Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung

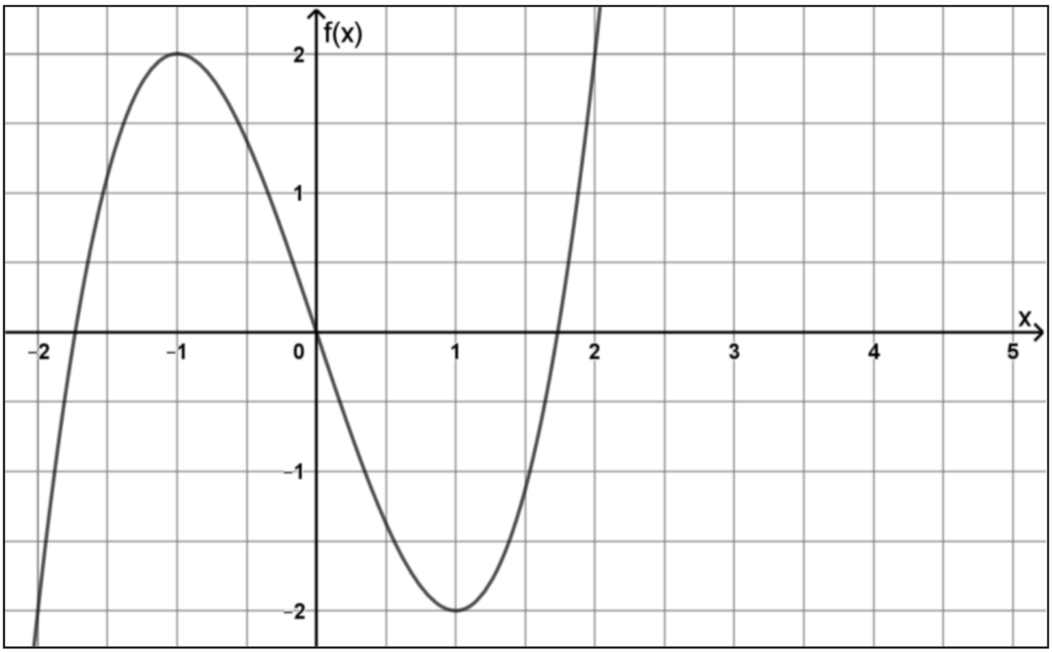
Eine Funktion f ist gegeben durch die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$.
Der Graph von f ist in der *Abbildung* dargestellt.

a) (1) *Begründen Sie, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist.*

(2) Der Graph von *f* schließt mit der *x*-Achse im zweiten Quadranten die Fläche *A* ein.
Bestimmen Sie rechnerisch die Größe dieser Fläche.
[Zur Kontrolle: $A = 2{,}25\,FE$]

(3) Gegeben ist die Gerade *g* mit der Funktionsgleichung $g(x) = -2x$, $x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem die Gerade g die Fläche A aus (2) *teilt.*

(1 + 5 + 4 Punkte)



Abbildung

Name: ____________________

Gegeben ist die Schar die ganzrationaler Funktionen f_k mit

$$f_k(x) = x^3 - 3k \cdot x + k^2 - 1 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}.$$

b) (1) Die Funktion *f* gehört zur Funktionenschar f_k.
Geben Sie k so an, dass gilt $f = f_k$.

(2) *Bestimmen Sie alle Werte von k, so dass* $f_k(2) = 2$ *gilt.*

(1 + 2 Punkte)

c) Gegeben ist die Funktion *h* mit $h(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) *Berechnen Sie die lokalen Extrempunkte von h.*
Hierbei darf ohne Nachweis $h''(x) = (x^2 - 4x + 2) \cdot e^{-x}$ verwendet werden.

(2) *Skizzieren Sie den Graphen von h in der Abbildung auf Seite* 1.

(3) *Entscheiden Sie begründet, ob im lokalen Hochpunkt* $H(2 \mid 4 \cdot e^{-2})$ *von h ein globales Maximum von h vorliegt.*
Geben Sie begründet das globale Minimum von h an.

