1. Beispielaufgaben

1.1 Analysis

A1

EH S. 14

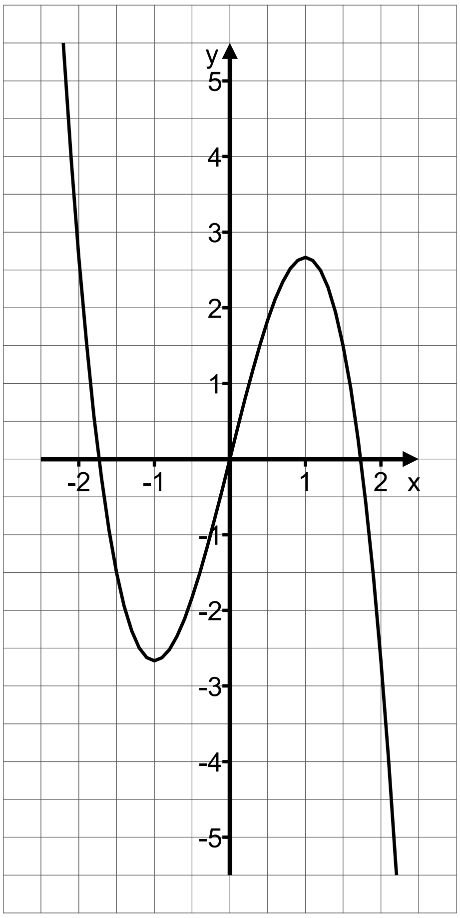
Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 4x \quad (x \in \mathbb{R})$. Ihr Graph ist unten links abgebildet.

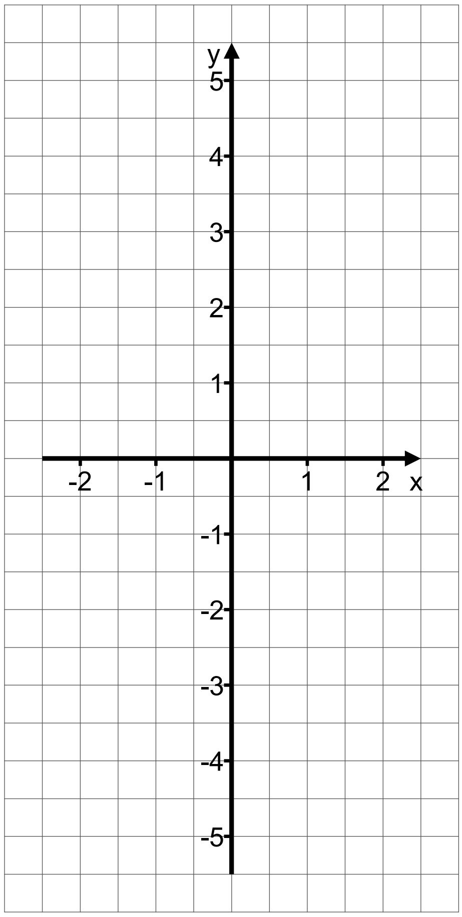
a) Der einzige Wendepunkt der Funktion f liegt im Ursprung des Koordinatensystems. Bestimmen Sie die Steigung im Wendepunkt.

1 BE

b) Die Extrempunkte der Funktion f liegen an den Stellen $x = 1$ und $x = -1$. Skizzieren Sie im Koordinatensystem unten rechts den Graphen von $f'(x)$. Beachten Sie dabei die Lage der Extrempunkte und die Steigung im Wendepunkt.

4 BE





A2 *EH S. 14*

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^4 + 2x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Begründen Sie, warum $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

1 BE

b) Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Geben Sie an, um wie viele Einheiten der Graph von f mindestens nach oben verschoben werden muss, wenn dieses Integral einen ganzzahligen Wert annehmen soll, und begründen Sie Ihre Angabe.

4 BE

A3 *EH S. 15*

In den Teich eines Botanischen Gartens werden 20 Koi-Karpfen ausgesetzt. Die Anzahl der Koi in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren seit dem Aussetzen) werde durch die Modellfunktion b beschrieben.

Der Modellfunktion liegen folgende Annahmen zu Grunde:

- Die Maximalzahl, die sich einstellen wird, ist $S = 80$.
- Der jährliche Zuwachs $\left[b(t+1) - b(t)\right]$ ist proportional zu der Differenz $\left[S - b(t)\right]$ am Beginn eines Jahres.

