Vorabiturklausur GTR-freier Teil Name

1. Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = x^3 - kx$, $k > 0$.

   a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{\frac{k}{3}}$ die x-Koordinate des Tiefpunktes ist. $f''(x) = 6x$, $f''(x_T) = 6\sqrt{\frac{k}{3}} > 0$,

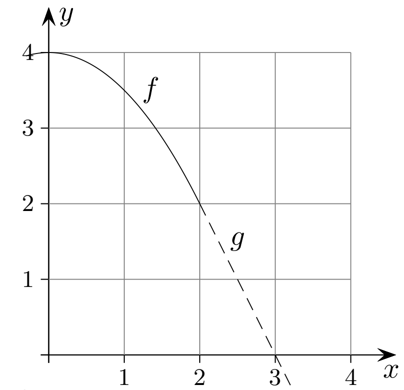
   b) Bestimmen Sie k so, dass die x-Koordinaten der beiden Extrema den Abstand 2 voneinander haben. $2\sqrt{\frac{k}{3}} = 2$, $k = 3$

2. Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = -x^2 + kx$, $k > 0$
   und die Funktion g mit $g(x) = x^2$.

   a) Zeigen Sie, dass die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f_k und g die Werte 0 und $\frac{k}{2}$ haben.

   b) Für jedes k schließt der Graph von f_k mit dem Graphen von g eine Fläche ein.
   Ermitteln Sie den Wert für k, sodass die eingeschlossene Fläche den Inhalt $\frac{1}{3}$ FE hat.
   $\frac{1}{24}k^3 = \frac{1}{3}$, $k = 2$

3. Für $x \leq 2$ ist eine Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ und für $x \geq 2$ eine lineare Funktion g gegeben.
   In der nebenstehenden Abbildung sind die Graphen der beiden Funktionen dargestellt.
   Es gilt $f(2) = g(2)$ und $g(3) = 0$.



   a) Zeigen Sie, dass der Graph von f knickfrei an den Graphen von g anschließt. $f'(2) = g'(2) = -2$

   b) Begründen Sie allgemein, dass der Übergang zwischen dem Graphen einer linearen Funktion und dem Graphen einer quadratischen Funktion nie krümmungsruckfrei sein kann.
   $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f''(x) = 2a$, $a \neq 0$, $g(x) = mx + d$, $g''(x) = 0$

4. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist ein Punkt $P_a(1 \mid a \mid -4)$ gegeben.

   a) Bestimmen Sie alle Werte von a so, dass die Punkte P_a vom Ursprung den Abstand 9 haben.
   $a_{1/2} = \pm 8$

   b) Die Gerade g enthält alle Punkte, die durch P_a beschrieben werden.
   Geben Sie für g eine Gleichung an.

5. Eine Urne enthält 3 rote und 7 weiße Kugeln. Zusätzlich gibt es noch eine rote und eine weiße Ersatzkugel außerhalb der Urne. Eine Kugel aus der Urne wird zufällig gezogen. Danach wird eine Ersatzkugel der anderen Farbe in die Urne hineingelegt. Nun wird aus der Urne wieder eine Kugel zufällig gezogen.

   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die letzte gezogene Kugel rot ist. $P = 0{,}34$

   b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden gezogenen Kugeln weiß sind, wenn bekannt ist, dass beide Kugeln die gleiche Farbe haben. $P = \frac{42}{48} = \frac{7}{8}$

Vorabiturklausur Name

1. Die Entwicklung einer Bakterienart wird untersucht. Dabei wird die Bakterienanzahl in Mengeneinheiten (ME) bestimmt.

   a) Die Untersuchung ergibt folgende Werte.