(4) *Ermitteln Sie für x* > 0 *die Länge des Intervalls, in dem* $h(x) \geq 0{,}5$ *gilt, auf zwei Nachkommastellen gerundet.*

(5) Die Punkte *A*(0 | 0), *B*(*u* | 0) und *C*(u | *h(u)*) bilden für $0 \leq u \leq 10$ die Eckpunkte eines Dreiecks *ABC*.
Bestimmen Sie u so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC maximal wird.

(6) *Beschreiben Sie, wie der Graph von j mit* $j(x) = 3 \cdot (x-2)^2 \cdot e^{-(x-2)}$ *aus dem Graphen von h hervorgeht.*
Geben Sie den lokalen Hochpunkt der Funktion j an.

(6 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Kernlehrplänen und den Vorgaben 2021

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen
     - Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei $p(x)$ ein Polynom höchstens zweiten Grades ist
     - Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben
     - Interpretation und Bestimmung von Parametern der oben genannten Funktionen
     - Notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. Medien/ Materialien
entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Da für alle $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ gilt, ist der Graph von *f* punktsymmetrisch zum Ursprung.

(2) Nullstellen von *f*: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = 0 \vee x = \sqrt{3}$.

Wegen $f(-1) = 2$ liegt die im zweiten Quadranten eingeschlossene Fläche oberhalb der *x*-Achse.

F mit $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$ ist eine Stammfunktion von *f*.

Die Größe der eingeschlossenen Fläche im zweiten Quadranten ist durch

$A = \int_{-\sqrt{3}}^{0} f(x)dx = [F(x)]_{-\sqrt{3}}^{0} = F(0) - F(-\sqrt{3}) = 2{,}25$ [FE] berechenbar.

(3) Die Schnittstellen der Graphen von f und g sind -1, 0 und 1.

Man erkennt in der Abbildung, dass die Gerade somit von -1 bis 0 unterhalb des Graphen von f verläuft.

Für die Größe der von den Graphen von f und g im zweiten Quadranten eingeschlossenen Fläche gilt $\int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))dx = 0{,}25$.

$\frac{0{,}25}{2{,}25} = \frac{1}{9}$. Das Verhältnis der beiden Teilflächen beträgt 8:1.

Teilaufgabe b)

(1) Es gilt: $f = f_1$ bzw. $k = 1$.

(2) $f_k(2) = 2 \;\Leftrightarrow\; 8 - 6k + k^2 - 1 = 2 \;\Leftrightarrow\; k^2 - 6k + 5 = 0$

$\overset{GTR}{\Rightarrow}$ $k = 1$ oder $k = 5$.

Teilaufgabe c)

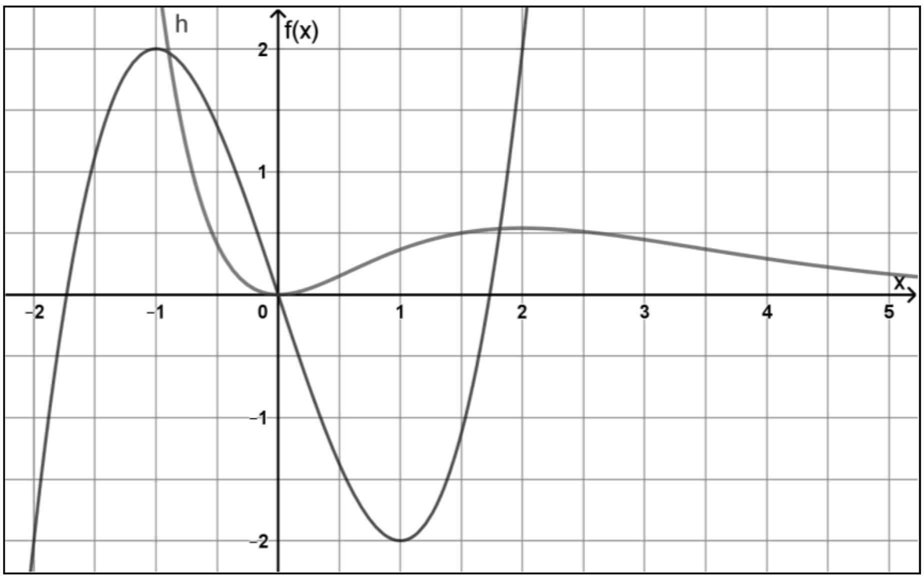
(1) $h'(x) = (-1)\cdot x^2 \cdot e^{-x} + 2x \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (-x^2 + 2x)$.