Zeigen Sie, dass die Modellfunktion $b(t) = 80 - 60 \cdot 0{,}5^t \quad (t \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ der Anfangsbedingung und den Modellannahmen entspricht.

5 BE

A4 *EH S. 15*

Für jeden Wert von $a \; (a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Bestimmen Sie a und b so, dass die Tangente an dem Graphen von f_a im Punkt $P(1 \mid f_a(1))$ durch die Gleichung $t(x) = -2x + b$ beschrieben werden kann.

1.2 Analytische Geometrie und Lineare Algebra

1.2 1 Analytische Geometrie

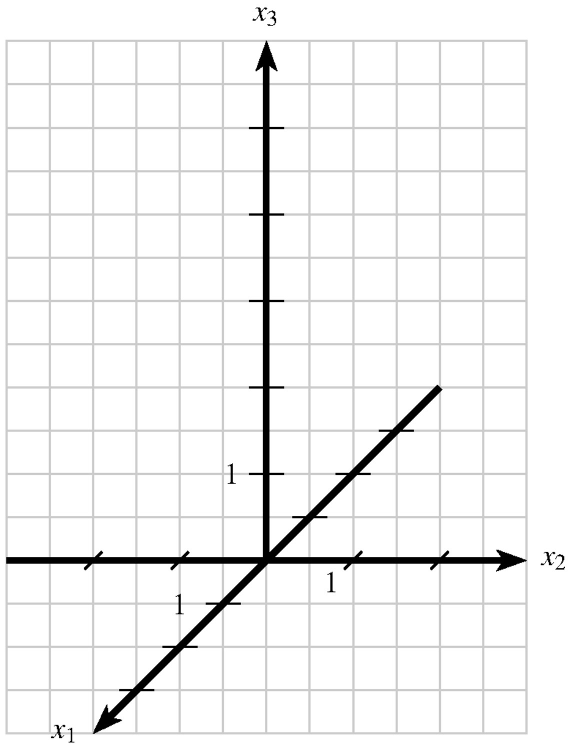
G1

EH S. 16

Gegeben sind die Punkte $A(2|-2|1)$, $B(-2|2|1)$ und $C(-2|-2|5)$.

a) Zeichnen Sie die Punkte A, B und C in das nebenstehende Koordinatensystem ein.

3 BE



b) Die Verbindungsvektoren der drei Punkte sind die Vektoren

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}0\\-4\\4\end{pmatrix}\ \text{und}\ \overrightarrow{CA}.$$

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC ein gleichseitiges Dreieck ist.

2 BE

G2

EH S. 16

Gegeben sind die Punkte $A(3|1|1)$ und $B(-2|2|4)$ sowie die Geraden

$$g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\1\\3\end{pmatrix}\ (r\in\mathbb{R})\quad \text{und}\quad h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}\ (s\in\mathbb{R}).$$

a) Bestätigen Sie, dass g durch A und B geht.

1 BE

b) Die Geraden g und h haben genau einen Schnittpunkt. Bestimmen Sie diesen Schnittpunkt.

2 BE

c) Geben Sie einen weiteren Punkt auf g an, der von A den gleichen Abstand hat wie B.

2 BE

G3 *EH S. 17*

Gegeben ist die Ebene $E_1:\ \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (r, s \in \mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass alle Punkte der Ebene E_1 die folgende Gleichung erfüllen:
$7x_1 + x_2 - 5x_3 = 0$. 2 BE

b) Geben Sie für die Ebene $E_2:\ \vec{x} = p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + q \cdot \vec{v} \quad (p, q \in \mathbb{R})$ einen Vektor $\vec{v}$ so an,

dass die Ebene E_2 nicht identisch mit der Ebene E_1 ist.

Begründen Sie, dass der von Ihnen angegebene Vektor $\vec{v}$ die Bedingung erfüllt.

3 BE

G4 *EH S. 18*

Gegeben sind die Vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\vec{r}$ orthogonal zu $\vec{s}$ und nicht orthogonal zu $\vec{t}$ ist.

2 BE

b) Gegeben ist ein weiterer Vektor $\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ z \end{pmatrix}$ mit $z \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass bei geeigneter Wahl von z der Vektor $\overrightarrow{u_z}$ orthogonal zu $\vec{r}$ und auch orthogonal zu $\vec{s}$ sein kann, aber nicht zu beiden Vektoren gleichzeitig.