Zeit in Stunden	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl in ME	20,0	27,0	36,4	49,2	66,4	89,7	121,0
relativer Zuwachs pro Stunde	☒	35,0 %	34,8 %			35,1 %	34,9 % ☒

   Berechnen Sie die fehlenden Tabellenwerte für den relativen Zuwachs pro Stunde in Prozent. Bestimmen Sie eine Funktion h (möglichst keine e-Funktion), die die Bakterienanzahl modelliert. 35,2 %, 35,0 %, $h(x) = 20 \cdot 1{,}35^x$

   Verwenden Sie im Folgenden die Funktion g mit $g(x) = 20e^{0{,}3x}$, x in Stunden, $g(x)$ in ME. Berechnen Sie für diese Modellfunktion g

   - die Bakterienanzahl, die sich nach 15 Stunden ergibt, 1800
   - die Verdopplungszeit der Bakterienanzahl in Minuten. 139 Minuten

   b) Zur Untersuchung der Wirkung eines Antibiotikums auf die Bakterienanzahl wird dieses von einem Anfangszeitpunkt an ($x = 0$) kontinuierlich zugeführt.
   Das Wachstum kann durch die Differenzialgleichung $f'(x) = (0{,}3 - 0{,}02x)f(x)$ mit $f(0) = 20$ modelliert werden, x in Stunden, $f(x)$ in ME.
   Bestimmen Sie mithilfe der Differenzialgleichung $f'(0)$. $f'(0) = 6$
   Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. Anfängliche Wachstumsgeschwindigkeit ...
   Begründen Sie mithilfe der Differenzialgleichung, dass der Graph von f unter der Voraussetzung $f(x) > 0$ nur an der Stelle $x = 15$ einen Hochpunkt hat. $f'(15) = 0$, Vorzeichenwechsel ...
   Überprüfen Sie, ob a und b so gewählt werden können, dass die Funktion f mit $f(x) = 20e^{ax-bx^2}$ die Differenzialgleichung erfüllt. $f(x) = 20e^{0{,}3x-0{,}01x^2}$
   Beschreiben Sie für den Zeitraum $0 \le x \le 25$ die Auswirkung der Zugabe des Antibiotikums im Vergleich zur Entwicklung der Bakterienanzahlen ohne Antibiotikumzugabe.

   Das exponentielle Anwachsen der Bakterienanzahl, das sich ohne die Zugabe des Antibiotikums ergibt, kann durch die Zugabe des Antibiotikums abgebremst werden. Innerhalb der ersten 15 Stunden nimmt die Bakterienanzahl zu, nach 15 Stunden wird die Maximalzahl erreicht und damit die Wachstumsgeschwindigkeit null. Danach bewirkt die Antibiotikumzugabe eine Verringerung der Bakterienanzahl.

Unabhängig vom Sachzusammenhang wird im Folgenden die Funktionenschar f_k mit $f_k = 10e^{x-\frac{1}{2}kx^2}$, $k \neq 0$, betrachtet.

   c) Beschreiben Sie das Verhalten von f_k für $x \longrightarrow \infty$ in Abhängigkeit von k.
   Der Exponent ist für $k > 0$ eine nach unten geöffnete Parabel, für $x \longrightarrow \infty$ gilt $f(x) \longrightarrow 0$.
   Der Exponent ist für $k < 0$ eine nach oben geöffnete Parabel, für $x \longrightarrow \infty$ gilt $f(x) \longrightarrow \infty$.

   Bestimmen Sie k so, dass zum Graphen von f_k ein Punkt mit waagerechter Tangente und der y-Koordinate $10e$ gehört. $f_k'(x) = 0 \implies x = \frac{1}{k}$, $f_k(\frac{1}{k}) = 10e \implies k = \frac{1}{2}$

   d) Geben Sie eine rechnerische Begründung für die Symmetrie des Graphen von f_k an. $f_k(x + \frac{1}{k})$

   e) Ohne Nachweis können Sie verwenden: $f_k''(x) = 10e^{x-\frac{1}{2}kx^2}((1-kx)^2 - k)$ Für $k > 0$ hat jede Funktion f_k genau zwei Wendestellen. Ermitteln Sie diese. $1 - kx = \pm\sqrt{k}$ ...