Die für lokale Extremstellen von *h* notwendige Bedingung $h'(x) = (-x^2 + 2x)\cdot e^{-x} = 0$ ist für $x = 0$ und $x = 2$ erfüllt.

Mit $h''(0) = 2 > 0$ und $h(0) = 0$ hat *h* einen lokalen Tiefpunkt $T(0\,|\,0)$.

Mit $h''(2) = -2e^{-2} < 0$ und $h(2) = 4e^{-2}$ hat *h* einen lokalen Hochpunkt $H(2\,|\,4e^{-2})$.

(2)



(3) Da für $x \to -\infty$ $h(x)$ gegen ∞ strebt, liegt in $H(2\,|\,4e^{-2})$ kein globales Maximum von *h* vor.

Wegen $x^2 \geq 0$ und $e^{-x} > 0$ gilt $h(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Mit $h(0) = 0$, ist 0 das globale Minimum von *h*.

(4) Gesucht sind die Stellen *x* >0 für die $h(x) = 0{,}5$ gilt.

Der Taschenrechner liefert im Intervall [0;2] die Lösung $x \approx 1{,}488$ und im Intervall [2;3] die Lösung $x \approx 2{,}618$.

Unter Berücksichtigung des Verlaufs des Graphens folgt:
Das Intervall, in dem $h(x) \geq 0{,}5$ gilt, hat eine Länge von ungefähr 1,13.

(5) $A(u) = 0{,}5 \cdot u \cdot h(u) = 0{,}5 \cdot u^3 \cdot e^{-u}$.

Der Taschenrechner liefert für $0 \le u \le 10$ das Maximum der Funktion A bei $u = 3$. Somit wird der Flächeninhalt des Dreiecks für $u = 3$ maximal.

(6) Der Graph von j geht aus dem Graphen von h durch eine Streckung in y-Richtung mit dem Streckfaktor 3 und eine Verschiebung in x-Richtung um 2 Einheiten nach rechts hervor. Der lokale Hochpunkt von j ist $H(4 \,|\, 12e^{-2})$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist.	1			
2	(2) bestimmt die erforderlichen Nullstellen als Integrationsgrenzen und gibt eine Stammfunktion an.	3			
3	(2) bestimmt rechnerisch die Größe der Fläche.	2			
4	(3) bestimmt die Größe der von den Graphen von f und g eingeschlossen Fläche im zweiten Quadranten.	3			
5	(3) bestimmt das Verhältnis, in dem die Gerade die Fläche A teilt.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) ………………………………………………………………... ………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe a)		**10**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt k an, so dass $f = f_k$ gilt.	1			
2	(2) bestimmt alle Werte von k so, dass $f_k(2) = 2$ gilt.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) ………………………………………………………………... ………………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe b)		**3**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt einen Funktionsterm von h' an und bestimmt die möglichen Extremstellen mit einer notwendigen Bedingung.	3			
2	(1) bestätigt die Extremstellen mit einer hinreichenden Bedingung und bestimmt die Koordinaten der Extrempunkte.	3			
3	(2) skizziert den Graphen von *h* in der Abbildung.	2			
4	(3) entscheidet begründet, ob im lokalen Hochpunkt von *h* ein globales Maximum von *h* vorliegt.	1			
5	(3) gibt begründet das globale Minimum von *h* an.	2			
6	(4) ermittelt für $x > 0$ die Länge des Intervalls, in dem $h(x) \geq 0{,}5$ gilt auf zwei Nachkommastellen gerundet.	3			
7	(5) gibt einen Term an, mit dem der Flächeninhalt abhängig von *u* berechnet werden kann.	2			
8	(5) bestimmt *u* so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird.	2			
9	(6) beschreibt, wie der Graph von *j* aus dem Graphen von *h* hervorgeht.	2			
10	(6) gibt den lokalen Hochpunkt von *j* an.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (22) ………………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe c)		**22**			

Summe insgesamt	**35**			

Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

In einer Anlage zur Getränkeabfüllung werden zwei Maschinen zur Abfüllung von 330 ml-Flaschen betrieben. Bei einer Kontrolle werden je 20 Flaschen stichprobenartig entnommen und die tatsächlichen Füllmengen gemessen. Die Häufigkeiten der auf 1 ml gerundeten Messwerte sind in den folgenden Tabellen aufgeführt.

