Aufgabe 1: Analysis

Für jedes $a \in R$, $a > 0$, ist eine Funktion f_a gegeben durch $y = f_a(x) = ax + 1 - e^x$, $x \in R$.
Die Graphen der Funktionen f_a seien G_a.

a) Untersuchen Sie die Graphen G_a auf lokale Extrempunkte sowie auf Wendepunkte und geben Sie die Koordinaten dieser Punkte sowie die Art der lokalen Extrempunkte an.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ortskurve der lokalen Extrempunkte der Graphen G_a.

Weisen Sie nach, dass die Geraden mit der Gleichung $y = ax + 1$ Asymptoten der Graphen G_a nur für $x \to -\infty$ sind.

b) Mit $a = e$ ist die Funktion f_e eine der Funktionen f_a.
Zeigen Sie, dass $x_1 = 0$ Nullstelle der Funktion f_e ist und begründen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion f_e im Intervall $[1; 2]$ eine weitere Nullstelle x_2 hat.

Berechnen Sie diese Nullstelle x_2 mithilfe des NEWTON-Verfahrens auf Hundertstel genau.

Begründen Sie, dass die Funktion f_e außer x_1 und x_2 keine weiteren Nullstellen besitzt.

Zeichnen Sie den Graphen G_e im Intervall $[-2; 2{,}5]$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

c) Der Graph G_e und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung die Maßzahl des Inhaltes dieser Fläche.

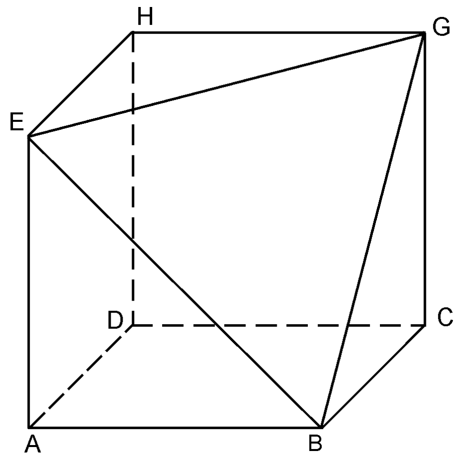
d) Erklären Sie durch Betrachtung geometrischer Körper, dass
$\pi \int_{x_1}^{1} [f_e(x)]^2 dx > \frac{1}{3}\pi \cdot [f_e(1)]^2 \cdot (1 - x_1)$ gilt, wobei x_1 die im Aufgabenteil b) gegebene Nullstelle ist.

Aufgabe 2: Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sei ein Körper K mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, G und H gegeben, der im nebenstehenden Schrägbild dargestellt ist.

Der Körper K lässt sich auffassen als Restkörper eines Würfels, von dem eine dreiseitige Pyramide abgeschnitten wurde.

Bekannt seien die Punkte B, D, E und G mit B(4 | 4 | 0), D(0 | 0 | 0), E(4 | 0 | 4) und G(0 | 4 | 4).



a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte A und H an.

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung derjenigen Ebene ε, in der die Punkte B, E und G liegen und berechnen Sie das Gradmaß des Winkels, unter dem die Ebene ε die xy-Ebene des Koordinatensystems schneidet.

b) Die vom Würfel abgeschnittene Pyramide habe die Eckpunkte E, B, G und F mit F(4 | 4 | 4).
Der Punkt T sei der Fußpunkt des Lotes vom Punkt F in die Ebene ε.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T sowie die Maßzahl des Volumens des Körpers K.

In einem Zweitafelbild des Körpers K liege der Aufriss in der yz-Ebene. In diesem Aufriss werden die Kanten $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ und $\overline{EH}$ nicht in wahrer Länge dargestellt.
Geben Sie alle weiteren Kanten an, die in diesem Aufriss nicht in wahrer Länge dargestellt werden und begründen Sie.

c) Dem Körper K soll eine Kugel so einbeschrieben werden, dass diese die drei Koordinatenebenen sowie die Ebene ε berührt.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes dieser Kugel.