3 BE

1.2.2 Lineare Algebra

LA1 *EH S. 18*

Gegeben ist das eindeutig lösbare Gleichungssystem LGS1

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{I:} & 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 9 \\ \text{II:} & -2x_1 - x_2 + 2x_3 & = & -2 \\ \text{III:} & x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \text{LGS1} .$$

a) Berechnen Sie den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ von LGS1.

3 BE

b) Das Lineare Gleichungssystem LGS1 werde abgewandelt in das nachfolgende Gleichungssystem LGS2:

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{I:} & 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 9 \\ \text{II:} & -2x_1 - x_2 + 2x_3 & = & -2 \\ \text{III:} & x_2 + ax_3 & = & 0 \end{array}\right\} \text{LGS2}$$

Bestimmen Sie a so, dass das neue Lineare Gleichungssystem einen Widerspruch enthält.

2 BE

LA2 *EH S. 19*

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Produkte $A \cdot \vec{x}$ und $A^2 \cdot \vec{x}$.

2 BE

b) Für einen Vektor $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ gelte $A \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

3 BE

LA3 *EH S. 19*

Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie M^2 und M^5 .

2 BE

b) Die Matrix M ist ein Spezialfall der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ f(x) & 0 \end{pmatrix}$.

Definieren Sie die Funktion $f(x)$ mit möglichst großem Definitionsbereich so, dass

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist.

3 BE

LA4 *EH S. 20*

Für ein Insekt mit den Entwicklungsstadien E, L und K ist die Übergangsmatrix M für einen Entwicklungszyklus gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix} \text{, bezogen auf einen Populationsvektor } \begin{pmatrix} x_E \\ x_L \\ x_K \end{pmatrix}$$

a) Skizzieren Sie den Übergangsgraphen für einen Entwicklungszyklus.

3 BE

b) Geben Sie den Wert a_{33} der Matrix $M^2 = A = \begin{pmatrix} 0 & 6{,}4 & 1{,}6 \\ 0 & 0 & 4{,}8 \\ 0{,}48 & 0{,}16 & a_{33} \end{pmatrix}$ an.

Interpretieren Sie die Bedeutung des Wertes a_{33} im Kontext.

2 BE

LA5 *EH S. 20*

Eine Abteilung eines Industriebetriebs verarbeitet die Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 zu den Zwischenprodukten Z_1 und Z_2. Aus diesen Zwischenprodukten wird das Endprodukt E hergestellt. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist durch die folgenden Matrizen gegeben.

Die Rohstoff/Zwischenproduktmatrix ($R \rightarrow Z$) ist $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$,

die Zwischenprodukt/Endproduktmatrix ($Z \rightarrow E$) ist $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Skizzieren Sie den Gozintographen.

3 BE

b) Berechnen Sie die Matrix $C = A \cdot B$.
Interpretieren Sie die Bedeutung des ersten Matrixelements von C im Kontext.

2 BE

LA6 *EH S. 21*

Der Kulturverein einer Kleinstadt bietet seinen Mitgliedern regelmäßig drei Veranstaltungen zur Auswahl an: Konzert (K), Theater (T) und Kino (C). Aus Mitglieder-Befragungen sind die folgenden Entscheidungswechsel bekannt:

- Von den Konzertbesuchern wählen beim nächsten Mal 50% Theater und 30% Kino.
- Von den Theaterbesuchern wählen beim nächsten Mal 30% Konzert und 40% Kino.
- Von den Kinobesuchern wählen beim nächsten Mal 25% Konzert und 35% Theater.

Die Anzahl der Mitglieder, die eine der drei Veranstaltungen besucht, ist als konstant zu betrachten.

a) Skizzieren Sie den Übergangsgraphen.

3 BE

b) Die Übergangsmatrix ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}35 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$,

bezogen auf einen Verteilungsvektor $\begin{pmatrix} x_K \\ x_T \\ x_C \end{pmatrix}$.

Begründen Sie aus dem Kontext heraus die Einträge in der Hauptdiagonalen der Matrix M.

2 BE

1.3 Stochastik

S1

EH S. 21

In einer Urne befinden sich 6 rote und 4 blaue Kugeln.

a) Es wird dreimal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
E_1: Unter den gezogenen Kugeln ist höchstens eine blaue Kugel.