Maschine A

Füllmenge in ml	327	328	329	330	331	332	333
Häufigkeit	1	1	4	9	2	2	1

Maschine B

Füllmenge in ml	327	328	329	330	331	332	333
Häufigkeit	0	2	3	10	3	2	0

Name: ____________________

a) Die folgende *Abbildung 1* zeigt das Histogramm zu den Daten von Maschine *B*.

(1) *Zeichnen Sie das entsprechende Histogramm zu den Daten von Maschine A in Abbildung 1 ein.*

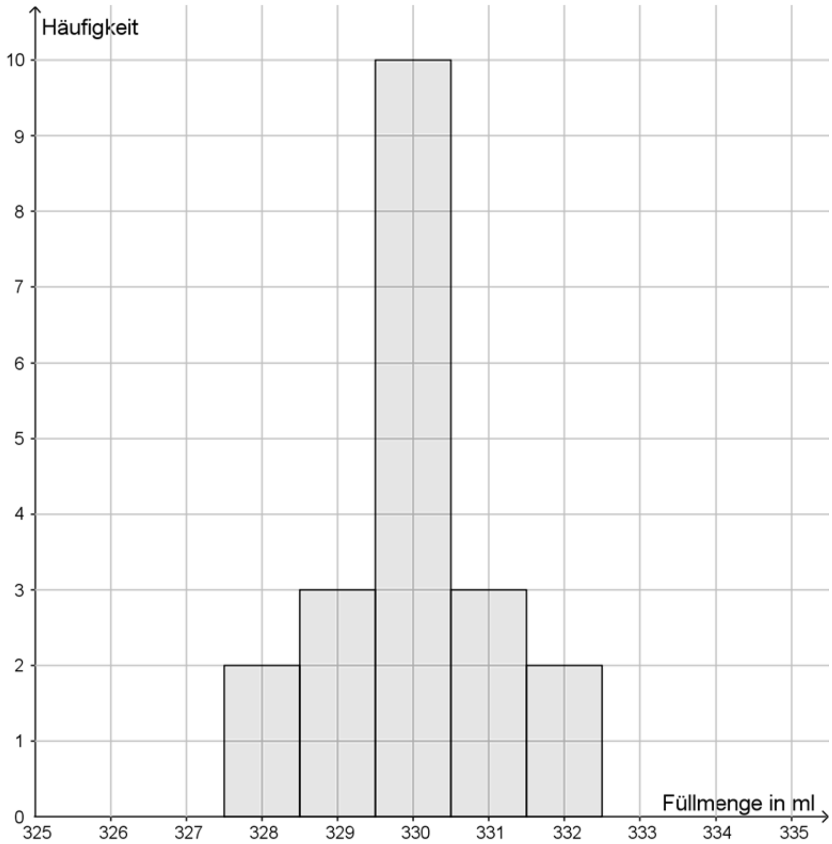


Abbildung 1

Um zu beurteilen, ob eine Maschine gut arbeitet, werden der Mittelwert und die Streuung berücksichtigt. Eine Maschine arbeitet umso besser, je näher die Abfüllung im Mittel am Wert 330 ml liegt und je kleiner die Streuung ist.

Für die Maschine A beträgt der Mittelwert 330 ml und die Standardabweichung etwa 1,34 ml.

(2) *Beurteilen Sie rechnerisch, welche Maschine besser arbeitet.*

(2 + 5 Punkte)

Name: ____________________

Eine Flasche, in die gerundet weniger als 330 ml abgefüllt werden, wird im Kontext dieser Aufgabe als Minderbefüllung bezeichnet.

Im Folgenden wird Maschine *A* näher betrachtet.

