Schleswig-Holsteinische Ergänzung der Musteraufgaben für den hilfsmittelfreien Teil der schriftlichen Abiturprüfung

Musteraufgaben für Aufgabenpool 1

Analysis

Analysis Nr. 1

Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-x}$ und eine ihrer Stammfunktionen F mit $F(x) = -e^{-x} \cdot (x+1)$.

1.1 Leiten Sie die Gleichung von F mithilfe der Integralrechnung her.

(3 BE)

1.2 Untersuchen Sie, ob der Graph von F für $-1 < x < 1$ einen lokalen Hoch- oder Tiefpunkt besitzt.

(2 BE)

	Vorgaben für die Bewertung
1.1	Eine Stammfunktion von f erhält man mithilfe der partiellen Integration nach der Formel $\int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx$. Man wählt $v(x) = x$ sowie $u'(x) = e^{-x}$ und erhält $v'(x) = 1$ und $u(x) = -e^{-x}$. Dies ergibt $$\int (x \cdot e^{-x})dx = x \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x}dx = -e^{-x} \cdot (x+1) + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R},$$ also ist F mit $F(x) = -e^{-x} \cdot (x+1)$ eine Stammfunktion von f. 3 BE
1.2	Der Graph von F hat an den Stellen Punkte mit waagerechter Tangente, an denen die Ableitung $F' = f$ Nullstellen hat. Dies ist nur für $x = 0$ der Fall. Da e^{-x} für alle $x < 0$ positiv und x negativ ist, ist $f(x)$ in diesem Bereich negativ. Da e^{-x} und x für alle $x > 0$ positiv sind, ist $f(x)$ in diesem Bereich positiv. Damit hat die Ableitung von F an der Stelle 0 einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$. Hieraus folgt, dass der Graph von F an der Stelle 0 einen Tiefpunkt hat. 2 BE

Analysis Nr. 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x+2)^2 \cdot e^{-x}$ und ihre Ableitung f' mit $f'(x) = -(x^2 + 2x) \cdot e^{-x}$.

2.1 Berechnen Sie $f''(x)$.

(2 BE)

2.2 In den Abbildungen sind vier verschiedene Funktionsgraphen dargestellt, einer von ihnen gehört zur Funktion f. Geben Sie den entsprechenden Graphen an und begründen Sie Ihre Entscheidung.

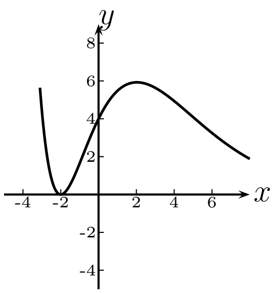


Abb. 1

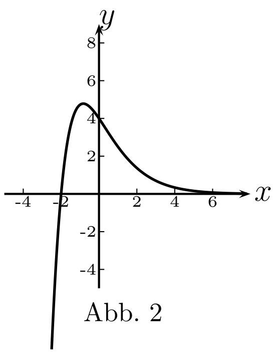


Abb. 2

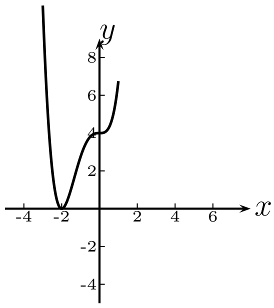


Abb. 3

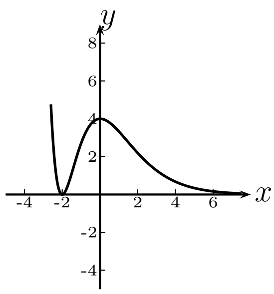


Abb. 4

(3 BE)

	Vorgaben für die Bewertung
2.1	Es ist $f''(x) = -[(2x+2) \cdot e^{-x} + (x^2 + 2x) \cdot e^{-x} \cdot (-1)] = (x^2 - 2) \cdot e^{-x}$ 2 BE
2.2	Der in Abbildung 4 dargestellte Graph gehört zu der Funktion f. Begündung nach dem Ausschlussprinzip; u.a. sind folgende Argumente möglich: Der Graph in Abb. 1 erfüllt die folgenden Eigenschaften von f nicht: $f'(0) = 0$. Der Graph in Abb. 2 erfüllt die folgenden Eigenschaften von f nicht: $f'(0) = 0$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Graph in Abb. 3 erfüllt die folgenden Eigenschaften von f nicht: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$. 3 BE

Analysis Nr. 3

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = x \cdot e^{x+a}$. Dabei sei a eine positive reelle Zahl.

