Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2021

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = e^x + x^2$ und die Funktion *g* mit $g(x) = x^2$.
Die zugehörigen Graphen sind in der *Abbildung 1* dargestellt.

(1) *Zeigen Sie, dass die Graphen von f und g keinen Schnittpunkt besitzen.*

(2) *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die im Intervall $[-1;0]$ zwischen den Graphen von f und g liegt.*

(3) *Bestimmen Sie* $\lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^0 \left(f(x) - g(x)\right)\mathrm{d}x$ *und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.*

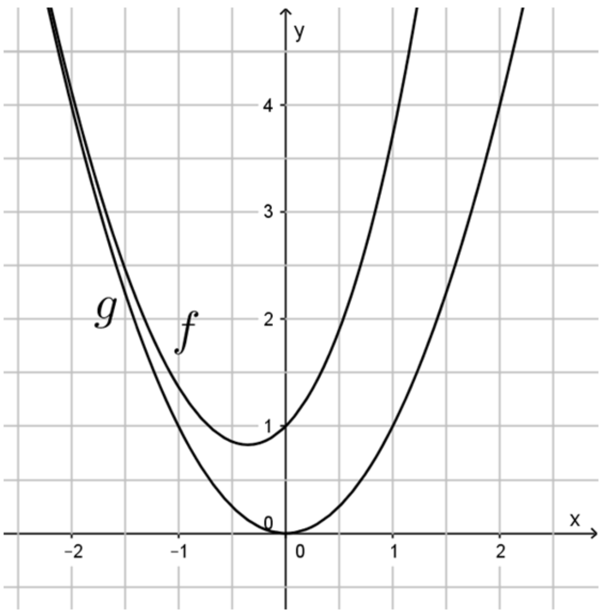


Abbildung 1

(1 + 2 + 2 Punkte)

Name: ____________________

b) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{2x-8}$ und die Funktion g mit $g(x)=-\frac{1}{2}\cdot e^{2x-8}$.

(1) *Bestimmen Sie die Schnittstellen der Graphen der Funktionen f und g.*

(2) Der Graph von g besitzt an der Stelle $x = 4$ die Steigung –1.

Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f an der Stelle $x = 4$ *und interpretieren Sie ihr Ergebnis und die Steigung des Graphen von g an dieser Stelle in Bezug auf den Verlauf der beiden Graphen an dieser Stelle.*

(2 + 3 Punkte)

Name: ____________________

c) Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+2{,}5 \quad , x\in \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion *f* ist für $x > 0$ in der *Abbildung 2* dargestellt.

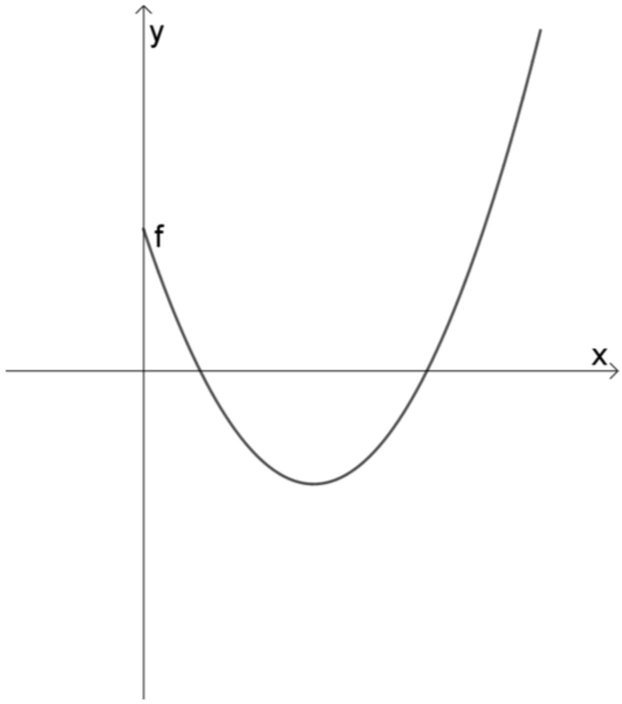


Abbildung 2

(1) *Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.*

Für $x > 0$ ist die Funktion g definiert durch $g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(2) *Geben Sie einen Term für die Funktion g an, der kein Integralzeichen enthält.*

(3) *Skizzieren Sie den Graphen der Funktion g f*ür $x > 0$ *in der Abbildung 2.*

(2 + 1 + 2 Punkte)

Name: ____________________

d) Gegeben ist die Ebene $E:\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3$ und die Punkte $P(-4|4|2)$ und $Q(3|-1|1)$.

(1) *Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Ebene E mit der Länge* 1.

(2) *Begründen Sie, dass Vektor* $\overrightarrow{OP}$ *senkrecht zur Ebene E verläuft.*

(3) Die Ebene E teilt den Raum in zwei Halbräume.
Überprüfen Sie, ob der Punkt P und der Punkt Q auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Ebene E liegen.

(2 + 1 + 2 Punkte)

e) Gegeben sind die Ebene $E:\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 10$ und

die Gerade $g_a:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 2 \end{pmatrix},\quad r \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.