Es sollen nun 100 zufällig ausgewählte Flaschen dieser Maschine untersucht werden. Die Zufallsgröße *X*: „Anzahl der Minderbefüllungen" in einer Stichprobe wird als binomialverteilt angenommen mit $p = 0,3$.

b)

(1) Es sei *E* das Ereignis: „Es treten genau 25 Minderbefüllungen auf."
Entscheiden Sie, welcher der folgenden Ansätze zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses E genutzt werden kann und erläutern Sie die einzelnen Bestandteile dieses ausgewählten Ansatzes.

(I) $P(E) = 0,3^{25} \cdot 0,7^{75}$

(II) $P(E) = \binom{100}{25} \cdot 0,3^{25} \cdot 0,7^{75}$

(III) $P(E) = \frac{100}{25} \cdot 0,3^{25} \cdot 0,7^{75}$

(IV) $P(E) = 25 \cdot 0,3 + 75 \cdot 0,7$

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis* „Es treten weniger als 30 Minderbefüllungen auf".

(3) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis* „Es treten mindestens 40 Minderbefüllungen auf".

(4) *Geben Sie ein auf diesen Kontext bezogenes Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit gemeinsam mit den Wahrscheinlichkeiten aus* (2) *und* (3) *in der Summe* 1 *ergibt.*

(3 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Name: ____________________

c) Der verantwortliche Maschinenmeister hat die Vermutung, dass die Stichprobe ungünstig gewählt wurde und die Maschine A eigentlich besser arbeitet als die Stichprobe ergeben hat. Mit einer neuen Stichprobe von 200 Flaschen will er dies nun überprüfen.
Der Maschinenmeister bleibt bei seiner Vermutung, wenn in der neuen Stichprobe höchstens 45 Minderbefüllungen sind. Andernfalls lehnt er sie ab.

(1) *Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Maschinenmeister davon ausgeht, dass die Maschine besser arbeitet, obwohl die Maschine tatsächlich mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}3$ Minderbefüllungen produziert.*

(2) Die Wahrscheinlichkeit p, dass eine zufällig ausgewählte Flasche minderbefüllt ist, soll deutlich verringert werden, so dass in der Stichprobe von 200 Flaschen durchschnittlich nur 16 minderbefüllte Flaschen zu erwarten sind.
Ermitteln Sie, auf welchen Wert die Wahrscheinlichkeit p verringert werden muss.

(2 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Kernlehrplänen und den Vorgaben 2021

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte
   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung

2. Medien/ Materialien
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1)

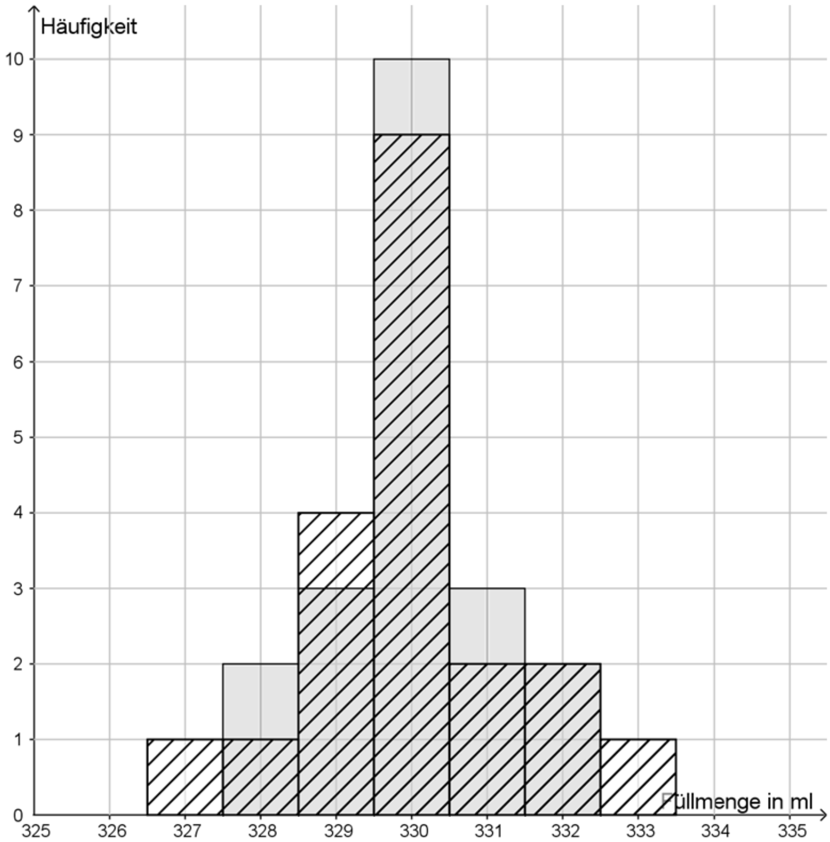


Abbildung 1

(2) Es ist $\overline{x}_B = \dfrac{2\cdot 328 + 3\cdot 329 + 10\cdot 330 + 3\cdot 331 + 2\cdot 332}{20} = 330\,[\text{ml}] = \overline{x}_A$, daher wird die Streuung in Form der Standardabweichung untersucht.

Es ist $s_A \approx 1{,}34\ [\text{ml}]$ und $s_B = \sqrt{\dfrac{2\cdot(330-328)^2 + \ldots + 2\cdot(330-332)^2}{20}} \approx 1{,}05\ [\text{ml}]$.

Daher kommt man aufgrund der Stichprobe zu dem Urteil, dass Maschine *B* besser arbeitet.

Teilaufgabe b)

(1) Für die Berechnung des Ereignisses kann [ausschließlich] der Ansatz (II) verwendet werden. Dabei steht $P(E)$ für die Eintrittswahrscheinlichkeit des Ereignisses E.
Der Binomialkoeffizient $\binom{100}{25}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, wie die 25 Minderbefüllungen bei den 100 Flaschen verteilt sein können. $0{,}3^{25}$ gibt die Wahrscheinlichkeit für 25 Minderbefüllungen und $0{,}7^{75}$ die Wahrscheinlichkeit für 75 nicht minderbefüllte Flaschen an.

(2) [Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}3$.]
Es ist $P_{100;0,3}(X < 30) = P_{100;0,3}(X \leq 29) \approx 0{,}462$.
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 46,2 % treten weniger als 30 Minderbefüllungen auf.

(3) Es ist $P_{100;0,3}(X \geq 40) \approx 0{,}021$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 2,1 % treten weniger als 30 Minderbefüllungen auf.

(4) Das Ereignis „Es treten mindestens 30 und weniger als 40 Minderbefüllungen auf" ist ein solches Ereignis. [Alle drei Ereignisse ergeben als paarweise disjunkte Vereinigung die gesamte Ergebnismenge.]

Teilaufgabe c)

(1) Die Zufallsgröße X: „Anzahl der Minderbefüllungen" ist hier binomialverteilt mit $p = 0{,}3$ und $n = 200$. Es ist $P_{200;0,3}(X \leq 45) \approx 0{,}011$.
Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 1,1 Prozent wird der Maschinenmeister davon ausgehen, dass die Maschine eigentlich besser arbeitet.

(2) Die durchschnittlich zu erwartende Anzahl minderbefüllter Flaschen in der Stichprobe entspricht dem Erwartungswert der Zufallsgröße X mit $n = 200$ und unbekanntem p.
$E(X) = n \cdot p = 200 \cdot p = 16 \quad \Leftrightarrow \quad p = 0{,}08$.
Die Wahrscheinlichkeit muss auf 8 % verringert werden.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeichnet das entsprechende Histogramm ein.	2			
2	(2) bestimmt den Mittelwert.	2			
3	(2) bestimmt die Standardabweichung.	2			
4	(2) beurteilt, welche Maschine besser arbeitet.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) ……………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe a)		**7**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) entscheidet sich für den richtigen Ansatz.	1			
2	(1) erläutert die einzelnen Bestandteile des Ansatzes.	2			
3	(2) bestimmt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Es treten weniger als 30 Minderbefüllungen auf“.	2			
4	(3) bestimmt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Es treten mindestens 40 Minderbefüllungen auf“.	2			
5	(4) gibt ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit gemeinsam mit den Wahrscheinlichkeiten aus (2) und (3) in der Summe 1 ergibt.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) ……………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe b)		**9**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die Wahrscheinlichkeit, mit der der Maschinenmeister davon ausgeht, dass die Maschine besser arbeitet.	2			
2	(2) ermittelt, auf welchen Wert die Wahrscheinlichkeit *p* verringert werden muss.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ………………………………………………………………….... ………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe c)		**4**			