2. Der Boden einer Theaterbühne liegt in der xy-Ebene, die Rückseite wird durch die yz-Ebene, die linke Seitenfläche durch die xz-Ebene festgelegt. Auf der Bühne steht ein $5\,m$ hoher Kegel mit der Kegelspitze C und dem Grundkreismittelpunkt M (siehe Skizze in der Anlage).
Die Strecke $\overline{MC}$ steht senkrecht auf dem Grundkreis.
Die Strecke $\overline{AB}$ mit $A(1\,|\,8\,|\,0)$ und $B(5\,|\,8\,|\,0)$ ist ein Durchmesser des Kreises (Einheit m).

   a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Kegelspitze C. $C(3\,|\,8\,|\,5)$

   Untersuchen Sie, ob die Strecke $\overline{DE}$ mit $D(3\,|\,6\,|\,0)$ und $E(3\,|\,10\,|\,0)$ ein Durchmesser des Grundkreises ist und außerdem senkrecht zur Strecke $\overline{AB}$ verläuft.

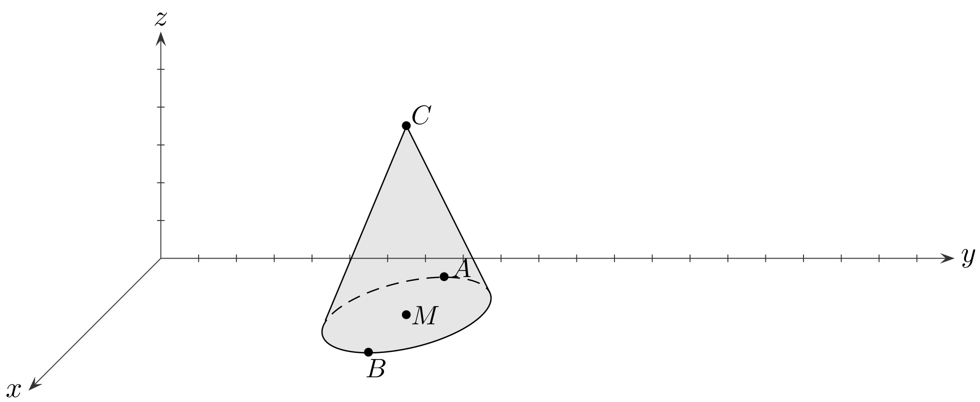
   $M(3\,|\,8\,|\,0)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DE}$, $|\overline{AB}| = |\overline{DE}| = 4$

   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$

   b) Ein Scheinwerfer befindet sich im Punkt $P(7\,|\,0\,|\,9)$ und strahlt den Kegel an.
   Ermitteln Sie den zugehörigen Schattenpunkt der Kegelspitze in der yz-Ebene. $S(0\,|\,14\,|\,2)$

   c) Der Scheinwerfer wird entlang einer geraden Schiene vom Punkt $P(7\,|\,0\,|\,9)$ zum Punkt $Q(2\,|\,20\,|\,9)$ bewegt.
   Untersuchen Sie, ob sich der Scheinwerfer in eine Position T bewegen lässt, so dass die Strecke $\overline{BT}$ senkrecht zur xy-Ebene ist. $P(5\,|\,8\,|\,9)$

   Der Scheinwerfer wird während der Bewegung stets auf die Kegelspitze ausgerichtet.
   Bestimmen Sie die Position des Scheinwerfers, so dass der Schattenpunkt der Kegelspitze auf den Punkt $R(0\,|\,12\,|\,1)$ fällt. $P_2(6\,|\,4\,|\,9)$



3. Ein Transportunternehmen bringt jeden Tag Zubehörteile zu einem Unternehmen. Dabei wird immer dieselbe Strecke zurückgelegt. Die dafür benötigte Zeit soll als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 120$ Minuten und der Standardabweichung $\sigma = 15$ Minuten modelliert werden.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Fahrer höchstens 110 Minuten Fahrzeit benötigt.