3.1 Leiten Sie die Gleichung derjenigen Funktion der Schar her, deren Graph durch den Punkt $(-2 \mid -2)$ verläuft.

(2 BE)

3.2 Weisen Sie nach, dass jede Funktion der Schar einen Graphen mit einem Tiefunkt hat.

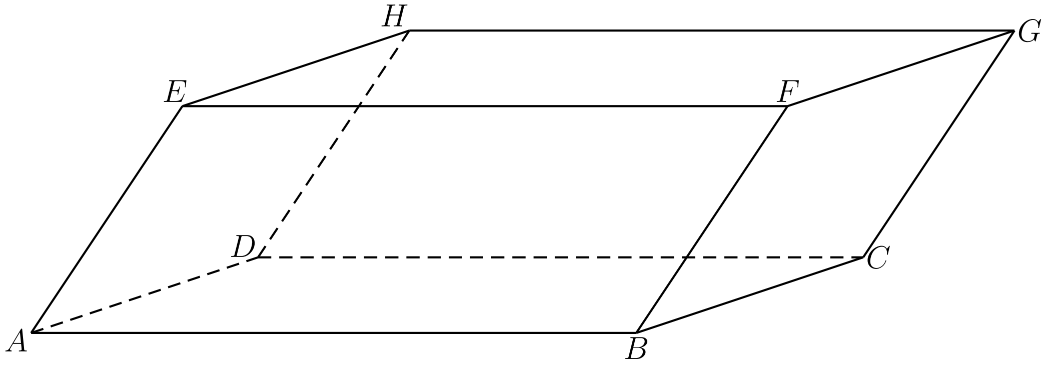
(3 BE)

	Vorgaben für die Bewertung
3.1	$f_a(-2) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \cdot e^{-2+a} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2+a} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$ Die Funktion hat die Gleichung $f_2(x) = x \cdot e^{x+2}$. 2 BE
3.2	Es ist $f_a'(x) = e^{x+a} + x \cdot e^{x+a} = (1+x) \cdot e^{x+a}$. Es gilt $f_a'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$. Es ist $f_a''(x) = e^{x+a} + (1+x) \cdot e^{x+a} = (2+x) \cdot e^{x+a}$ und $f_a''(-1) = e^{-1+a} > 0$. Wegen $f_a'(-1) = 0$ und $f_a''(-1) > 0$ ist eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Tiefpunktes an der Stelle -1 erfüllt. Also hat jeder Graph der Funktionenschar f_a einen Tiefpunkt. 3 BE

Analytische Geometrie

Analytische Geometrie Nr. 1

Von einem Spat ABCDEFGH (siehe Skizze) sind die Eckpunkte $A(2 \mid 4 \mid 0)$, $B(4 \mid 6 \mid 0)$, $C(-2 | \, 8 \mid 0)$ und $E(3 \mid 5 \mid 2)$ gegeben.



1.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte D und G.

(2 BE)

1.2 Berechnen Sie das Volumen des Spates.

(3 BE)

	Vorgaben für die Bewertung
1.1	Es gilt $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, also folgt $D(-4 \| \, 6 \mid 0)$. Es gilt $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$, also folgt $G(-1 \| \, 9 \mid 2)$. 2 BE
1.2	Für das Volumen des Spates gilt $V = \left\| \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right) \circ \overrightarrow{AE} \right\| = \left\| \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 32.$ 3 BE

Analytische Geometrie Nr. 2

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$.

2.1 Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ein Rechteck aufspannen. Geben Sie dessen Flächeninhalt an.

(4 BE)

2.2 Geben Sie die Bedeutung von Betrag und Richtung des Vektors $\vec{c} = \vec{u} \times \vec{v}$ in Bezug auf das Rechteck an.

(1 BE)

	Vorgaben für die Bewertung
2.1	Damit die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ein Rechteck aufspannen, müssen sie orthogonal zueinander sein. Das ist der Fall, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Nachweis: $\vec{u} \circ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 4 - 8 + 4 = 0.$ Der Flächeninhalt des Rechtecks ist das Produkt der Beträge der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$: $\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$ $\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$ $A = \lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert = 3 \cdot 6 = 18.$ *Alternativ kann man den Betrag des Kreuzprodukts auswerten.* $\lvert\vec{u} \times \vec{v}\rvert = \sqrt{(-12)^2 + 6^2 + 12^2} = \sqrt{144+36+144} = \sqrt{324} = 18.$ 4 BE
2.2	Der Vektor $\vec{c} = \vec{u} \times \vec{v}$ ist orthogonal zu der von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Ebene, sein Betrag gibt den Flächeninhalt des von beiden Vektoren aufgespannten Rechtecks an. 1 BE

Analytische Geometrie Nr. 3

Gegeben sind eine Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(2\,|\,2\,|\,3)$ und dem Radius $r = 5$ LE und der Punkt $A(5\,|\,2\,|-1)$ auf der Kugeloberfläche.