Summe insgesamt	**20**			

Name: ____________________

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung

Abbildung 1

In Bottrop im Ruhrgebiet steht auf einer Kohle-Abraumhalde das Kunstwerk „Haldenereignis Emscherblick“ – im Folgenden kurz als Kunstwerk bezeichnet (siehe *Abbildung 1*).
Das Kunstwerk hat die Form einer Pyramide, die von vier gleichseitigen zueinander kongruenten Dreiecken begrenzt wird (regelmäßiges Tetraeder). Eines der Dreiecke bildet die Grundfläche der Pyramide. Die Kantenlänge beträgt jeweils 60 m. Das Kunstwerk steht auf vier 9 m hohen Betonpfeilern. Um das Kunstwerk begehen zu können, sind in die Konstruktion Treppen und Aussichtsplattformen eingearbeitet.

Name: ____________________

Vereinfachend wird das Kunstwerk im Folgenden durch eine näherungsweise regelmäßige Pyramide *ABCD* mit Eckpunkten mit ganzzahligen Koordinaten modelliert. Der Ursprung des Koordinatensystems befindet sich im Schwerpunkt des Dreiecks *ABC* (siehe *Abbildung 2*), welches die Grundfläche der Pyramide bildet. Die Eckpunkte der Pyramide haben in diesem Modell die Koordinaten

$$A\ (35\,|\,0\,|\,0);\ B\ (-17\,|\,30\,|\,0);\ C\ (-17\,|\,-30\,|\,0);\ D\ (0\,|\,0\,|\,49).$$

Dabei entspricht eine Längeneinheit im Modell einem Meter [m].

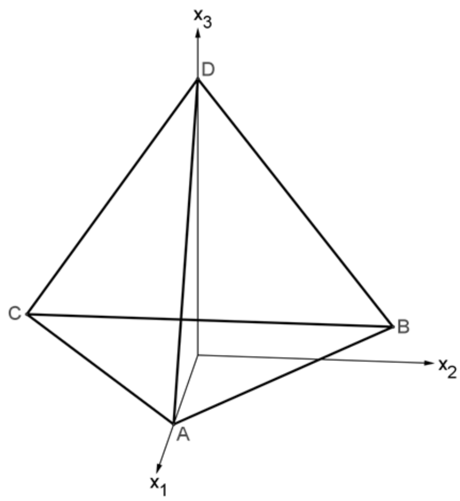


Abbildung 2

a) (1) *Begründen Sie, dass die Grundfläche ABC der Pyramide in der* x_1x_2 *-Ebene liegt.*

(2) *Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, und C näherungsweise die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge* 60 [m] *sind.*

(3) *Geben Sie eine Parametergleichung der Ebene* E_{ABC} *an, die die dreieckige Grundfläche ABC der Pyramide enthält.*

(2 + 4 + 1 Punkte)

Name: ____________________

b) Die Besuchertreppe vom Boden zur ersten Plattform wird im ersten Treppenstück durch einen Abschnitt der Geraden g modelliert, der in $P\ (16\,|\,-20\,|\,-9)$ beginnt und ins Innere der Pyramide verläuft. Die Gerade g ist gegeben durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ -20 \\ -9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}.$$

(1) Die Gerade g durchstößt die Grundfläche ABC der Pyramide im Punkt T.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T und bestimmen Sie die Länge des Treppenstückes, welches sich bei dieser Modellierung außerhalb der Pyramide befindet.

[Hinweis: Ein Nachweis, dass der Punkt T innerhalb der Dreiecksfläche ABC liegt, wird nicht erwartet.]

(2) *Stellen Sie eine Gleichung der Strecke $\overline{AC}$ in Parameterform auf.*
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q auf der Geraden g, der sich genau vertikal unterhalb der Kante $\overline{AC}$ befindet auf zwei Nachkommastellen genau.
[Kontrolllösung mit einer Nachkommastelle: $Q\ (11{,}3\,|\,-13{,}7\,|\,-5{,}9)$.]

