Pflichtaufgaben **Aufgabe 1**
Analysis

Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$f:\ y = f(x) = \frac{8}{11}(4x^3 - x^4), \qquad x \in R,$$

$$g:\ y = g(x) = (4 - x)\,e^x, \qquad x \in R.$$

Die Graphen dieser Funktionen seien F bzw. G.

a) Berechnen Sie die Nullstellen und die lokalen Extremstellen der Funktion f.

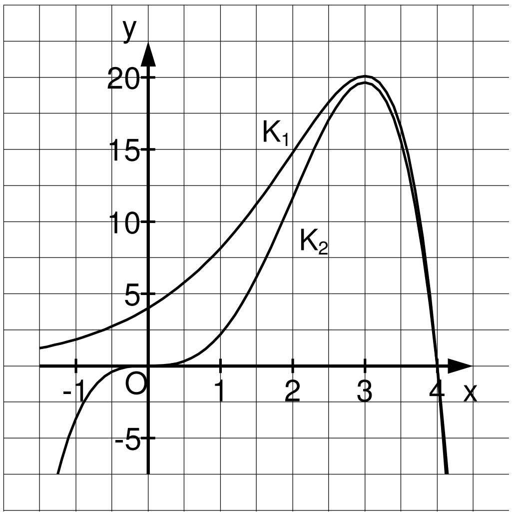
b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen G in seinem Schnittpunkt mit der y-Achse.

Begründen Sie, dass der Graph G für $x < 0$ die x-Achse nicht schneidet.

Zeigen Sie, dass der Punkt P(3 | 20) kein Hochpunkt des Graphen G ist.

Untersuchen Sie den Graphen G auf Wendepunkte und geben Sie deren Koordinaten an.

In der Abbildung sind Ausschnitte der Graphen F und G dargestellt.
Geben Sie an, welche der Kurven zum Graphen F und welche zum Graphen G gehört.



c) Weisen Sie nach, dass die Funktion h mit $y = h(x) = (5 - x)\,e^x$, $x \in R$, eine Stammfunktion von g ist.

Die Graphen F und G, die y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ schließen eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche.

d) Die Funktion f beschreibe im Intervall [0; 3] die Bewegung eines Körpers.
Ihr Argument x entspricht der Zeit (eine Abszisseneinheit beträgt 60 Sekunden). Der Funktionswert y entspricht dem zurückgelegten Weg (eine Ordinateneinheit beträgt 100 Meter).

Ermitteln Sie aus der grafischen Darstellung der Funktion f näherungsweise die Zeit, zu der der Körper die maximale Geschwindigkeit hat, und berechnen Sie mithilfe dieses Näherungswertes die maximale Geschwindigkeit sowie den bis dahin zurückgelegten Weg.
Begründen Sie jeweils Ihr Vorgehen.

Pflichtaufgaben

Aufgabe 2
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind
die Punkte $A(1 | -1 | -1)$ und $B(-3 | 0 | 2)$,
die Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$, sowie
die Ebene E_1 mit der Gleichung $8x + 11y + 7z + 10 = 0$ gegeben.

a) Es sei h die Gerade durch die Punkte A und B.
Geben Sie eine Gleichung der Geraden h an.

Weisen Sie nach, dass die Geraden g und h zueinander windschief sind.

Berechnen Sie das Gradmaß des spitzen Winkels, den die Richtungsvektoren der Geraden g und h einschließen.

b) Die Ebene, die die Gerade h enthält und zu der die Gerade g parallel verläuft, sei die Ebene E_2.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E_2.
[Ergebnis zur Kontrolle: $x - 2y + 2z - 1 = 0$]

Zeigen Sie, dass die Ebenen E_1 und E_2 zueinander senkrecht stehen und auch die Ebene E_1 die Gerade h enthält.

Der Punkt $T(3 | 5 | -5)$ liegt auf der Geraden g.
Berechnen Sie den Abstand des Punktes T von der Ebene E_2.

c) Unter allen Punkten der Geraden g und h gibt es genau ein Paar von Punkten $Q \in g$ und $R \in h$, für welches die Länge der Strecke $\overline{QR}$ minimal ist.
Begründen Sie, dass die Länge dieser Strecke gleich dem Abstand des Punktes T von der Ebene E_2 ist und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q.