(1) *Bestimmen Sie den Wert von a, für den die Gerade* g_a *die Ebene E nicht schneidet.*

(2) *Bestimmen Sie den Wert für a, für den der Schnittpunkt S der Geraden* g_a *mit der Ebene E in der* x_2x_3*-Ebene liegt.*

(2 + 3 Punkte)

f) Ein Glücksrad besitzt einen roten und einen blauen Sektor. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einmaligem Drehen „rot“ gedreht wird, wird mit x bezeichnet.

(1) *Beurteilen Sie die nachfolgende Aussage: Bei 4-maligem Drehen des Glücksrads beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in beliebiger Reihenfolge* 2*-mal „rot“ und* 2*-mal „blau“ gedreht wird* $\binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot (1-x)^2$.

(2) Das Glücksrad wird 2-mal nacheinander gedreht. Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei zwei verschiedene Farben gedreht werden, beträgt $\frac{4}{9}$.
Bestimmen Sie alle Werte von x, die diese Voraussetzung erfüllen.

(1 + 4 Punkte)

Hinweis:
Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2021

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Kernlehrplänen und den Vorgaben 2021

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte
   Funktionen und Analysis
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen und Abstände
   - Skalarprodukt

   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung und Normalverteilung

2. Medien/ Materialien
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) $f(x)-g(x)=e^x>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Die Graphen von *f* und *g* besitzen somit keinen Schnittpunkt.

(2) $A=\int_{-1}^{0}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}e^x\,\mathrm{d}x=\left[e^x\right]_{-1}^{0}=1-e^{-1}\ \left[=1-\frac{1}{e}\right]$ [FE].

(3) $\int_{a}^{0}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x=\left[e^x\right]_{a}^{0}=1-e^a$.

$\lim_{a\to-\infty}\left(1-e^a\right)=1-0=1$.

Die Fläche, die im 2. Quadranten zwischen den Graphen von *f* und *g* liegt besitzt somit den endlichen Flächeninhalt 1 FE.

Teilaufgabe b)

(1) $f(x)-g(x)=0$

$\Leftrightarrow\ \left(\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{2x-8}-\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{2x-8}\right)=0$

$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}x^2-2x=0$

$\Leftrightarrow\ x^2-4x=0$

$\Leftrightarrow\ x=0$ oder $x=4$.

Die Schnittstellen der Graphen sind $x = 0$ und $x = 4$.

(2) $f'(x) = (x-2)\cdot e^{2x-8} + 2\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}\right)\cdot e^{2x-8} = (x-2+x^2-4x-1)\cdot e^{2x-8}$
$= (x^2-3x-3)\cdot e^{2x-8}$.

$f'(4) = (16-12-3)\cdot e^{2\cdot 4-8} = 1$.

Der Graph von *f* steigt an der Stelle $x = 4$ mit der Steigung 1 und der Graph von *g* besitzt an dieser Stelle die Steigung –1, er fällt somit an dieser Stelle. Die beiden Graphen schneiden sich somit an dieser Stelle rechtwinklig.

Teilaufgabe c)

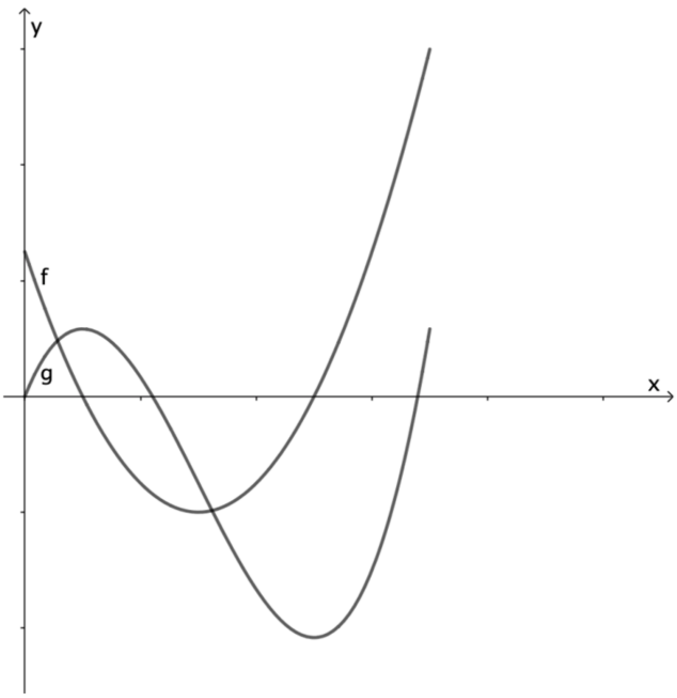
(1) $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2{,}5 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 6x + 5 = 0$.

Die beiden Nullstellen x_1 und x_2 sind: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{(3)^2 - 5} = 3 \pm \sqrt{4} = 3 \pm 2$.

Die Funktion *f* hat die beiden Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$.

