

**1 Algebraische Grundlagen**

<b>Binomische Formeln</b>	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
	$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$	$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

<b>Absolutbetrag</b>	$ x  = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$
----------------------	--

<b>Wurzeln und Potenzen</b>	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$	$\sqrt{a} \geq 0$	$\sqrt{a^2} =  a $
	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{n \text{ Faktoren}} = a$
	$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$	$a^0 = 1$	$a^1 = a$
	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
	$\frac{1}{a^n} = \sqrt[n]{a}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	

<b>Logarithmen</b>	$\log_b a = z \Leftrightarrow b^z = a$	
	$\log_b (uv) = \log_b u + \log_b v$	$\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$
	$\log_b u^z = z \cdot \log_b u$	$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$

<b>Geradengleichung</b>	$y = m \cdot x + t$	(allgemeine Form)
	$y = m \cdot (x - x_0) + y_0$	(Punkt-Steigungs-Form)

<b>Parabelgleichung</b>	$y = ax^2 + bx + c$	(allgemeine Form)
	$y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$	(Scheitelform)
	$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$	(Linearfaktorform)

<b>Lösungsformel für die quadratische Gleichung</b>	$ax^2 + bx + c = 0 \text{ und } b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
---	--

**2 Analysis**

<b>Symmetrie bezüglich des Koordinaten- systems</b>	$f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$	} $\Rightarrow$	$G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse (f heißt dann gerade Funktion)
	$f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$		$G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung (f heißt dann ungerade Funktion)

<b>Differenzen- quotient</b>	$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	(Sekantensteigung bzgl. $x_0$ und $x$ )
----------------------------------	---------------------------------	---

**Ableitung  $f'(x_0)$   
(Differential-  
quotient)**      Besitzt der Graph  $G_f$  an der Stelle  $x_0$  eine eindeutige Tangente, so wird die Steigung dieser Tangente mit  $f'(x_0)$  bezeichnet.

Dann gilt:  $x \rightarrow x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f'(x_0)$

Schreibweisen:  $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$

$\dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt}$

<b>Ableitung der Grundfunktionen</b>	$\frac{d}{dx}(x^r) = r \cdot x^{r-1}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^r}\right) = -\frac{r}{x^{r+1}}$
	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
	$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$	

<b>Ableitungsregeln</b>	$f(x) = u(x) + v(x)$	$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
	$f(x) = c \cdot u(x)$	$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$
	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
	$f(x) = u(v(x))$	$\Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

<b>Monotoniekriterium</b>	$f'(x) < 0$ im Intervall I	$\Rightarrow G_f$ fällt streng monoton in I.
	$f'(x) > 0$ im Intervall I	$\Rightarrow G_f$ steigt streng monoton in I.
<b>Art von relativen Extrema</b>	$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$	$\Rightarrow f$ hat an der Stelle $x_0$ ein relatives Minimum.
	$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$	$\Rightarrow f$ hat an der Stelle $x_0$ ein relatives Maximum.
<b>Graphenkrümmung</b>	$f''(x) < 0$ im Intervall I	$\Rightarrow G_f$ ist in I rechtsgekrümmt.
	$f''(x) > 0$ im Intervall I	$\Rightarrow G_f$ ist in I linksgekrümmt.
<b>Wendepunkt</b>	Ist $f''(x_0) = 0$ und wechselt $f''(x)$ an der Stelle $x_0$ das Vorzeichen, so hat $G_f$ an der Stelle $x_0$ einen Wendepunkt.	
<b>Terrassenpunkt</b>	Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und wechselt $f''(x)$ an der Stelle $x_0$ das Vorzeichen, so hat $G_f$ an der Stelle $x_0$ einen Terrassenpunkt.	
<b>Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung</b>	<p>Ist <math>f</math> eine in <math>[a; b]</math> stetige Funktion, so ist die Integralfunktion <math>F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt</math> differenzierbar und <math>F_a</math> ist eine Stammfunktion von <math>f</math>, d. h. <math>F_a'(x) = f(x)</math>.</p> <p>Ist <math>F</math> eine Stammfunktion von <math>f</math>, so gilt:</p> $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$	
<b>Partielle Integration</b>	$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x) dx$	
<b>Integration durch Substitution</b>	$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad \text{mit } x = g(t)$	