$P(X \leq 110) = 0{,}252$

Der Fahrer fährt um 6:00 Uhr los.
Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit 50 % beträgt, dass der Fahrer spätestens um 8:00 Uhr beim Unternehmen eintrifft.

$\mu = 120$, daher gilt $P(X \leq 120) = 0{,}5$

Die Zubehörteile müssen spätestens um 9:00 Uhr beim Unternehmen eintreffen.
Ermitteln Sie die Uhrzeit (auf Minuten gerundet), zu welcher der Fahrer spätestens losfahren muss, damit in mindestens 95 % aller Fälle die Lieferung rechtzeitig ankommt.

Zeitdauer mindestens 145 Minuten, späteste Abfahrtszeit 6:35 Uhr

b) Der Fahrweg beinhaltet auch eine Autobahnstrecke mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung auf $120\,\frac{km}{h}$.
Die gefahrene Geschwindigkeit soll als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 125\,\frac{km}{h}$ modelliert werden. Kontrollen haben ergeben, dass auf dieser Strecke 8 % der Autofahrer schneller als $140\,\frac{km}{h}$ fahren. Bestimmen Sie, wie viel Prozent der Autofahrer nicht schneller als $120\,\frac{km}{h}$ fahren.

$\sigma = 10{,}68$, $P(Y \leq 120) = 0{,}320$

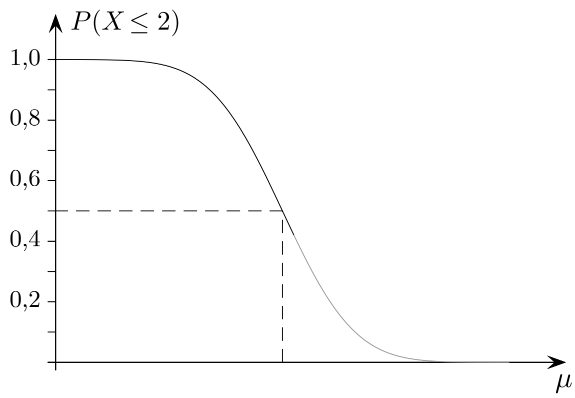
Untersuchen Sie ohne Einsatz des Rechners die Auswirkung einer Verkleinerung der Standardabweichung σ auf den Anteil derjenigen Autofahrer, die nach diesem Modell schneller als $140\,\frac{km}{h}$ fahren.

beachte: $\mu = 125\,\frac{km}{h}$

c) Unabhängig vom Sachzusammenhang wird im Folgenden eine normalverteilte Zufallsgröße X mit der Standardabweichung $\sigma = 0{,}5$ betrachtet.
Untenstehend ist ein Teil des Graphen der Funktion zu sehen, die für jeden Wert des Erwartungswertes μ die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 2)$ angibt. Zeichnen Sie auf der μ-Achse die Stelle ein, an der sich der Wert 2 befindet und begründenSie Ihr Vorgehen.

Für $\mu = 2$ gilt $P(X \leq 2) = 0{,}5$, da der Graph einer Normalverteilung symmetrisch zu $x = \mu$ ist. Deshalb gehört zum Funktionswert 0,5 die Stelle 2.

Skizzieren und begründen Sie den weiteren Verlauf des Graphen.



Schon für $\mu > 3{,}5$ liegt der Wert 2 nicht mehr in der 3σ-Umgebung von μ. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten außerhalb dieser Umgebung sind sehr klein, da es mit zunehmendem Erwartungswert μ immer unwahrscheinlicher wird, dass die Zufallsvariable Werte annimmt, die kleiner oder gleich 2 sind. Deshalb werden die Werte von $P(X \leq 2)$ mit zunehmendem μ immer kleiner und nähern sich dem Wert null an.