(2) $g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{6}t^3 - 1{,}5t^2 + 2{,}5t\right]_0^x = \frac{1}{6}x^3 - 1{,}5x^2 + 2{,}5x$.

(3)



Teilaufgabe d)

(1) Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E.

Wegen $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$ [LE] ist der Vektor $\vec{n}_0 = \frac{1}{3} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E mit der Länge 1.

(2) Da $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \vec{n}$ gilt, ist $\overrightarrow{OP}$ ein Vielfaches von $\vec{n}$.

Damit verläuft $\overrightarrow{OP}$ senkrecht zur Ebene E.

(3) Die Koordinaten von P und Q werden in die Koordinatengleichung von E eingesetzt.
Für $P(-4\,|\,4\,|\,2)$ ergibt sich: $2 \cdot (-4) - 2 \cdot 4 - 2 = -18 < 3$.
Für $Q(3\,|\,-1\,|\,1)$ ergibt sich: $2 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) - 1 = 5 > 3$.
Es folgt, dass die beiden Punkte P und Q auf verschiedenen Seiten der Ebene E liegen.

Teilaufgabe e)

(1) Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E.

[Wegen $3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 2 = 5 \neq 10$ liegt der Stützpunkt $P(1\,|\,0\,|\,2)$ der Gerade g_a für alle a nicht in der Ebene E.]

Die Gerade g_a schneidet die Ebene E nicht, wenn die Gerade parallel zur Ebene und der Richtungsvektor somit senkrecht zu $\vec{n}$ verläuft.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot 2 - 4 \cdot a + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8 = 4a \quad \Leftrightarrow \quad a = 2.$$

Für $a = 2$ schneidet g_a nicht die Ebene E.

(2) Der Schnittpunkt S liegt auf der Geraden und in der x_2x_3-Ebene, somit muss die x_1-Koordinate dieses Punktes der Geraden Null sein.

Aus $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ folgt $1 + 2 \cdot r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -0{,}5$.

Damit gilt für die Koordinaten des Punkte S_a: $\overrightarrow{OS_a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5a \\ 1 \end{pmatrix}$.

Da der Punkt S_a als Schnittpunkt auch in E liegt gilt:
$3 \cdot 0 - 4 \cdot (-0{,}5a) + 1 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 2a = 9 \quad \Leftrightarrow \quad a = 4{,}5$.

Teilaufgabe f)

(1) Da bei einer Drehung nur blau oder rot möglich ist, kann eine Drehung als Bernoulli-Experiment aufgefasst werden. Bei unabhängigen Drehungen ist die Anzahl X von „rot“ unter 4 Drehungen damit binomialverteilt mit den Parametern $n = 4$ und $p = x$.

Es gilt somit: $P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot (1-x)^2$. Die Aussage ist somit wahr.

(2) Aus $P(\text{rot}) = x$ folgt $P(\text{blau}) = 1 - x$.

P(zwei verschiedene Farben) = P(rot, blau) + P(blau, rot) = $\frac{4}{9}$.

$$x \cdot (1-x) + (1-x) \cdot x = \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x^2 + 2x - \frac{4}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x + \frac{2}{9} = 0.$$

Die Lösungen x_1 und x_2 dieser Gleichung sind:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{9}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{9}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{36} - \frac{8}{36}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}.$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \vee \quad x_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Die Wahrscheinlichkeit kann $x_1 = \frac{1}{3}$ oder $x_2 = \frac{2}{3}$ betragen.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: ________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass die Graphen von f und g keinen Schnittpunkt besitzen.	1			
2	(2) berechnet den Inhalt der Fläche, die im angegebenen Intervall zwischen den Graphen von f und g liegt.	2			
3	(3) bestimmt $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 \left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x$ und interpretiert das Ergebnis geometrisch.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe a)		**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Schnittstellen der Graphen der Funktionen f und g.	2			
2	(2) bestimmt die Ableitung von f und die Steigung des Graphen von f an der Stelle $x = 4$.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe b)		**4**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Nullstellen der Funktion *f*.	2			
2	(2) gibt einen Term für die Funktion *g* an, der kein Integralzeichen enthält.	1			
3	(3) skizziert den Graphen der Funktion *g* in *Abbildung 2*.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………….... ………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe c)		**5**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt einen Normalenvektor der Ebene *E* mit der Länge 1.	2			
2	(2) begründet, dass der Vektor $\overrightarrow{OP}$ senkrecht zur Ebene *E* verläuft.	1			
3	(3) überprüft, ob der Punkt *P* und der Punkt *Q* auf derselben oder verschiedenen Seiten der Ebene *E* liegen.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………….... ………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe d)		**5**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt den Wert von a, für den die Gerade g_a die Ebene E nicht schneidet.	2			
2	(2) bestimmt den Wert für a, für den der Schnittpunkt S in der x_2x_3-Ebene liegt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe e)		**5**			

Teilaufgabe f)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) beurteilt die Aussage.	1			
2	(2) bestimmt alle Werte von x, die die Voraussetzung erfüllen.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe f)		**5**			

Summe insgesamt		**30**			