**Volumen eines  
 Rotationskörpers**

Rotation um die x-Achse:

$$V = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} (f(x))^2 dx$$

Rotation um die y-Achse:

$$V = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} (f^{-1}(x))^2 dx$$

**Unbestimmte  
 Integrale**

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \ln x dx = -x + x \cdot \ln x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$$

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax + b) + C$$

wobei F eine  
 Stammfunktion von f ist

**Grenzwerte**

für  $r > 0$  gilt:

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow x^r \cdot e^x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{x^r}{e^x} \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{\ln x}{x^r} \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow x^r \cdot \ln x \rightarrow 0$$

### 3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

$\Omega$  sei der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments und  $A, B \subseteq \Omega$  seien zwei beliebige Ereignisse.

**Gesetze der Mengenalgebra**

$$\bar{\bar{A}} = A$$

$$\bar{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$A \cap \bar{A} = \{ \}$$

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

**Gesetze von De Morgan**

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

**Unvereinbarkeit**

$$A \cap B = \{ \} \Leftrightarrow A \text{ und } B \text{ heißen unvereinbar.}$$

**Ereigniswahrscheinlichkeiten**

$$P(\{ \}) = 0$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\Omega) = 1$$

**Satz von Sylvester**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Bedingte Wahrscheinlichkeit**

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

**Unabhängigkeit von zwei Ereignissen**

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{oder} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\Leftrightarrow A \text{ und } B \text{ sind stochastisch unabhängig.}$$

**Fakultät**

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Der Wert  $n!$  gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt,  $n$  unterscheidbare Elemente in einer Reihe anzuordnen.

**Binomialkoeffizient**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Der Binomialkoeffizient gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus einer Menge mit  $n$  Elementen Teilmengen mit  $k$  Elementen zu bilden.

**Laplace-Experiment**

Ein Laplace-Experiment ist ein Zufallsexperiment, bei dem alle Elementarereignisse des zugehörigen Ergebnisraumes gleich wahrscheinlich sind.

$$\text{Es gilt dann: } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

**Maßzahlen  
von Zufallsgrößen**

Die Zufallsgröße  $X$  nehme die Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$   
jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_1, p_2, \dots, p_n$  an.

Dann gilt:

• **Erwartungswert**

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \\ &= x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n\end{aligned}$$

• **Varianz**

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i \\ &= (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n\end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 \quad (\text{Verschiebungsregel})$$

• **Standardabweichung**

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

**Binomialverteilung**

Eine Zufallsgröße  $X$  beschreibe die Anzahl der Treffer in einer  
Bernoullikette der Länge  $n$  mit Trefferwahrscheinlichkeit  $p$ .

Dann gilt:

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$   
heißt Binomialverteilung.
- $X$  heißt binomialverteilt, genauer  $B(n; p)$ -verteilt.

Ist eine Zufallsgröße  $X$  binomialverteilt nach  $B(n; p)$ , so gilt:

- $P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$  für  $k = 0, 1, \dots, n$
- Erwartungswert:  $E(X) = n \cdot p$
- Varianz:  $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

**Hypothesentest**

Beim Testen der Nullhypothese  $H_0$  in einem Signifikanztest  
mit Signifikanzniveau  $\alpha$  können zwei Fehler auftreten:

- Fehler 1. Art:  $H_0$  wird abgelehnt, obwohl sie wahr ist.
- Fehler 2. Art:  $H_0$  wird angenommen, obwohl sie falsch ist.

Das Signifikanzniveau  $\alpha$  des Tests ist die größtmögliche  
noch akzeptierte Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art.