3.1 Ermitteln Sie eine Koordinatenform der Tangentialebene T, die die Kugel K im Punkt A berührt.

(2 BE)

3.2 Bestimmen Sie die zweite, zu T parallele Tangentialebene T' an K.

(3 BE)

	Vorgaben für die Bewertung
3.1	Da der Vektor $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ orthogonal zur Tangentialebene steht, ist er ein Normalenvektor der Ebene T. Da A in dieser Ebene liegt, gilt $T: 3x_1 - 4x_3 = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) = 19.$ 2 BE
3.2	Sei B der zweite Punkt, den die Gerade durch die Punkte A und M mit der Kugeloberfläche gemeinsam hat. Dann gilt $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$ Damit hat der Punkt B die Koordinaten $B(-1\|\,2\,\|\,7)$. Da B in der zur T parallelen Ebene liegen soll, gilt für diese $T': 3x_1 - 4x_3 = 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + (-4) \cdot 7 = -31.$ 3 BE

Stochastik

Stochastik Nr. 1

Gegeben ist ein Glücksrad, das in 5 deckungsgleiche Kreissektoren unterteilt ist.
Von diesen sind zwei rot, zwei gelb und einer blau eingefärbt.

1.1 Geben Sie ein Zufallsexperiment und ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit dem Term $\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2$ berechnen lässt. Erläutern Sie die Bedeutung des Faktors $\binom{5}{3}$ in diesem Term.

(3 BE)

1.2 Zeigen Sie, dass der Term $\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2$ den Wert $\frac{128}{625}$ hat.

(2 BE)

	Vorgaben für die Bewertung
1.1	Mit dem gegebenen Term berechnet man zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit, dass beim fünfmaligen Drehen des Glücksrads (fünf Versuche) dieses genau dreimal auf einem roten oder gelben Sektor (bzw. genau zweimal auf dem blauen Sektor) stehenbleibt. Der Faktor $\binom{5}{3}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, drei solcher „Erfolge“ auf 5 Versuche zu verteilen. 3 BE
1.2	Möglich ist z.B. die folgende Lösung: $\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{4^3}{5^5} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4^3}{5^5} = \frac{2 \cdot 4^3}{5^4} = \frac{128}{625}$ 2 BE

Stochastik Nr. 2

2.1 Beschreiben Sie ein Zufallsexperiment und ein dazugehöriges Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $\frac{\binom{1}{1}\binom{100-1}{4-1}}{\binom{100}{4}}$ angegeben wird.

(3 BE)

2.2 Berechnen Sie den Wert des Terms.

(2 BE)

	Vorgaben für die Bewertung
2.1	Möglich ist z. B.: Von 100 Tomaten in einer Kiste ist eine Tomate verdorben. Der Kiste werden vier Tomaten zufällig und ohne Zurücklegen entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die verdorbene Tomate in der Stichprobe? 3 BE
2.2	$\frac{\binom{1}{1}\binom{100-1}{4-1}}{\binom{100}{4}} = \frac{\binom{99}{3}}{\binom{100}{4}} = \frac{99! \cdot 4! \cdot 96!}{3! \cdot 96! \cdot 100!} = \frac{4}{100} = 0{,}04.$ 2 BE

Stochastik Nr. 3

3.1 Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 72$ und $p = \frac{1}{3}$.
Geben Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X an.

(2 BE)

3.2 Eine Zufallsgröße Y hat die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Wert k	0	1	29
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße Y.

(1 BE)

3.3 Eine Zufallsgröße Z hat die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Wert k	0	1	13
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Geben Sie einen Term für die Varianz an, ohne den Zahlenwert zu bestimmen.
Entscheiden Sie ohne Rechnung, ob die Varianz der Zufallsgröße Y kleiner oder größer ist als die Varianz der Zufallsgröße Z.

(2 BE)

	Vorgaben für die Bewertung
3.1	$E(X) = n \cdot p = 72 \cdot \frac{1}{3} = 24$ $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 72 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 16 \quad , \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 4$ 2 BE
3.2	$E(Y) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 29 = \frac{4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 29}{8} = \frac{32}{8} = 4$ 1 BE
3.3	$V(Z) = \frac{1}{2} \cdot (0-2)^2 + \frac{3}{8} \cdot (1-2)^2 + \frac{1}{8} \cdot (13-2)^2$ Die Zufallsgröße Z hat die kleinere Varianz. Die Wahrscheinlichkeiten für die drei Einzelwerte der Verteilungen stimmen überein. Die drei Werte 0; 1 und 13 liegen enger beieinander als die drei Werte 0; 1; und 29. 2 BE

Musteraufgaben für Aufgabenpool 2

Analysis

Analysis Nr. 4

Durch die Gleichung $f_a(x) = (x^2 - a^2) \cdot e^{ax}$ wird für jede positive reelle Zahl a eine Funktion f_a definiert.