Pflichtaufgaben **Aufgabe 3**
Stochastik

Der Verband der europäischen Airlines ermittelte durch eine Umfrage unter Fluggesellschaften, wie viele Gepäckstücke fehlgeleitet wurden. Als fehlgeleitet wird ein Gepäckstück angesehen, das nicht zeitgleich mit dem Passagier, der es aufgegeben hat, am Zielflughafen ankommt. Der ermittelte Anteil fehlgeleiteter Gepäckstücke beträgt 1,7 %.

a) Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl fehlgeleiteter Gepäckstücke von 100 zufällig ausgewählten Gepäckstücken.
Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X als binomialverteilt angenommen werden kann.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 Gepäckstücken höchstens ein Gepäckstück fehlgeleitet wird.

Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X und interpretieren Sie diesen.

Ermitteln Sie die Anzahl der Gepäckstücke, bei der mit zwei fehlgeleiteten Gepäckstücken gerechnet werden muss.

Berechnen Sie die Mindestanzahl der Gepäckstücke, unter denen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens ein fehlgeleitetes Gepäckstück ist.

b) Es wird vermutet, dass sich bei einer Fluggesellschaft der Anteil fehlgeleiteter Gepäckstücke auf 2,0 % erhöht hat. Diese Vermutung soll mittels eines Alternativtests mit einem Stichprobenumfang von 1000 Gepäckstücken überprüft werden.
Ermitteln Sie unter Verwendung der Standardnormalverteilung den größtmöglichen Ablehnungsbereich dafür, dass die Nullhypothese H_0: $p = 0{,}017$ mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % irrtümlich abgelehnt wird.

In der Stichprobe mit 1000 Gepäckstücken ergaben sich 22 fehlgeleitete Gepäckstücke.
Formulieren Sie das Ergebnis der Überprüfung der Vermutung.

c) In 85 % der Fälle, in denen ein Gepäckstück fehlgeleitet worden ist, kommt dieses Gepäckstück nach spätestens 48 Stunden am Zielflughafen an.
Untersuchen Sie, ob davon ausgegangen werden kann, dass ein beliebiges Gepäckstück mit mindestens 99 %iger Wahrscheinlichkeit nach spätestens 48 Stunden am Zielflughafen angekommen ist.

Wahlpflichtaufgaben **Aufgabe 4.1**
Analysis

Gegeben sind die Funktionen f_a durch $y = f_a(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2a}$, $x \in R$, $x \neq 0$, $a \in R$, $a \neq 0$.
Ihre Graphen seien G_a.

a) Zeigen Sie, dass die Graphen G_a bezüglich der y-Achse symmetrisch sind und dass die Funktionen f_a für $a > 0$ keine Nullstellen besitzen.

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen f_a für $x \to \pm\infty$.

Zeichnen Sie den Graphen G_1 im Intervall $-4 \leq x \leq 4$.

b) Der Graph G_1, die Gerade mit der Gleichung $y = 1$, die Gerade mit der Gleichung $y = 2{,}5$ sowie die y-Achse begrenzen im I. Quadranten eine Fläche vollständig.
Bei der Rotation dieser Fläche um die y-Achse entsteht ein Körper.
Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_1^{2,5} \frac{dx}{2x-1}$ mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und begründen Sie, dass $\pi \cdot \int_1^{2,5} \frac{dx}{2x-1}$ die Maßzahl des Volumens des entstandenen Rotationskörpers ist.

Wahlpflichtaufgaben **Aufgabe 4.2**
Analytische Geometrie

Die Positionen zweier Mobilfunksender gleicher maximaler Reichweite werden vereinfacht durch Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem der Ebene mit dem Punkt O als Koordinatenursprung beschrieben (eine Einheit entspricht 10 km).

a) Der Kreis k_1 mit der Gleichung $x^2 + 10x + y^2 - 4y - 71 = 0$ beschreibt die Punkte maximaler Reichweite eines der Sender.

Ermitteln Sie die Position M_1 sowie die maximale Reichweite des Senders und untersuchen Sie, ob man sich im Punkt $P(2 \mid 5)$ im Sendebereich des Senders befindet.

Eine Gerade beschreibe den Verlauf einer Straße. Von einem Punkt dieser Straße verlässt man bei jeder Bewegung längs der Straße den Sendebereich des Senders.
Charakterisieren Sie die gegenseitige Lage des Kreises k_1 und der den Verlauf der Straße beschreibenden Geraden und berechnen Sie die Koordinaten eines solchen Punktes, wenn $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor der Geraden ist.

b) Der andere Mobilfunksender befindet sich im Punkt $M_2(9 \mid 0)$. Die Sendebereiche beider Sender überlagern einander. Die sie beschreibenden Kreise schneiden daher einander. Einer der Schnittpunkte ist $S(3 \mid 8)$.
Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels $\sphericalangle M_1SM_2$ und den Inhalt der Fläche, die dem gemeinsamen Sendebereich entspricht.