(3) *Bestimmen Sie den Abstand des Punktes Q vom vertikal darüber liegenden Punkt auf der Kante $\overline{AC}$.*

(5 + 6 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2021

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Kernlehrplänen und den Vorgaben 2021

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte
Analytische Geometrie und Lineare Algebra
- Lineare Gleichungssysteme
- Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
- Lagebeziehungen
- Skalarprodukt

2. Medien/Materialien
- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Grafikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) Die drei Eckpunkte *A*, *B* und *C* besitzen alle die x_3-Koordinate Null und liegen somit in der x_1x_2–Ebene.

(2)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -52 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -52 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{52^2 + 30^2} \approx 60{,}0$$

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \left|\overrightarrow{CB}\right| = 60\,.$$

Damit ist das Dreieck *ABC* näherungsweise gleichseitig mit der Kantenlänge 60 [m].

(3) Bestimmung einer Parameterform der Ebene E_{ABC}:
Da die Ebene E_{ABC} in der x_1x_2–Ebene liegt, kann sofort auf folgende Parameterform geschlossen werden:

$$E_{ABC}: \quad \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r, t \in \mathbb{R}.$$

Teilaufgabe b)

(1) Die Ebene E_{ABC} liegt in der x_1x_2–Ebene.
Daher muss die x_3-Koordinate des Punktes *T* auf der Geraden *g* Null betragen.

$$-9 + s \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{9}{2} = 4{,}5\,.$$

Einsetzen von s = 4,5 in die Geradengleichung liefert die Koordinaten des gesuchten Schnittpunktes:

$$\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 16 \\ -20 \\ -9 \end{pmatrix} + 4{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \; T\,(2{,}5 \,|\, {-2} \,|\, 0).$$

Für die Länge des gesuchten Treppenstücks gilt somit:

$$\left|\overrightarrow{PT}\right| = \left|\begin{pmatrix} -13{,}5 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}\right| = 4{,}5 \cdot \sqrt{29} \approx 24{,}23 \quad [\mathrm{m}].$$

(2) Aufstellen der Gleichung der Strecke $\overline{AC}$:

$$\overline{AC}: \vec{x} = \overrightarrow{0A} + t \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -52 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \le t \le 1 .$$

In der beschriebenen Situation müssen die x_1- und x_2-Koordinaten der Kante $\overline{AC}$ und der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ -20 \\ -9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$ übereinstimmen.

Aus diesem Ansatz ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 35 - 52 \cdot t &= 16 - 3 \cdot s \\ 0 - 30 \cdot t &= -20 + 4 \cdot s \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; s = \frac{235}{149} \approx 1{,}58 \text{ und } t = \frac{68}{149} \approx 0{,}46 \quad \text{mit } 0 < t < 1.$$

Einsetzen von s in g liefert für die Koordinaten des gesuchten Punktes auf der Geraden g. Näherungsweise gilt: $Q\ (11{,}27 \,|\, {-13{,}69} \,|\, {-5{,}85})$.

(3) Der vertikal darüber liegende Punkt auf der Kante $\overline{AC}$ hat näherungsweise die Koordinaten: (11,27|-13,69|0).

Der Abstand des Punktes Q vom vertikal darüber liegenden Punkt auf der Kante $\overline{AC}$ beträgt somit ungefähr 5,85 [m].

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass die Grundfläche *ABC* in der x_1x_2-Ebene liegt.	2			
2	(2) zeigt, dass die Punkte *A*, *B* und *C* näherungsweise die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge 60 [m] sind.	4			
3	(3) gibt eine Parametergleichung der Ebene E_{ABC} an.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) ……………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe a)		**7**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Koordinaten des Punktes *T*.	3			
2	(1) bestimmt die Länge des Treppenstückes, welches sich außerhalb der Pyramide befindet.	2			
3	(2) stellt eine Gleichung der Strecke $\overline{AC}$ in Parameterform auf.	2			
4	(2) bestimmt die Koordinaten des Punktes *Q* auf der Geraden *g*.	4			
5	(3) bestimmt den Abstand des Punktes *Q* vom vertikal darüber liegenden Punkt auf der Kante $\overline{AC}$.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) ……………………………………………………………….... …………………………………………………………………					
Summe Teilaufgabe b)		**13**			

Summe insgesamt	**20**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur