keine lineare Funktion ist.
b) Weisen Sie nach, dass zwei Funktionen identisch sind.
c) Begründen Sie, dass die Graphen von zwei Funktionen zueinander parallel verlaufen, aber nicht identisch sind.
d) Bestimmen Sie die Funktionen, die zueinander orthogonal sind.
e) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion (III) mindestens im Intervall $-5 \leq x \leq 1$.

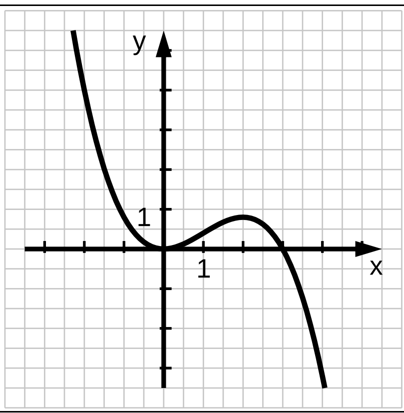
AZ 7	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
a)	(III)	K5		
b)	Nachweis, dass (II) und (V) identisch sind	K1 K5		
c)	Nachweis für (I) und (II) bzw. (V) gleicher Anstieg und unterschiedliches absolutes Glied		K1 K5	
d)	(I) und (II) bzw. (V) sind orthogonal zu (IV)	K2		
e)			K4	

Aufgabe AZ 8

Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades hat folgende Eigenschaften.

I. G_f hat im Ursprung einen lokalen Tiefpunkt.
II. G_f schneidet die x-Achse im Punkt $P(3|0)$.
III. G_f und die x-Achse begrenzen im Intervall $[0; 3]$ eine im I. Quadranten liegende Fläche vollständig.

Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen von f.

AZ 8	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
		K6	K4	

Aufgabe AZ 9

Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades hat folgende Eigenschaften.

(I) G_f hat im Ursprung einen lokalen Tiefpunkt.
(II) G_f schneidet die x-Achse im Punkt $P(3|0)$.
(III) G_f und die x-Achse begrenzen im Intervall $[0;3]$ eine im I. Quadranten liegende Fläche vollständig. Der Flächeninhalt dieser Fläche beträgt $A = \frac{9}{4}\,\text{FE}$.

Begründen Sie, dass sich aus diesen Bedingungen folgender Ansatz für die Bestimmung der Funktion f ergibt:

(1) $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$
(2) $3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0$
(3) $27a + 9b + 3c + d = 0$
(4) $\frac{81}{4}a + 9b + \frac{9}{2}c + 3d = \frac{9}{4}$

AZ 9	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ Begründung: (1) $f(0) = 0$ (2) $f'(0) = 0$ (3) $f(3) = 0$ (4) $\int_0^3 f(x)dx = \frac{9}{4}$	K4	K1 K6	

Aufgabe AZ 10

Die Graphen einer Schar ganzrationaler Funktionen f_t dritten Grades mit dem Parameter t haben folgende Eigenschaften:

(I) Die Graphen besitzen einen lokalen Tiefpunkt im Ursprung.
(II) Jeder Graph schneidet die x-Achse im Punkt $P(t|0)$ mit $t \in \mathbb{R}; t > 0$.
(III) Jeder Graph und die x-Achse begrenzen im Intervall $[0;t]$ eine im I. Quadranten liegende Fläche vollständig.
Der Flächeninhalt dieser Fläche beträgt $A = \frac{t^2}{4}\,\text{FE}$.

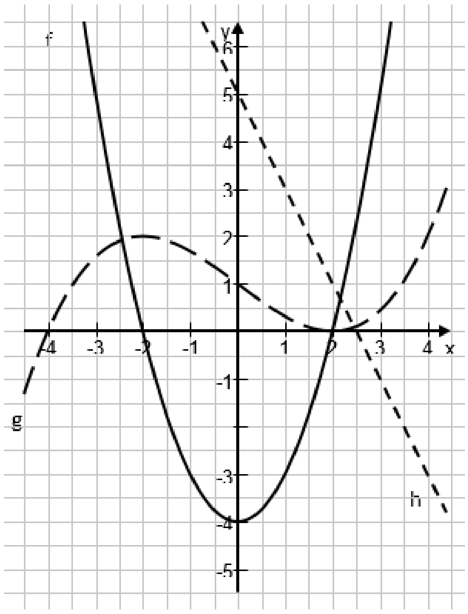
Stellen Sie einen Lösungsansatz zum Ermitteln der Gleichung dieser Funktionenschar auf.
Hinweis: Die Angabe der Funktionsgleichung ist nicht erforderlich.

AZ 10	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ (1) $f(0) = 0$ (2) $f'(0) = 0$ (3) $f(t) = 0$ (4) $\int_0^t f(x)dx = \frac{t^2}{4}$	K5	K6 K1	

Aufgabe AZ 11

Bestimmen Sie anhand der gegebenen Graphen folgende Werte.

a) $f(-2)$
b) Nullstelle von h
c) Monotonie von h
d) Schnittpunkte des Graphen der Funktion g mit den Koordinatenachsen
e) Hochpunkt des Graphen der Funktion g



AZ 11	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
a)	$f(-2) = 0$	K4 K5		
b)	$x_o = 2{,}5$	K4 K5		
c)	streng monoton fallend	K4		
d)	$P_{x_1}(-4\|0),\ P_{x_2}(2\|0),\ P_y(0\|1)$	K4 K5		
e)	$H(-2\|2)$	K4 K5		

Aufgabe AZ 12

Geben Sie für die Gleichungen jeweils den Definitionsbereich und die Lösungsmenge an.

a) $\frac{2}{x-1} = \frac{5}{x+2}$ b) $|x-3| = 2$ c) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

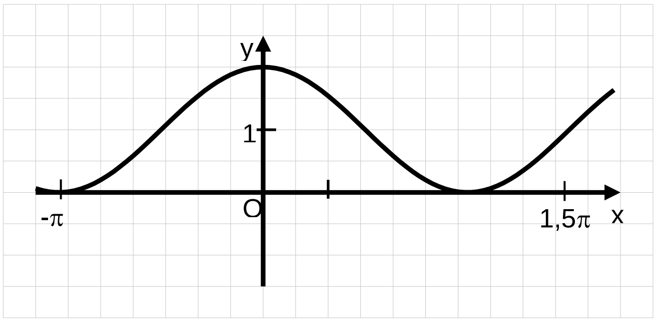
AZ 12	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	a) $x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq -2$ $\quad L = \{3\}$ b) $x \in \mathbb{R}$ $\quad L = \{1; 5\}$ c) $x \in \mathbb{R}$ $\quad L = \{0; 1\}$	K5		

Aufgabe AZ 13

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = \cos x + 1$ in ein Koordinatensystem im Intervall $-\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi; x \in \mathbb{R}$.

b) Geben Sie den Wertebereich der Funktion f(x) an.

c) Geben Sie die Gleichung der Funktion $f(x) = \cos x + 1$ in der Form $y = \sin(x + c) + d$ an.

AZ 13	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
a)	graphische Darstellung: 	K4		
b)	Wertebereich: $0 \leq y \leq 2; y \in \mathbb{R}$	K2 K5		
c)	Funktionsgleichung: $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$		K4	

Aufgabe AZ 14

Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung $2x^3 - 2x = 0$ mit $x \in \mathbb{R}$.
Bewerten Sie folgenden Lösungsweg.

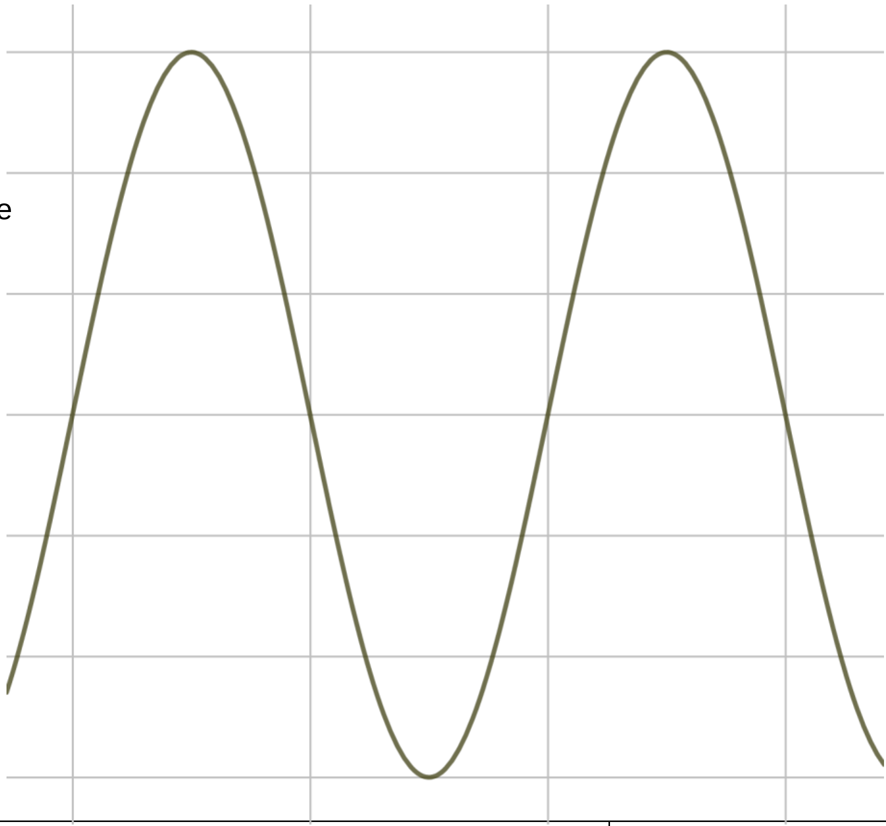
$$\begin{aligned} 2x^3 - 2x &= 0 && |: 2x \\ x^2 - 1 &= 0 && |+ 1 \\ x^2 &= 1 \\ L &= \{-1;1\} \end{aligned}$$

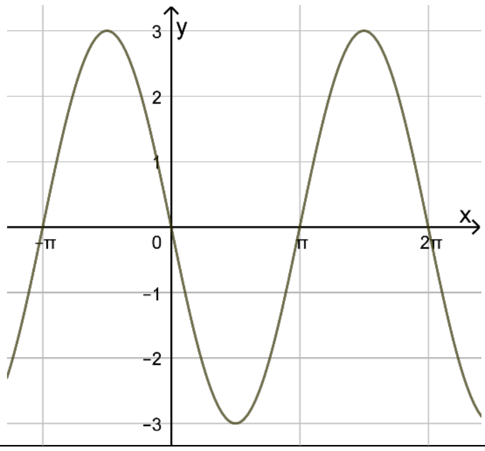
AZ 14	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Der Lösungsweg ist nicht korrekt. Mit dem ersten Umformungsschritt wäre eine Fallunterscheidung nötig, da die Division durch Null nicht erklärt ist. Die korrekte Lösung ist $L = \{-1; 0; 1\}$.		K1 K2	

Aufgabe AZ 15

Gegeben ist der Graph der Funktion $f(x) = -3\sin x$.