4.1 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f_a.

(1 BE)

4.2 Zeigen Sie, dass die positive Nullstelle von f_a niemals eine Extremstelle dieser Funktion sein kann.

(4 BE)

	Vorgaben für die Bewertung
4.1	$f_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a^2$ Die Funktion f_a hat die Nullstellen a und $-a$. 1 BE
4.2	$f_a'(x) = (ax^2 + 2x - a^3) \cdot e^{ax}$ Notwendig für ein Extremum an der Stelle a ist $f_a'(a) = 0$. Wegen $f_a'(a) = (a^3 + 2a - a^3) \cdot e^{a^2} = 2a \cdot e^{a^2} > 0$ für alle $a > 0$ ist für kein $a > 0$ die notwendige Bedingung für eine Extremstelle an der Nullstelle a erfüllt. 4 BE

Analytische Geometrie

Analytische Geometrie Nr. 4

Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$ durch $A(4\,|\,7\,|\,3)$, $B(4\,|\,10\,|\,3)$ und $D(4\,|\,8\,|\,6)$.

4.1 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$.

(2 BE)

4.2 Sei g die Gerade durch die Punkte A und B. Begründen Sie, dass für den Abstand d des Punktes D von der Geraden g

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|}{|\overrightarrow{AB}|} \quad \text{gilt.}$$

(3 BE)

	Vorgaben für die Bewertung
4.1	Für den Flächeninhalt des Parallelogramms gilt $\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}9\\0\\0\end{pmatrix}\right\| = 9.$ 2 BE
4.2	Von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ wird ein Parallelogramm aufgespannt. Der Flächeninhalt dieses Parallelogramms berechnet sich elementargeometrisch mit $\|\overrightarrow{AB}\| \cdot h_{\overline{AB}}$ (wobei $h_{\overline{AB}}$ die Höhe des Parallelogramms zur Seite $\overline{AB}$ ist) oder wie im Aufgabenteil 4.1 durch den Betrag des Vektorproduktes, also mit $\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right\|$. Da die Höhe des Parallelogramms zur Seite $\overline{AB}$ dem Abstand d des Punktes D von der Geraden durch A und B entspricht, ergibt sich dann $\|\overrightarrow{AB}\| \cdot d = \left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right\|$ $d = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$ 3 BE

Analytische Geometrie Nr. 5

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{cccccc} a & -b & +c & = & 4 \\ 2a & -b & -3c & = & 7 \\ a & +b & -9c & = & 2 \end{array}\right|$$

5.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

(3 BE)

5.2 Verändern Sie das System so, dass die Lösungsmenge leer wird.

(2 BE)