Aufgabe 3: Stochastik

Ziehen mit und ohne Zurücklegen

a) In einer Urne befinden sich 4 schwarze und 36 weiße Kugeln. Es werden nacheinander n Kugeln mit Zurücklegen gezogen und es wird jeweils registriert, ob die Kugel schwarz oder weiß ist.
Jede der Zufallsgrößen X_n beschreibt die Anzahl der schwarzen unter den n gezogenen Kugeln.

Die Zufallsgrößen X_n sind jeweils binomialverteilt.
Zeigen Sie, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit p = 0,1 beträgt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Von 100 gezogenen Kugeln sind genau 16 Kugeln schwarz.
B: Von 100 gezogenen Kugeln sind mehr als 16 Kugeln schwarz.
C: Von 100 gezogenen Kugeln sind die ersten fünf Kugeln schwarz.

Berechnen Sie mittels Approximation der Binomialverteilung durch die Standardnormalverteilung die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D: Von 150 gezogenen Kugeln sind höchstens 16 Kugeln schwarz.

b) Jemand zweifelt daran, dass sich der Urneninhalt wie oben angegeben zusammensetzt. Er will eine Entscheidung durch einen Signifikanztest mit der Nullhypothese H_0: $p \le 0{,}1$ herbeiführen.
Geben Sie die Vermutung, die diesem Signifikanztest zugrunde liegt, an.

Nacheinander werden 5 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der schwarzen Kugeln in der Stichprobe.
Ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich $\overline{A}$ auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 10\ \%$ und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art.

c) Nunmehr werden 5 Kugeln ohne Zurücklegen aus der Urne mit 4 schwarzen und 36 weißen Kugeln gezogen. Die Zufallsgröße Z beschreibt die Anzahl der schwarzen unter den 5 gezogenen Kugeln. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Z ist in der folgenden Tabelle unvollständig dargestellt:

z_i	0	1	2	3	4
$P(Z = z_i)$			0,0651	$3{,}83 \cdot 10^{-3}$	$5{,}5 \cdot 10^{-5}$

Begründen Sie, dass die Zufallsgröße Z nicht binomialverteilt ist.

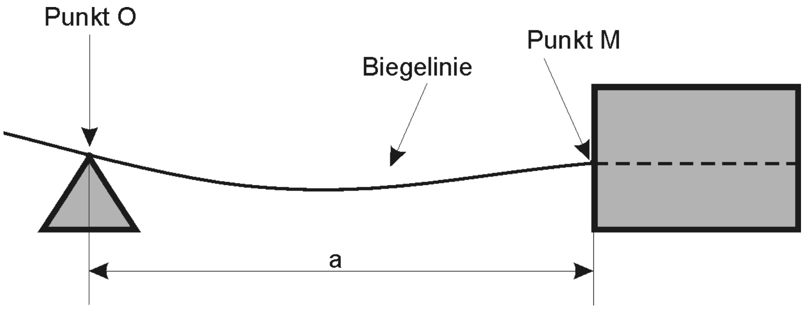
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten P(Z = 0) und P(Z = 1).

Es wird das Ereignis E betrachtet.
E: Nur die fünfte gezogene Kugel ist schwarz.

Erklären Sie, dass gilt: $P(E) = \frac{1}{5} \cdot P(Z = 1)$

Aufgabe 4.1: Analysis

Beim Bau einer Brücke wird ein Brückenträger auf der einen Seite fest im Mauerwerk verankert, wobei der Träger in der Verankerung waagerecht verläuft. Auf der anderen Seite wird der Brückenträger auf gleicher Höhe der Verankerung (Punkt M) auf einer Stützvorrichtung (Punkt O) beweglich gelagert.
Infolge der Elastizität und der eigenen Masse biegt sich der ursprünglich geradlinige Träger durch. Diese Durchbiegung des Trägers wird durch die so genannte Biegelinie beschrieben.



Die Biegelinie eines solchen Trägers wird näherungsweise durch den Graphen genau einer der Funktionen $f_{k;a}$ mit der Gleichung

$$y = f_{k;a}(x) = -k\left(\frac{2}{a^3}x^4 - \frac{3}{a^2}x^3 + x\right) \quad \text{mit } x \in R, \quad -1 \le x \le a \text{ und } a, k \in R, \quad a, k > 0,$$

in einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Punkt O als Koordinatenursprung (1 LE = 1 m) beschrieben. Dabei ist k eine dimensionslose Konstante und a die Maßzahl der in Metern gegebenen Länge der Strecke $\overline{OM}$.

Im Folgenden sind die Werte k = 0,01 und a = 8 zu verwenden.

a) Berechnen Sie den Funktionswert $f_{0,01;\,8}(4)$ und geben Sie an, welche Informationen dieser Funktionswert in Bezug auf den hier beschriebenen Träger enthält.

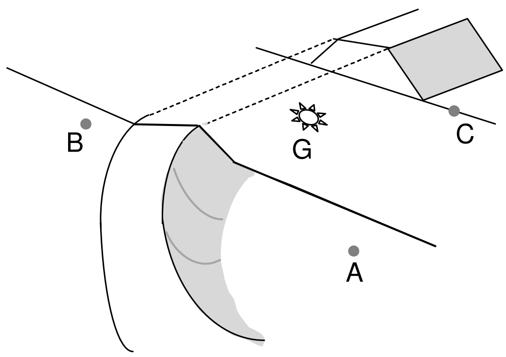
   Berechnen Sie das Gradmaß des Anstiegswinkels der Tangente an die Biegelinie an der Stelle 4.

b) Die Biegelinie hat im Intervall $0 < x < 8$ genau einen lokalen Extrempunkt, und zwar einen Tiefpunkt.
   Schlussfolgern Sie aus dem Gradmaß des Anstiegswinkels der Tangente an die Biegelinie an der Stelle 4, ob die lokale Minimumstelle näher am Punkt O oder näher am Punkt M liegt.

   Ermitteln Sie die Koordinaten des Tiefpunktes.

Aufgabe 4.2: Analytische Geometrie

Für den Bau einer Brücke werden bei der messtechnischen Erfassung der Gegebenheiten Geländepunkte senkrecht in die Horizontalebene projiziert und die erzeugten Punktbilder in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben (eine Einheit entspricht 10 m, die Horizontalebene entspricht der xy-Ebene).
Für die Gründung eines Brückenpfeilers soll ein zunächst noch unzugänglicher Geländepunkt Verwendung finden. Er werde durch $G(x_G \mid y_G)$ beschrieben.



a) Die Lage eines ersten Vermessungspunktes werde durch den Punkt $A(17 \mid 1)$ beschrieben. Von diesem aus wird ein zweiter Vermessungspunkt in $B(2 \mid 6)$ angepeilt.
Ein dritter Vermessungspunkt in $C(20 \mid 10)$ ist so eingefluchtet, dass er mit dem Geländepunkt in G und dem Vermessungspunkt in B in einer Geraden außerhalb der Strecke $\overline{BG}$ liegt.
Berechnen Sie die Entfernung der Vermessungspunkte A und C voneinander und geben Sie eine Parametergleichung der Geraden AB an.

b) Von einem weiteren Vermessungspunkt in $D(9 \mid 17)$ werden Baufluchtlinien senkrecht zu den Strecken $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AC}$ oder deren Verlängerungen festgelegt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes L auf der Geraden AB.

Begründen Sie, dass das durch die beiden Lotfußpunkte und die Punkte A und D bestimmte Viereck ein Quadrat ist.

c) Der Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrates aus Aufgabe b) sei M. Der Punkt G liegt auf der Strecke $\overline{ML}$ und hat von M den Abstand $\sqrt{5}$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes G.