Zeichnen Sie ein Koordinatensystem in die Darstellung ein und beschriften Sie die Achsen.



AZ 15	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	z. B.: 		K5	

Aufgabe AZ 16

Ein Feld wird von acht Mähdreschern in sechs Stunden abgeerntet.
Berechnen Sie die Zeitersparnis, wenn 12 Mähdrescher im Einsatz sind.

AZ 16	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Zeitersparnis von 2 Stunden	K3		

Aufgabe AZ 17

Geben Sie die Fehler an, die bei den Termumformungen gemacht wurden. Korrigieren Sie.
a) $(2x + 4)(5x + 7) = 10x^2 + 14x + 28$ b) $(2a - 4b)^2 = 2a^2 - 4b^2$

AZ 17	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
a)	falsch ausmultipliziert Der Term 20x fehlt.	K6 K4 K5		
b)	binomische Formel falsch angewendet $= 4a^2 - 16ab + 16b^2$	K6 K4 K5		

Aufgabe AZ 18

Vereinfachen Sie folgende Terme soweit wie möglich.
a) $\sqrt{98} \cdot \sqrt{2}$ b) $\sqrt{100x^2 + 21x^2}$ c) $\sqrt{3} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{75} - 4\sqrt{12}\right)$

AZ 18	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
a)	14	K4		
b)	11 |x|		K4	
c)	6		K4	

Aufgabe AZ 19

Ein PKW verbraucht etwa 8 Liter Benzin auf 100 km.
Berechnen Sie den Benzinverbrauch für 70 Kilometer.

AZ 19	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	5,6 Liter	K3 K5		

Aufgabe AZ 20

Stellen Sie $f(x) = x^2$ für $x > 0$ und $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$ graphisch dar.
Beschreiben Sie den Zusammenhang beider Graphen.

AZ 20	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	graphische Darstellung Beschreibung, dass der Graph von g durch Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden des I. Quadranten entsteht	K6	K4	

Aufgabe AZ 21

Geben Sie den Term an, der dem unbestimmten Integral $\int \frac{1}{2x}\,dx$ entspricht. $(t \in \mathbb{R})$

A: $\ln|2x| + t$ B: $\frac{1}{2}\ln|2x| + t$ C: $\frac{1}{2}\ln|2x|$ D: $2 \cdot \ln|2x| + t$

AZ 21	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	B: $\frac{1}{2}\ln|2x| + t$	K5		

Aufgabe AZ 22

Begründen Sie, dass die Funktion f keine lokalen Extremwerte besitzen kann.
a) $f(x) = 8x - 10$ b) $f(x) = e^{2x} + 3$ c) $f(x) = (x - 5)^3$ d) $f(x) = -\ln(x + 1)$

AZ 22	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Begründung, z. B. über das Monotonieverhalten von f		K1	

Aufgabe AZ 23

Die Funktion f mit
a) $y = f(x) = a \cdot x^2 + b$
b) $y = f(x) = a \cdot e^x + b$
hat an der Stelle $x_0 = 1$ den Anstieg $\frac{1}{2}$ und den Funktionswert 2.
Ermitteln Sie die Werte für a und b.

AZ 23	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
a)	$a = \frac{1}{4}; b = \frac{7}{4}$		K2 K5	
b)	$a = \frac{1}{2e}; b = \frac{3}{2}$		K2 K5	

Aufgabe AZ 24

Die Graphen der Funktionen f und g besitzen an der Stelle $x = a$ mit $a \in \mathbb{R}$ eine gemeinsame Tangente.
Beschreiben Sie eine Möglichkeit zum Nachweis dieser Eigenschaft.

AZ 24	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Beschreibung einer Möglichkeit z. B. mit: $f(a) = g(a)$ und $f'(a) = g'(a)$			K2 K6

Aufgabe AZ 25

Bestimmen Sie eine Gleichung der Stammfunktion der Funktion f mit
$f(x) = 6x^2 - 4x$, deren Graph durch den Punkt $P(1|\ 3)$ verläuft.

AZ 25	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Bestimmung einer Gleichung der Stammfunktion: $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3$		K5	

Aufgabe AZ 26

Gegeben sind die Funktionen f durch $f(x) = 2^{x+3}$ und g durch $g(x) = 2^x$.

a) Beschreiben Sie, wie der Graph von f aus dem Graphen der Funktion g hervorgeht.
b) Bestimmen Sie die Stelle, an der die Funktion f den Funktionswert 1 besitzt.

AZ 26	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
a)	Beschreibung	K4		
b)	Bestimmung der Stelle: $x = -3$		K5	

Aufgabe AZ 27

Welche Aussagen zum Scheitelpunkt sind für alle Graphen von quadratischen Funktionen wahr?