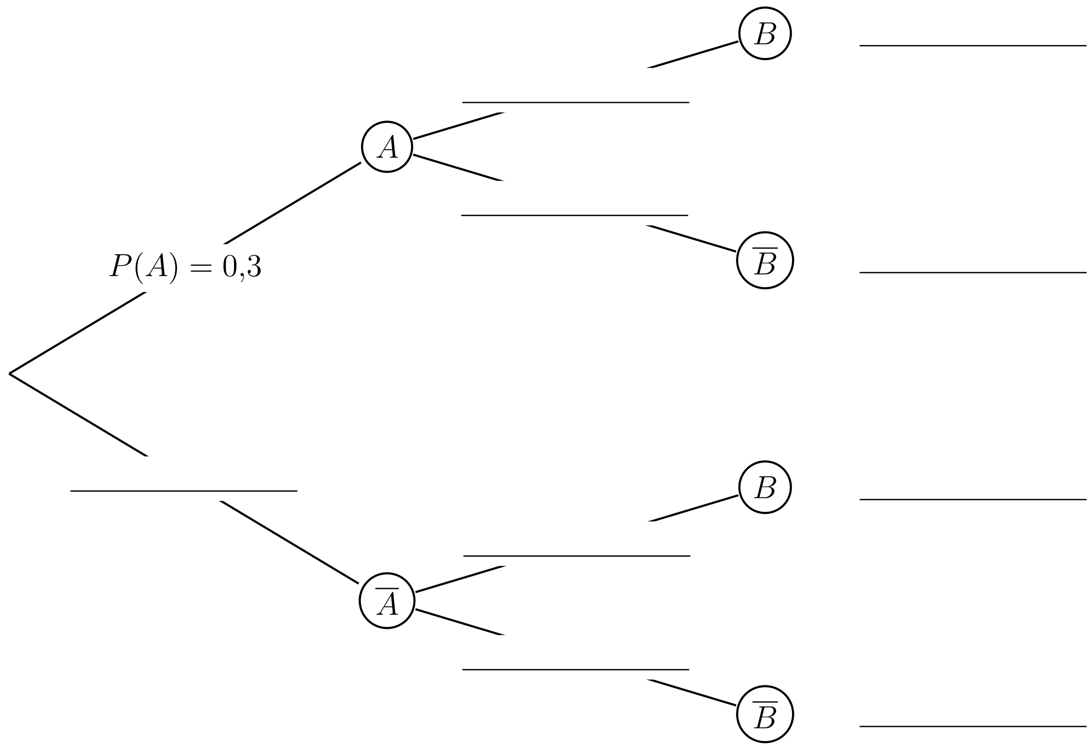
	Vorgaben für die Bewertung
5.1	$$\left|\begin{array}{cccccc} I & a & -b & +c & = & 4 \\ II & 2a & -b & -3c & = & 7 \\ III & a & +b & -9c & = & 2 \end{array}\right|$$ $$\left|\begin{array}{ccccccc} I & a & -b & +c & = & 4 & \\ IV & & -b & +5c & = & 1 & (2\cdot I - II) \\ V & & -2b & +10c & = & 2 & (I - III) \end{array}\right|$$ $$\left|\begin{array}{ccccccc} I & a & -b & +c & = & 4 & \\ IV & & -b & +5c & = & 1 & \\ VI & & & 0 & = & 0 & (IV - \frac{1}{2}\cdot V) \end{array}\right|$$ Daraus folgt $$\begin{array}{ccc} b & = & -1+5c \\ a & = & 3+4c \end{array}$$ Die Lösungsmenge ist $\{(3+4c\,;\,-1+5c\,;\,c)\mid c\in\mathbb{R}\}$. 3 BE
5.2	Mögliche Lösung: Werden in Gleichung I die 4 z. B. durch die 5 ersetzt und ansonsten alle Koeffizienten unverändert beibehalten, so gibt es keine gemeinsamen Lösungen mehr für die Gleichungen IV und V, also auch nicht für das gesamte System. 2 BE

Stochastik

Stochastik Nr. 4

Gegeben sind ein Zufallsexperiment und die Ereignisse A und B mit $P(A) = 0{,}3$, $P_A(B) = 0{,}6$ und $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}1$.

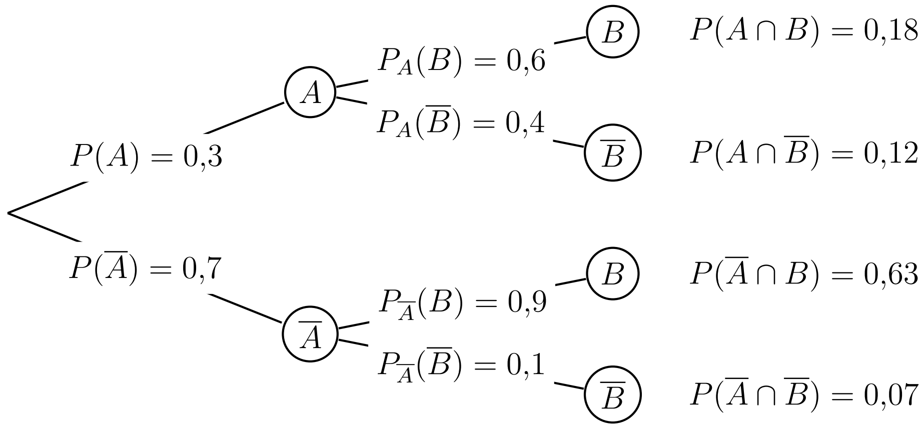
4.1 Vervollständigen Sie das folgende Baumdiagramm, indem Sie auf die dafür vorgesehenen Linien sowohl die Schreibweise für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten als auch deren Werte eintragen.



(3 BE)

4.2 Es sei weiterhin $P(A) = 0{,}3$ und $P_A(B) = 0{,}6$.
Bestimmen Sie nun $P_{\overline{A}}(\overline{B})$ so, dass die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.

(2 BE)

<table>
<tr><td></td><td>Vorgaben für die Bewertung</td></tr>
<tr><td>4.1</td><td>

3 BE</td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>Damit die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind, muss gelten:
$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - P_A(B) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
2 BE</td></tr>
</table>