3 BE

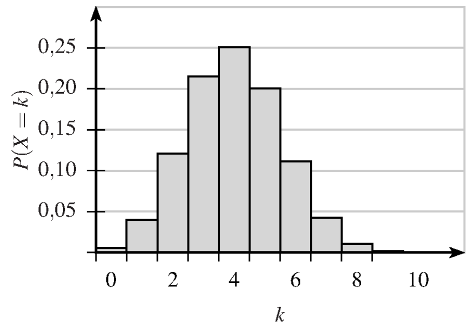
b) Es wird zehnmal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Als Ereignis werde betrachtet
E_2: Unter den gezogenen Kugeln sind genau k blaue Kugeln $(k \in \mathbb{N}; k \leq 10)$.
Geben Sie eine Formel für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_2 an.

2 BE

S2

EH S. 22

Die Zufallsvariablen X und Y sind binomialverteilt.
Für die Variable X ist $n = 10$ und $p = 0,4$;
für die Variable Y ist $n = 10$ und $p = 0,6$.
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer der beiden Variablen ist in der Abbildung dargestellt.



a) Entscheiden Sie, von welcher der beiden Zufallsvariablen die Wahrscheinlichkeitsverteilung abgebildet ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

2 BE

b) Begründen Sie, warum $P(X = k) = P(Y = 10 - k)$ für alle $k \in \mathbb{N}^{\leq 10}$ gilt.

3 BE

S3

EH S. 22

Eine Zufallsgröße X habe die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung.

x_i	$P(X = x_i)$
0	0,32
1	0,36
2	0,32

Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

5 BE

S4 *EH S. 22*

In einer Reisegruppe sind 37,5% männliche Reisende (M), von diesen sind 80% im Alter von 60 und mehr (60+). Insgesamt sind 70% der Reisenden im Alter 60+.

a) Bestimmen Sie den Anteil der weiblichen Reisenden im Alter 60+ in der gesamten Reisegruppe.

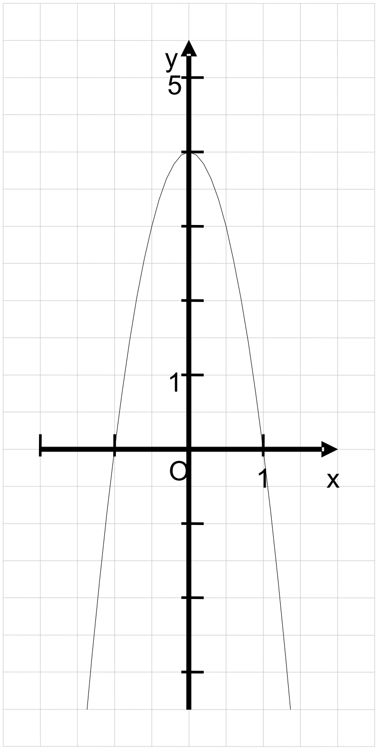
3 BE

b) Insgesamt gibt es 10 mehr weibliche als männliche Reisende in der Gruppe.
Bestimmen Sie die Personenanzahl der gesamten Reisegruppe.

2 BE

2. Erwartungshorizonte

A1

	Lösungsskizze
a)	Die Ableitung ist $f'(x) = -4x^2 + 4$. Damit ist die Steigung im Wendepunkt $f'(0) = 4$
b)	 Da die Extrempunkte der Funktion f an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ liegen, hat die Ableitungsfunktion hier ihre Nullstellen. Da die Steigung im Wendepunkt 4 ist, ist bei $(0\|4)$ der Extrempunkt der Ableitungsfunktion. *Hinweis:* *Wenn in Teil* **a)** *eine andere Steigung berechnet wurde, ist der Extrempunkt folgerichtig auf eine andere Höhe zu versetzen.*

A2

	Lösungsskizze
a)	Beide Summanden im Funktionsterm sind gerade Potenzen von x mit positivem Vorfaktor; sie können nicht negativ werden, ihre Summe folglich auch nicht.
b)	Es ist $\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{13}{15}$. Eine Verschiebung um c in y-Richtung wird beschrieben durch die Funktion $f(x) = x^4 + 2x^2 + c$. Dadurch vergrößert sich das Integral um c. Damit der Wert des Integrals die nächst-mögliche ganze Zahl 1 annimmt, muss $c = \frac{2}{15}$ sein.

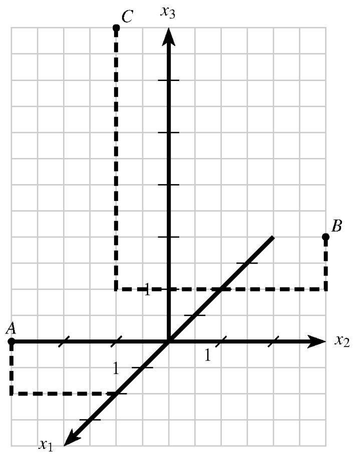
A3

	Lösungsskizze
	$b(0)=80-60\cdot 0{,}5^0=80-60=20$, die Anfangsbedingung ist erfüllt. Für die Differenz $[S-b(t)]$ gilt: $S-b(t)=80-\left(80-60\cdot 0{,}5^t\right)=60\cdot 0{,}5^t$. Der jährliche Zuwachs ist $b(t+1)-b(t)=80-60\cdot 0{,}5^{t+1}-\left(80-60\cdot 0{,}5^t\right)=60\cdot\left(0{,}5^t-0{,}5^{t+1}\right)$ $=60\cdot 0{,}5^t\left(1-0{,}5\right)=0{,}5\cdot 60\cdot 0{,}5^t=0{,}5\cdot\left[S-b(t)\right]$. Also ist der jährliche Zuwachs proportional zu $\left[S-b(t)\right]$.

A4

	Lösungsskizze
	Es gelten die beiden Bedingungen: 1. Der Steigungsfaktor der Tangente muss gleich $f_a'(1)$ sein. 2. $t(1)=f_a(1)$ Es ist $f_a'(x)=-2ax\cdot e^{-x^2}$, also $f_a'(1)=-2a\cdot e^{-1}=-2\cdot\frac{a}{e}$; aus $-2\cdot\frac{a}{e}=-2$ folgt $a=e$. Ferner ist $t(1)=-2+b$ und $f_a(1)=a\cdot e^{-1}$ bzw. $f_a(1)=e\cdot e^{-1}=1$; aus $-2+b=1$ folgt $b=3$. *Alternative über den direkten Einsatz in die Tangentengleichung ist möglich.*

G1

	Lösungsskizze
a)	
b)	Es ist $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$. Damit sind alle drei Verbindungsvektoren $\sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$ lang. Somit liegt ein gleichseitiges Dreieck vor.

G2

	Lösungsskizze
a)	Da A der Aufpunkt von g ist, liegt A auf g. Für $r = 1$ erhält man den Punkt B.
b)	Der Punkt B ist der Aufpunkt von h. Also liegt er auf beiden Geraden und ist somit ihr Schnittpunkt. *Aufwändigere Variante:* Es ist das folgende Lineare Gleichungssystem zu lösen: I: $3 - 5r = -2 + 2s$ II: $1 + r = 2 + 4s$ III: $1 + 3r = 4 + 1s$ Mit der Gleichung (II) erhält man $r = 1 + 3s$. Dies in (III) eingesetzt liefert $s = 0$. Somit ist $r = 1$ und der Schnittpunkt ist B. *Hinweis: Die Probe in der dritten Gleichung erübrigt sich durch die Information des Aufgabentextes.*
c)	Für $r = -1$ erhält man den Punkt $C(8\|0\|-2)$. Dieser hat den gleichen Abstand von A wie B.

G3

	Lösungsskizze
a)	Aus der Parametergleichung erhält man die drei Gleichungen: I: $x_1 = 1 + 2s$ II: $x_2 = -2r + s$ III: $x_3 = r + 3s$ Setzt man dies in die Koordinatengleichung ein, so erhält man $7r + 14s - 2r + 1s - 5r - 15s = 0r + 0s = 0$ Damit erfüllen alle Punkte von E_1 die Koordinatengleichung.
b)	*Es gibt unendlich viele mögliche Vektoren $\vec{v}$.* *Beispiel:* $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Lösungsvariante 1:* *Es wird gezeigt, dass die Richtungsvektoren von E_1 zusammen mit $\vec{v}$ drei linear unabhängige Vektoren sind.* *Lösungsvariante 2:* *Es wird gezeigt, dass der allgemeine oder ein spezieller Ortsvektor von E_2 kein Ortsvektor von E_1 ist.* *Lösungsvariante 3:* *Es wird gezeigt, dass die Punkte oder ein spezieller Punkt von E_2 nicht die Koordinatengleichung von E_1 erfüllen.* *Weitere Lösungsvarianten sind möglich.* *Hinweis: $\vec{v}$ darf nicht kollinear zum ersten Richtungsvektor sein. Ein Nachweis hierfür wird in der Lösung nicht erwartet.*

G4

	Lösungsskizze
a)	$\vec{r}$ orthogonal zu $\vec{s}$: Es ist $\vec{r}\cdot\vec{s}=15-7-8=0$. Damit ist $\vec{r}$ orthogonal zu $\vec{s}$. $\vec{r}$ nicht orthogonal zu $\vec{t}$: Es ist $\vec{r}\cdot\vec{t}=10-7+4=7\neq 0$. Damit ist $\vec{r}$ nicht orthogonal zu $\vec{t}$
b)	$\overrightarrow{u_z}$ orthogonal zu $\vec{r}$: Es ist $-12+4-4z=0 \Leftrightarrow -8-4z=0 \Leftrightarrow z=-2$. Somit steht $\overrightarrow{u_{-2}}$ orthogonal auf $\vec{r}$. $\overrightarrow{u_z}$ orthogonal zu $\vec{s}$: Es ist $-20-28+2z=0 \Leftrightarrow -48+2z=0 \Leftrightarrow z=24$. Somit steht $\overrightarrow{u_{24}}$ orthogonal auf $\vec{s}$. Da $\overrightarrow{u_{-2}}$ und $\overrightarrow{u_{24}}$ zwei unterschiedliche Vektoren sind, kann $\overrightarrow{u_z}$ nicht gleichzeitig orthogonal zu $\vec{r}$ und $\vec{s}$ sein.

LA1

	Lösungsskizze
a)	Mit dem Gauß-Verfahren kommt man auf die folgende Stufenform: $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & -1 & 1 & 9 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ Dies führt auf $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Anmerkung: Der „Lösungsvektor“ kann auch in anderer Schreibweise angegeben werden und es kann auch ein alternatives Lösungsverfahren angewandt werden.*
b)	In der Auflösung nach dem Gauß-Verfahren entsteht z.B. die dritte Zeile $(3+2a)x_3=7$, was für $a=-1{,}5$ zu einem Widerspruch führt.

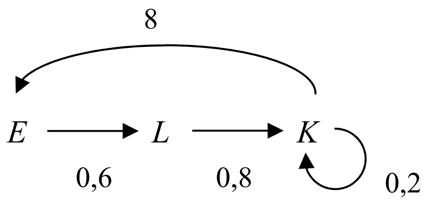
LA2

	Lösungsskizze
a)	Es ist $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+2 \\ 3+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \end{pmatrix}$. Nach dem Assoziativgesetz ist $A^2 \cdot \vec{x} = A \cdot \left(A \cdot \vec{x} \right)$. $A^2 \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+13 \\ 4+65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 69 \end{pmatrix}$. *Hinweis: Der Bezug auf das Assoziativgesetz wird in der Darstellung der Lösung nicht erwartet.*
b)	Es ist $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p+q \\ -p+5q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$. Aus der ersten Gleichung erhält man $q = 7 - 2p$. Eingesetzt in die zweite Gleichung erhält man $-11p = -33$ bzw. $p = 3$. Also ist $q = 1$. Der Lösungsvektor ist damit $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Alternative Lösungen sind möglich.*

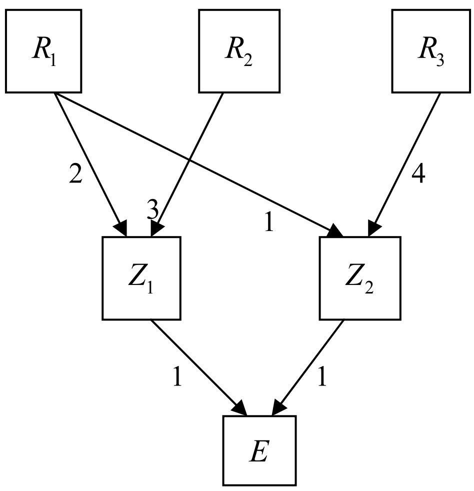
LA3

	Lösungsskizze
a)	Es ist $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0{,}5 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 0{,}5 \cdot 0 + 0 \cdot 0{,}5 & 0{,}5 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$. Folglich ist $M^5 = M \cdot M^2 \cdot M^2 = M \cdot E \cdot E = M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$.
b)	Es ist $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ f(x) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & x \\ f(x) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot f(x) & 0 \\ 0 & f(x) \cdot x \end{pmatrix}$. Also muss $f(x) = \frac{1}{x}$ sein, der maximale Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \left\{ 0 \right\}$.

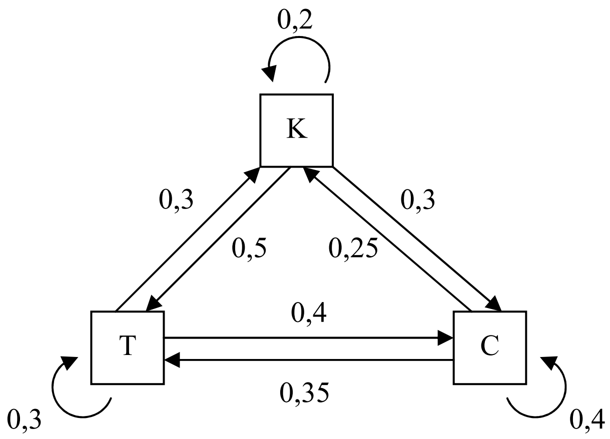
LA4

	Lösungsskizze
a)	
b)	Es ist $a_{33} = 0 \cdot 8 + 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$. Der Wert a_{33} der Matrix $M^2 = A$ gibt den Anteil der Insekten im Stadium K an, die nach zwei Entwicklungszyklen immer noch im Stadium K sind.

LA5

	Lösungsskizze
a)	
b)	Es ist $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Der Wert $c_{11} = 3$ der Matrix C gibt die Menge des Rohstoffs R_1 an, die für eine ME des Endprodukts benötigt wird.

LA6

	Lösungsskizze
a)	
b)	In der Hauptdiagonalen sind jeweils die Anteile derer, die bei ihrer vorigen Auswahl bleiben. Diese müssen sich mit den Anteilen derer, die ihre Auswahl ändern, zu 1 ergänzen, da die Gesamtzahl der Personen konstant ist.

S1

	Lösungsskizze
a)	$P(E_1)$ $= P(\text{eine blaue Kugel}) + P(\text{alle rot})$ $= 3 \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^2 \cdot \frac{4}{10} + \left(\frac{6}{10}\right)^3$ $= \frac{432}{1000} + \frac{216}{1000}$ $= \frac{648}{1000} \left(= \frac{81}{125}\right)$
b)	$P(E_2) = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^k \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^{10-k}$

S2

	Lösungsskizze
a)	Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Variablen X, denn ihr Maximum liegt bei dem Erwartungswert $E(X)=10\cdot 0,4=4$.
b)	Es ist $P(X=k)=\binom{10}{k}\cdot 0,4^k\cdot 0,6^{10-k}$ und $P(Y=10-k)=\binom{10}{10-k}\cdot 0,6^{10-k}\cdot 0,4^{10-(10-k)}=\binom{10}{10-k}\cdot 0,6^{10-k}\cdot 0,4^k$. Also bleibt zu zeigen $\binom{10}{k}=\binom{10}{10-k}$. Es ist $\binom{10}{k}=\frac{10!}{k!\cdot(10-k)!}=\binom{10}{10-k}$. Damit ist $P(X=k)=P(Y=10-k)$.

S3

	Lösungsskizze
	$E(X)=0\cdot 0,32+1\cdot 0,36+2\cdot 0,32=1$ $\sigma^2(X)=0,32\cdot 1^2+0,36\cdot 0^2+0,32\cdot 1^2=0,64$ $\sigma(X)=\sqrt{0,64}=0,8$

S4

	Lösungsskizze
a)	$0,8\cdot 0,375=0,30$. Also sind 30% der Reisenden männlich und 60+. Da insgesamt 70% der Reisenden 60+ sind, sind 40% der Reisenden weiblich und 60+.
b)	Der Anteil der weiblichen Reisenden ist 100% – 37,5% = 62,5%, das sind 25% mehr weibliche als männliche Reisende. Wenn diese 25% einer Anzahl von 10 Personen entsprechen, besteht die gesamte Reisegruppe aus 40 Personen.