(I) Der Scheitelpunkt ist der Extrempunkt.
(II) Der Funktionswert des Scheitelpunkts ist das Minimum.
(III) Der Scheitelpunkt ist der einzige Extrempunkt.
(IV) Man bestimmt den Scheitelpunkt, indem man zunächst die erste Ableitung bildet und null setzt.
(V) An der Scheitelpunktform kann man die Koordinaten des Scheitelpunkts direkt ablesen.
(VI) Die x-Koordinate des Scheitelpunktes ist immer eine Nullstelle der Funktion.

AZ 27	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	(I), (III), (IV), (V)			K1 K6

Aufgabe AZ 28

Gegeben ist die Funktion f_t mit der Gleichung $f_t(x) = 2x^3 + t$.
Beschreiben Sie den Einfluss von t auf den Verlauf des Graphen.

AZ 28	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Verschiebung um t Einheiten in y-Richtung			K6

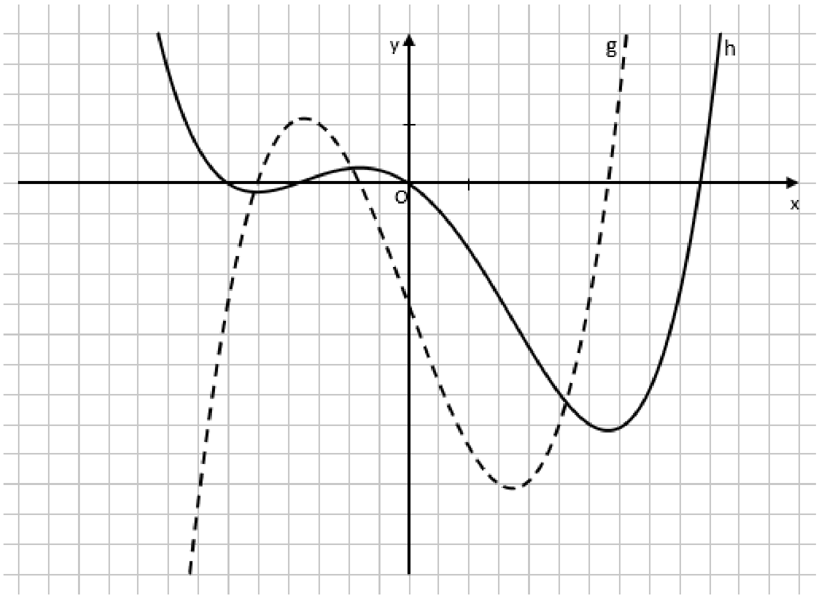
Aufgabe AZ 29

Welcher Fehler wurde gemacht? Korrigieren Sie die Rechnung.
$h(x) = x^2 \cdot (3x - x^3) \quad h'(x) = 2x \cdot (3 - 3x^2)$

AZ 29	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Angabe des Fehlers und Korrektur		K5 K6	

Aufgabe AZ 30

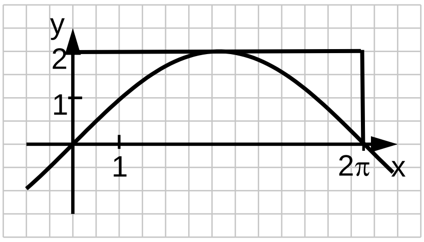
Entscheiden Sie, welche der dargestellten Funktionen g und h die Ableitungsfunktion der anderen sein kann. Geben Sie mindestens zwei Gründe an.



AZ 30	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Entscheidung und Angabe von mindestens zwei Eigenschaften		K4 K6	

Aufgabe AZ 31

Einem Rechteck mit den Seitenlängen 2π cm und 2 cm ist der Graph einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(bx)$, $(a, b, x \in \mathbb{R})$ so einbeschrieben, wie in der Skizze dargestellt. Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f.



AZ 31	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Funktionsgleichung: $f(x) = 2 \cdot \sin(\frac{1}{2}x)$		K4 K5	

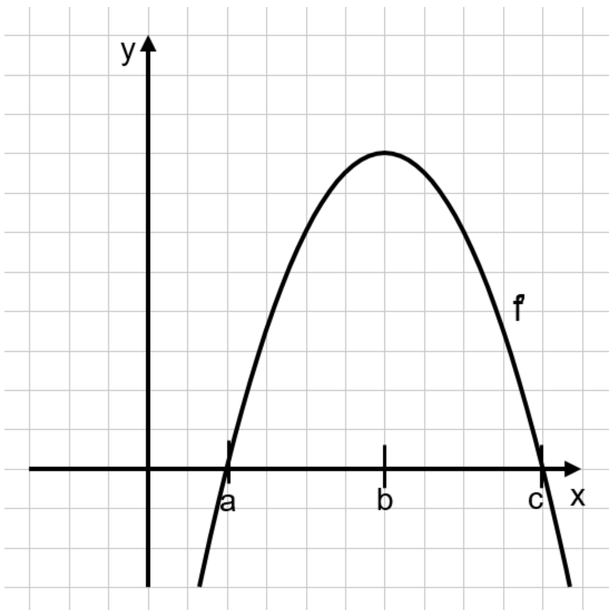
Aufgabe AZ 32

Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f mit folgenden Eigenschaften in einem geeigneten Intervall.
(1) $f(2) = 0$
(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$
(3) Die Funktion f ist an der Stelle $x = 1$ nicht definiert.

AZ 32	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Skizze für Graphen von f		K4 K3	

Aufgabe AZ 33

Gegeben ist der Graph einer Ableitungsfunktion $f'(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$. Beschreiben Sie das Monotonieverhalten der Ausgangsfunktion f(x) und begründen Sie Ihre Aussagen.



AZ 33	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Beschreibung des Monotonieverhaltens mit Begründung, z. B.: • streng monoton fallend für x < a oder x > c, da $f'(x) < 0$ • streng monoton steigend für a < x < c, da $f'(x) > 0$		K1 K4 K6	

Aufgabe AZ 34

Bestimmen Sie die Gleichung der linearen Funktion f und die Gleichung einer quadratischen Funktion g, deren Graphen einander in den Punkten P(1|2) und Q(0|5) schneiden.

AZ 34	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Gleichungen: $f(x) = -3x + 5$; $g(x) = x^2 - 4x + 5$		K2 K5	

Aufgabe AZ 35

Für jede reelle Zahl t ist eine Funktion f durch $f(x) = x^3 - 2tx^2 + t^2x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.
Untersuchen Sie die Anzahl der Nullstellen von f in Abhängigkeit von t.

AZ 35	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	eine Nullstelle für t = 0 zwei Nullstellen für t ≠ 0			K5

Aufgabe AZ 36

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ $(x \in \mathbb{R})$.
Begründen Sie, dass x = 3 die Nullstelle der Umkehrfunktion von f ist.

AZ 36	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Begründung		K1 K5	

3.2.2 Geometrie

Aufgabe GZ 1

Aus einem rechteckigen Blatt Papier (Länge 20 cm, Breite 12 cm) kann auf zwei verschiedene Arten der Mantel eines Zylinders hergestellt werden. Peter behauptet:
„Weil die Flächeninhalte der Mantelflächen gleich sind, sind auch die Volumina der entstehenden Zylinder gleich.“
Hat Peter recht? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
(Hinweis: Die Herstellung des Zylindermantels soll ohne Überlappung erfolgen.)

GZ 1	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Peter hat nicht recht. $V_1 = \pi \cdot \left(\frac{10}{\pi}\mathrm{cm}\right)^2 \cdot 12\mathrm{cm}$ $V_2 = \pi \cdot \left(\frac{6}{\pi}\mathrm{cm}\right)^2 \cdot 20\mathrm{cm}$ $V_1 = \frac{1200}{\pi}\mathrm{cm}^3$ $V_2 = \frac{720}{\pi}\mathrm{cm}^3$ $V_1 \neq V_2$		K1 K2 K5	

Aufgabe GZ 2

Aus einem rechteckigen Blatt Papier (Länge a, Breite b) kann auf zwei verschiedene Arten der Mantel eines Zylinders hergestellt werden. Peter behauptet:
„Weil die Flächeninhalte der Mantelflächen gleich sind, sind auch die Volumina der entstehenden Zylinder gleich.“
Hat Peter recht? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
(Hinweis: Die Herstellung des Zylindermantels soll ohne Überlappung erfolgen.)

GZ 2	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Peter hat nicht recht. $r_1 = \frac{a}{2\pi}$ $r_2 = \frac{b}{2\pi}$ $V_1 = \pi \cdot \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \cdot b$ $V_2 = \pi \cdot \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \cdot a$ $V_1 = \frac{a^2 \cdot b}{4\pi}$ $V_2 = \frac{b^2 \cdot a}{4\pi}$ $V_1 = V_2$ nur für $a = b$, sonst $V_1 \neq V_2$		K1	K2 K5

Aufgabe GZ 3

Gegeben ist ein Kreis mit einem Radius von 5 cm. Eine Sehne dieses Kreises ist 8 cm lang.
Berechnen Sie den Abstand des Kreismittelpunktes von dieser Sehne.

GZ 3	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Ansatz über Satz des Pythagoras d = 3 cm		K2 K5	

Aufgabe GZ 4

Die Punkte $A(1|2|0)$, $B(1|1|0)$ und $C(5|1|0)$ sind Eckpunkte der rechteckigen Grundfläche einer geraden Pyramide. Der Punkt S ist die Spitze der Pyramide. Die Höhe h beträgt 7 LE.

a) Ermitteln Sie den Punkt D der Grundfläche.

b) Geben Sie die Punkte an, die Spitze dieser Pyramide sein könnten.
$S_1(2|-0{,}5|1)$, $S_2(3|1{,}5|-7)$, $S_3(-0{,}5|2{,}5|7)$, $S_4(3|1{,}5|7)$

c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

GZ 4	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
18.a)	$D(5\|2\|0)$	K2 K5		
18.b)	S_2, S_4	K2 K5		
18.c)	$V = \frac{28}{3}\,\mathrm{VE}$		K5	

Aufgabe GZ 5

Geben Sie jeweils die Koordinaten eines Punktes in einem Koordinatensystem mit folgender Eigenschaft an:

a) Der Punkt liegt in der yz-Ebene.

b) Der Punkt liegt auf der z-Achse.

c) Der Punkt hat von der xz-Ebene den Abstand 2 LE.

GZ 5	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
a), b), c)	jeweils einen Punkt angeben	K2 K5		

Aufgabe GZ 6

Entscheiden Sie, ob folgende Aussage wahr ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
Jedes Parallelogramm ist ein Drachenviereck.

GZ 6	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	falsche Aussage Nur wenn die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, trifft es zu. Zeichnung möglich		K1 K6	

Aufgabe GZ 7

Beurteilen Sie, ob folgende Aussage wahr ist.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.
Ein Rhombus (Raute) besitzt zwei stets gleich lange Diagonalen.

GZ 7	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	falsche Aussage, gilt nur für Spezialfall Quadrat Zeichnung möglich		K1 K6	

Aufgabe GZ 8

Für eine Ausstellungsvitrine soll aus 10 m langem Draht ein Kantenmodell eines Quaders mit quadratischer Grundfläche gefertigt werden. Die Höhe des Körpers sei dreimal so groß wie eine Grundkante. Berechnen Sie die Längen der Kanten des Quaders.

GZ 8	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	a … Länge einer der quadratischen Grundkanten c … Länge der Höhe Ansatz: $8a + 4c = 10m$, $c = 3a$ Ergebnis: $a = 0{,}5m$; $a = 0{,}5m$ Die Grundkanten sind jeweils 0,5 m lang und die Höhe beträgt 1,5 m.		K3 K2	

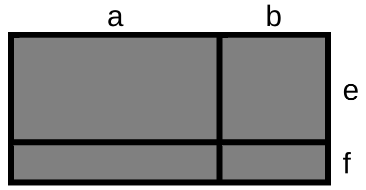
Aufgabe GZ 9

Gegeben ist ein Kreis. Sein Flächeninhalt wird verhundertfacht.
Erläutern Sie die Veränderung des zugehörigen Umfangs.

C 26	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Erläuterung, dass $u_1 = 10 \cdot u_0$	K6	K2	

Aufgabe GZ 10

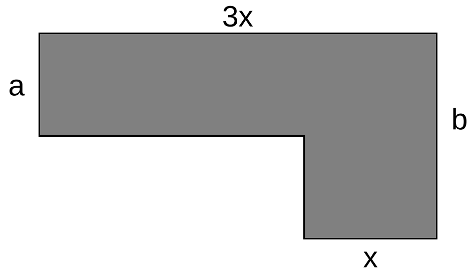
Geben Sie zur Berechnung des Flächeninhalts der Figur zwei unterschiedliche Terme an und weisen Sie deren Gleichwertigkeit nach.



GZ10	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	z. B.: $(a+b)(e+f)$ und $a \cdot e + b \cdot e + a \cdot f + b \cdot f$ Nachweis, dass $(a+b)(e+f) = a \cdot e + b \cdot e + a \cdot f + b \cdot f$ ist.	K4	K2 K5	

Aufgabe GZ 11

Geben Sie die Terme an, mit denen man den Flächeninhalt der Figur berechnen kann.



$A = 3ax + (b-a)x$ $\quad$ $A = 3bx - 2x(b-a)$

$A = 3x(2a-b)$ $\quad$ $A = x(2a+b)$

GZ11	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	I, II, IV		K5	

Aufgabe GZ 12

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ c \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -c-4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie c so, dass die Vektoren zueinander orthogonal sind.

GZ12	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	c = – 16		K4	

Aufgabe GZ 13

Gegeben ist der Punkt $A(2|-3|5)$. Der Punkt A_1 ist der Bildpunkt von A bei der Spiegelung an der xz-Ebene.
a) Beschreiben Sie die besondere Lage der Geraden, die durch die Punkte A und A_1 verläuft.
b) Geben Sie den Schnittpunkt der Geraden mit der xz-Ebene an.

GZ13	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
a)	Beschreibung, z. B.: Gerade ist parallel zur y-Achse		K6	
b)	$S(2\|0\|5)$		K2	

Aufgabe GZ 14

Untersuchen Sie die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ auf lineare Abhängigkeit.
Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.
$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}$

GZ14	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	z. B.: $2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}$ und Interpretation		K2 K4	

Aufgabe GZ 15

Gegeben sind die Geraden g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix}-6\\6\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} (s\in\mathbb{R})$

und h mit $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix} (t\in\mathbb{R})$.

Entscheiden Sie, welche Aussage zutrifft.

- I Die Geraden verlaufen parallel.
- II Die Geraden schneiden sich senkrecht.
- III Die Geraden schneiden sich nicht senkrecht.
- IV Die Geraden verlaufen windschief.
- V Die Geraden sind identisch.

GZ15	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	III ist richtig	K2		

Aufgabe GZ 16

Zeigen Sie, dass die Punkte $H(2|1|-2)$, $S(3|2|-1)$ und $V(0|-1|6)$ ein Dreieck bilden. Untersuchen Sie, ob das Dreieck rechtwinklig ist.

GZ16	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	z.B. Punktprobe Dreieck nicht rechtwinklig		K5	

Aufgabe GZ 17

Die Punkte $A(0|0|0)$, $B(4|5|0)$, $C(0|6|0)$, D und $S(2|3|6)$ sind Eckpunkte einer vierseitigen Pyramide.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck ABCD in dieser Reihenfolge ein Parallelogramm ergibt.
b) Überprüfen Sie, ob dieses Parallelogramm ein Rhombus ist.
c) Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem.

GZ17	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
a)	$D(-4|1|0)$	K2		
b)	Überprüfung mit der Entscheidung: kein Rhombus		K1 K5	
c)	Zeichnung	K4		

Aufgabe GZ 18

Gegeben sind die Punkte $A(7|3)$ und $B(-3|8)$.
Der Punkt T teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis $1:3$.
a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte A und B verläuft.
b) Geben Sie die Schnittpunkte der Geraden mit den Koordinatenachsen an.
c) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes T.

GZ18	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
a)	$y=-0{,}5x+6{,}5$		K5 K4	
b)	$S_x(13|0)$, $S_y(0|6{,}5)$	K5 K4		
c)	$T(4{,}5|4{,}25)$		K5 K4	

Aufgabe GZ 19

Die Punkte $A(5|2|1)$, $B(4|1|3)$, $C(2|0|2)$ und $D(9|5|-2)$ sind die Eckpunkte eines ebenen Vierecks ABCD.
Geben Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes an.

GZ19	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Angabe der Koordinaten des Punktes: $M(6{,}5\mid 3\mid \frac{1}{2})$		K5	

Aufgabe GZ 20

Gegeben sind die Punkte $A(1|5|-2)$, $B(3|-5|4)$ und $C(7|-25|a)$.
Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g.
Bestimmen Sie den Parameter a so, dass der Punkt C auf g liegt.

GZ20	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Für $t = 3$ ist $a = 16$		K2 K5	

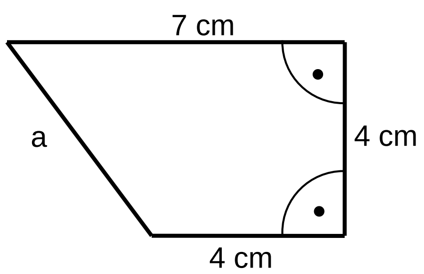
Aufgabe GZ 21

Gegeben sind die Punkte $A(0|3|0)$, $B(0|0|3)$ und $C(0|3|3)$.
Bestimmen Sie den Abstand des Punktes C von der Geraden g(AB).

GZ21	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	$a = \frac{3}{2}\sqrt{2}$		K2 K5	

Aufgabe GZ 22

Bestimmen Sie die Länge der Seite a.

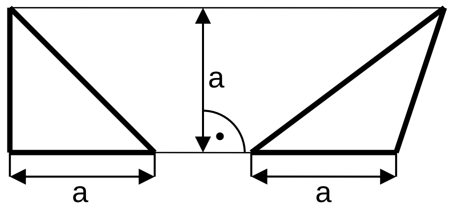


Skizze nicht maßstäblich

GZ22	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Bestimmen: $a = 5\text{cm}$		K2 K5	

Aufgabe GZ 23

Peter behauptet:
(1) Die Dreiecke sind flächengleich.
(2) Die Dreiecke sind kongruent.



Entscheiden Sie, ob diese Behauptungen wahr sind.
Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

GZ23	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Entscheiden und begründen: (1) flächengleich, weil die Grundseiten gleich sind und die Höhen gleich sind (2) nicht kongruent, weil die Innenwinkel eine unterschiedliche Größe haben		K1 K4	

Aufgabe GZ 24

Für jeden Richtungsvektor $\vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ ist eine Gerade gegeben durch

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \vec{b}$; $r \in \mathbb{R}$

a) Geben Sie einen Vektor $\vec{b}$ so an, dass die Gerade g parallel zur x-Achse liegt.

b) Geben Sie einen Vektor $\vec{b}$ so an, dass die Gerade g parallel zur y-z-Ebene ist.

GZ24	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
a)	Angabe eines Richtungsvektors		K2	
b)	Angabe eines Richtungsvektors		K2	

3.2.3 Stochastik

Aufgabe SZ 1

Der Erwartungswert der Zufallsgröße X mit folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung beträgt 1,2.

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,2	p	0,3	q

Die Wahrscheinlichkeiten p und q sind gesucht. Geben Sie einen Lösungsansatz an.

SZ 1	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	I $p + q = 0{,}5$ II $p + 3q = 0{,}6$		K2 K5	

Aufgabe SZ 2

Ein Sportschütze trifft erfahrungsgemäß mit einem Schuss das Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %.
Er feuert fünf Schüsse unter jeweils gleichen Bedingungen auf ein Ziel ab.

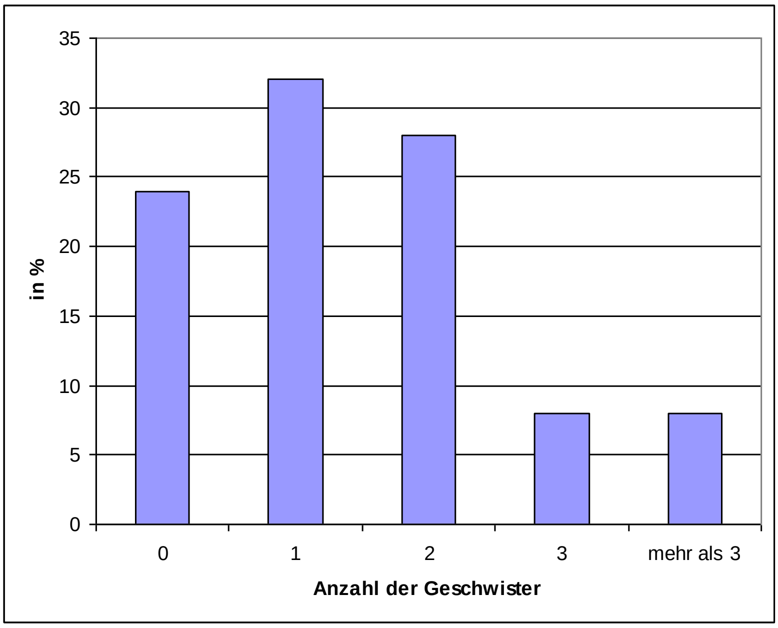
a) Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang den Term $1 - \binom{5}{0} \cdot 0,9^0 \cdot 0,1^5$.

b) Geben Sie die Werte an, die dem Term von Aufgabe a) nicht entsprechen können. Begründen Sie.
1) p = 1,00235 2) p = -0,00368 3) p = 0,99999 4) p = 0,00001

SZ 2	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
a)	mit dem Term wird die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Treffer berechnet (Binomialverteilung mit der Kettenlänge n = 5, Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,9; Wahrscheinlichkeit für Fehlschuss q = 0,1)	K3 K4		K6
b)	(1) und (2) wegen $0 \leq P \leq 1$ (4) ist Wahrscheinlichkeit für „kein Treffer“	K1		

Aufgabe SZ 3

Konrad hat zur Veranschaulichung der Anzahl der Geschwister seiner Mitschüler folgendes Diagramm erstellt.



Bewerten Sie anhand des Diagramms folgende Aussagen.

a) Mindestens $\frac{1}{5}$ der Mitschüler sind Einzelkinder.
b) Mehr als die Hälfte der Mitschüler haben mindestens zwei Geschwister.
c) Die Anzahl der Kinder mit vier Geschwistern ist genauso groß wie die mit drei Geschwistern.
d) Es gibt viermal so viel Schüler mit einem Geschwisterkind wie mit drei Geschwistern.
e) Höchstens 70 % der Schüler haben Geschwister.
f) Mehr als 30 % haben ein Haustier.

SZ 3	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereich		
		AB I	AB II	AB III
	jeweils Stellungnahme mit Begründung richtig: a) d) falsch: b), c), e) keine Aussage über Wahrheitsgehalt möglich: f)		K1 K4 K6	

Aufgabe SZ 4

Ein idealer Würfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 wird zweimal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der gewürfelten Augenzahl mindestens 10 beträgt.

SZ 4	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	$p = \frac{6}{36}$	K3 K5		

Aufgabe SZ 5

In einem Geschäft werden gefüllte Glückswürfel verkauft. In jedem fünften Glückswürfel befindet sich eine Tierfigur. Julia kauft zwei dieser Würfel.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Julia mindestens eine Tierfigur erhält.

SZ 5	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	$\mathrm{P(A)} = 1 - 0,8^2 = 0{,}36$		K3 K5	

Aufgabe SZ 6

Bei der Herstellung von Kaffeebechern werden erfahrungsgemäß 70 % fehlerfrei glasiert. Man entnimmt der laufenden Produktion rein zufällig 10 Kaffeebecher.
a) Geben Sie einen Term für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A an.
A:= „Von den entnommenen Bechern ist nur der 7. defekt."
b) Beschreiben Sie verbal ein Ereignis B, dessen Wahrscheinlichkeit durch
$P(B) = \binom{10}{0} 0,7^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,7^9 \cdot 0,3^1 + \binom{10}{2} \cdot 0,7^8 \cdot 0,3^2$ berechnet wird.

SZ 6	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
a)	$\mathrm{P(A)} = 0,3^1 \cdot 0,7^9$		K3 K5	
b)	B:= „Von den 10 entnommenen Bechern sind höchstens 2 defekt."		K6	

Aufgabe SZ 7

Ein idealer Würfel mit den Augenzahlen 1 bis 6 wird genau zweimal geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Produkt der Augenzahlen größer als 16 ist.

SZ 7	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	Bestimmen: $\mathrm{p} = \frac{5}{18}$		K3 K5	

Aufgabe SZ 8

In einer Urne liegen 7 weiße und 2 schwarze Kugeln. Es wird nacheinander ohne Zurücklegen je eine Kugel zufällig gezogen.
Ermitteln Sie, wie oft man mindestens ziehen muss, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % mindestens eine der gezogenen Kugeln schwarz ist.

SZ 8	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	mindestens dreimal		K3 K5	

Aufgabe SZ 9

Ein Würfel wird dreimal geworfen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass insgesamt mindestens zwei Sechsen gewürfelt werden.

SZ 9	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	$\frac{1}{6^3}+3\cdot\frac{5}{6^3}=\frac{16}{6^3}$		K3 K5	

Aufgabe SZ 10

In einer Lostrommel befinden sich noch genau 10 Lose, darunter sind nur zwei Gewinnlose. Karla zieht genau 3 Lose.
Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit sie dabei nur Nieten zieht.

SZ 10	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
	$\mathrm{P}(3\ \mathrm{Nieten})=\frac{7}{15}$		K3 K5	

Aufgabe SZ 11

Eine Urne enthält genau zehn Kugeln, drei weiße und sieben rote. Es wird zweimal je eine Kugel gezogen.
Nach dem ersten Zug werden der Urne zwei Kugeln der zuvor gezogenen Farbe hinzugefügt.
a) Zeichnen Sie ein zugehöriges Baumdiagramm.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, von jeder Farbe genau eine Kugel zu ziehen.

SZ 11	Lösung	Kompetenzen/ Anforderungsbereiche		
		AB I	AB II	AB III
a)	Zeichnen: Baumdiagramm		K3 K4	
b)	Berechnen: $\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{11}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{11}=\frac{42}{110}=\frac{21}{55}$		K3 K5	