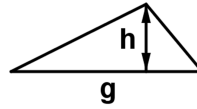
**4 Geometrie**

**Flächengeometrie**

A: Flächeninhalt  
 U: Umfang

Allgemeines Dreieck

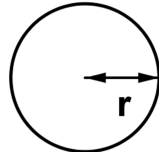
$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$



Kreis

$$U = 2 \cdot r \cdot \pi$$

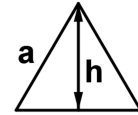
$$A = r^2 \cdot \pi$$



Gleichseitiges Dreieck

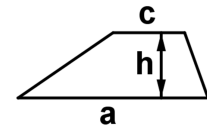
$$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$



Trapez

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

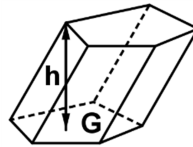


**Raumgeometrie**

V: Volumen  
 G: Grundfläche  
 M: Mantelfläche  
 O: Oberfläche

Prisma

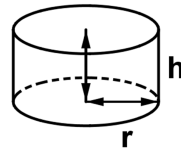
$$V = G \cdot h$$



Gerader Kreiszyylinder

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

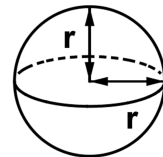
$$M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$



Kugel

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$



Pyramide

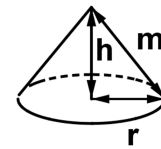
$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$



Gerader Kreiskegel

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$M = r \cdot \pi \cdot m$$



**Geradengleichung**

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$$

(Parameterform)

**Ebenengleichung**

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

(Parameterform)

$$E: a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + d = 0$$

(Koordinatenform)

$$E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

(Normalenform)

$$E: \frac{x_1}{s} + \frac{x_2}{t} + \frac{x_3}{u} = 1$$

(Achsenabschnittsform)

mit den Achsenschnittpunkten

$$S(s | 0 | 0), T(0 | t | 0), U(0 | 0 | u)$$

**Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^3$**       $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

**Eigenschaften  
 und Anwendungen  
 des Skalarprodukts**

- zueinander senkrechte Vektoren:      $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$
- Betrag eines Vektors:      $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$
- Einheitsvektor:      $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- Winkel zwischen zwei Vektoren:      $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$   
 mit  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$

**Vektorprodukt**      $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$

**Eigenschaften  
 und Anwendungen  
 des Vektorprodukts**

- $\vec{a} \times \vec{b}$  steht senkrecht auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$  mit  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$
- Maßzahl F des Flächeninhalts  
 des Dreiecks ABC:      $F = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|$
- Maßzahl V des Volumens der  
 dreiseitigen Pyramide ABCD:      $V = \frac{1}{6} \cdot \left| \vec{AB} \circ (\vec{AC} \times \vec{AD}) \right|$

**Lineare  
 Unabhängigkeit**

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$  sind linear unabhängig.
- $\Leftrightarrow$  Die Gleichung  $\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c} = \vec{0}$   
 ist nur mit  $\lambda = \mu = \nu = 0$  lösbar.
- $\Leftrightarrow \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$

**Besondere  
 Punkte**

- Mittelpunkt M einer Strecke  $\overline{AB}$ :      $\vec{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB})$
- Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC:      $\vec{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$



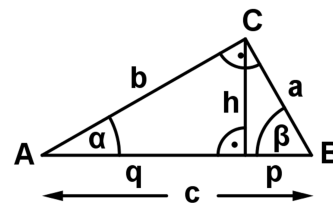
## 5 Trigonometrische Grundlagen

### Rechtwinkliges Dreieck

Satz des Pythagoras:  $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz:  $h^2 = pq$

Kathetensatz:  $a^2 = cp$ ;  $b^2 = cq$



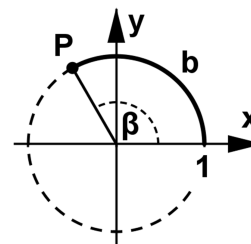
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b}$$

### Beziehungen am Einheitskreis

- $P(x_p | y_p)$  liegt auf dem Einheitskreis

$$\Rightarrow \cos \beta = x_p \text{ und } \sin \beta = y_p$$

- $\frac{b}{\pi} = \frac{\beta}{180^\circ}$



### Trigonometrische Beziehungen

$$(\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2 = 1$$

$$\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$$

$$\cos(-\varphi) = \cos \varphi$$

$$\sin(90^\circ - \varphi) = \cos \varphi$$

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$$

### Additionstheoreme

$$\sin(2\varphi) = 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

$$\cos(2\varphi) = (\cos \varphi)^2 - (\sin \varphi)^2$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

$$\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos \varphi)$$

$$\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos \varphi)$$

Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

Stand der Merkhilfe: 11.09.2017